

類似스펙트럼 方法에 依한 옵션價格 計算⁽¹⁾

徐 祥 源

옵션 基礎資產 價格의 動學에 變動性 스마일(smiles)이나 skews를 반영하기 위해 들 혹은 그 이상의 危險要因을 가진 옵션가격 모형들이 많이 개발되어 왔다. 그러나 이러한 모형을 이용하여 옵션가격-특히, 아메리칸 옵션의 가격-을 數值的으로 計算하는 데는 큰 計算費用이 소요된다. 본 논문은 ‘類似스펙트럼(pseudospectral)’ 방법이라 불리는 接近法이 이러한 多要因 模型을 적용할 때 등장하는 偏微分 또는 偏積微分 方程式을 數值的으로 푸는 데 활용될 수 있음을 보여 준다. 이 방법은 計算의 正確度 및 速度 측면에서 既存의 有限差分 方法(finite-difference methods)에 비해 優越하였다.

1. 序 論

옵션 등 派生商品의 價格을 계산하는 대부분의 數值的 方法은 대체로 有限差分(finite-difference) 方法, lattice 方法, 몬테-카를로 方法 등으로 구분된다. 몬테-카를로 方法은 여러 狀態變數를 가진 高次元(high-dimension) 문제에 유용하지만 計算速度가 느리다. Lattice와 유한차분 方法은 低次元 문제에서는 速度가 빠르나, 상태변수 수가 증가하면 적용하기 어렵게 된다. 옵션가격의 變動性 스마일(smile)이나 스머크(smirk)를 반영하기 위해 최근 들어 여러 多要因(multifactor) 模型들이 제시되어 왔다. Heston(1993), Scott(1997) 및 여타 確率變動性(stochastic volatility) 모형들은 변동성의 安定的 變動(persistence)을 나타낼 수 있고 中長期의 滿期를 가진 옵션의 가격에 대한 豫測力을 높였다. Bates(1996, 2000), Bakshi *et al.*(1997) 등은 포아송 確率過程을 이용한 점프(jump) 과정을 옵션가격에 도입하면 短期의 滿期를 가진 옵션가격의 모형화에 도움이 됨을 보였다. Eraker *et al.*(2003)는 옵션의 가격뿐만 아니라 변동성에도 점프과정을 도입할 것을 주장하였다. 이러한 다요인 모형들에 대한 經驗的 檢證은 주로 마팅계일 方法에 의해 옵션가격의 계산이 용이한 유러피언 옵션을 대상으로 이루어져 왔다. 아메리칸 옵션의 가격 계산에는 마팅계일 方法을 적용할 수 없고 수치적 방법만을 적용해야 하며, 더구나 점프과정 이 모형에 포함되면 偏微分方程式(p.d.e.: partial differential equation)이 아니라 더욱 복잡

(1) 본 고는 Suh, S.(2005): "Pseudospectral Methods for Pricing Options," Working Paper를 축약한 것임.

한 偏積微分方程式(p.i.d.e.: partial integro-differential equation)을 수치적으로 풀어야 한다.

본 논문은 p.d.e.와 p.i.d.e.의 數值的 解法의 代案의 方法을 옵션가격 계산에 적용해 보고자 한다. 類似스펙트럼(pseudospectral) 방법으로 불리는 이 방법은 物理學과 工學에서는 사용되어 왔으나 옵션가격 계산에는 아직 활용되지 않고 있다. 有限差分 方法은 解에 대해 細分된 格子點들 간에 局地的으로 線型函數를 가정하고 있으나, 유사스펙트럼 방법은 高次元의 直交多項式의 線型結合으로 全域的 解를 近似한다. 全域的 近似는 많은 문제에서 훨씬 有用할 수 있음이 알려져 있다. Boyd(2001)는 유사스펙트럼 방법에 대한 상세한 설명과 전통적인 방법과의 비교를 담고 있다. 옵션의 기초자산 가격이 여러 리스크 要因에 의해 변동할 경우 아메리칸 옵션의 價格計算에서 유사스펙트럼 방법이 유한차분 방법에 비해 優越함이 본 논문에서 보여질 것이다. 아메리칸 옵션 이외의 여타 經路依存的(path-dependent) 옵션에 대한 유사스펙트럼 방법의 적용에 대해서는 Suh(2005)에서 다루었다.

본 논문의 주된 寄與와 結論을 要約하면 다음과 같다. 첫째, 다양한 옵션모형하에서 유러피언 및 아메리칸 옵션의 價格 計算에 類似스펙트럼 方法을 活用하는 方法을 제시하였다. 둘째, Quadrature 方法을 활용하여 p.i.d.e.를 유사스펙트럼 方法에서 다루는 方法을 제시하였다. 셋째, Broadie and Detemple(1996)이 유사스펙트럼 方法의 效率性을 높일 수 있음을 보였다.

2. 블랙-숄즈 模型下에서 옵션價格의 計算

단순한 모형하에서 類似스펙트럼 接近法을 설명하기 위해 옵션의 기초자산 가격이 블랙-숄즈 模型을 따른다고 假定한다[Black and Scholes(1973)]. 블랙-숄즈 모형에 대해서는 유러피언 옵션의 價格公式이 알려져 있고, 아메리칸 옵션에 대해서도 가격의 近似公式이 알려져 있으므로 數值的 方法의 正確度 등을 비교할 수 있다.

블랙-숄즈 모형을 따르는 基礎資產 價格의 動學(dynamics)은 다음과 같이 정의된다.

$$(2.1) \quad \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

여기서 S_t 는 t 時點에서의 기초자산 가격이며, $\{W_t\}$ 는 標準 브라운運動(Brownian motion)이다. $D(S_t, T-t)$ 로 표시된 滿期가 T 인 옵션價格은 다음과 같은 p.d.e.를 滿足해야 한다.

$$(2.2) \quad -D_{T-t} + rS_t D_S + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 D_{SS} - rD = 0,$$

여기서 r 은 無危險 利率이며, 하첨자는 偏導函數를 나타낸다.

2.1. 유러피언 옵션

p.d.e.의 初期條件은 옵션의 形態에 따라 달라진다. 行市價格이 X 인 유러피언 풋옵션의 初期條件은 다음과 같다.

$$(2.3) \quad D(S_T, 0) = \max(0, X - S_T).$$

옵션가격이 만족해야 하는 p.d.e.와 초기조건의 解가 直交函數의 無限 線型結合으로 표현될 수 있다고 가정할 때, 처음 N_S 개만큼의 項을 이용하여 다음과 같이 近似式을 표현할 수 있다.

$$(2.4) \quad D(S, \tau) \doteq \sum_{n=0}^{N_S-1} b_{n,t} \phi_n(S).$$

여기서 $\tau = T - t$ 이며, $\{\phi_n\}$ 은 基底函數(basis function)이다. 자주 활용되는 기저함수로는 Chebyshev, Legendre, Hermite, Laguerre 多項式 등이 있으며, 解의 성격을 고려하여 기저함수를 선택하게 된다. Boyd(2001)에서 설명된 바와 같이, Chebyshev 다항식이 適用範圍가 넓으며, 여기서도 Chebyshev 多項式을 기저함수로 사용한다. 제1형태의 Chebyshev 多項式은 定義域 $[-1, 1]$ 에서 다음과 같이 정의된다.

$$(2.5) \quad P_n(x) = \cos[n \cdot \arccos(x)],$$

또는

$$(2.6) \quad P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x), n \geq 1.$$

우선 Chebyshev 다항식의 정의역 $[-1, 1]$ 을 옵션의 기초자산 가격의 變動範圍 $[S_1, S_2]$ 로 다음과 같이 轉換한다

$$(2.7) \quad x = \frac{2S - (S_1 + S_2)}{S_2 - S_1} \in [-1, 1].$$

위와 같이 정의역을 轉換하게 되면 p.d.e.는 다음과 같이 變換된다.

$$(2.8) \quad -D_{T-t} + rS \frac{2}{S_2 - S_1} D_x + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \left(\frac{2}{S_2 - S_1} \right)^2 D_{xx} - rD = 0.$$

그리고 옵션가격의 近似式은 다음과 같다.

$$(2.9) \quad D(x, \tau) = \sum_{n=0}^{N_S-1} b_{n,t} P_n(x).$$

근사식에서의 係數 $\{b_{n,t}\}$ 는 근사식을 p.d.e.에 代入한 후 N_S 개의 collocation points $\{x_n\}$ 에서 동 식의 값을 계산하여 얻어진 聯立方程式을 이용해 구하게 된다. Chebyshev 다항식에는 두 종류의 collocation points 集合이 알려져 있는데, 여기서는 Gauss-Lobato collocation points 集合을 선택하였다. 즉,

$$(2.10) \quad x_n = \cos\left(\frac{\pi n}{N_S - 1}\right), n = 0, \dots, N_S - 1.$$

連續時間 영역을 有限個의 細分된 시간영역으로 나눈 뒤 時點을 $T - \Delta t$ 에서 $t = 0$ 로 逆方向으로 이동하면서 각 시점별 옵션가격을 順次的으로 구하여 궁극적으로 현 시점에서의 옵션가격을 계산하게 된다. 구체적으로 시간영역 $[0, T]$ 을 구간크기가 Δt 로 동일한 N_T 개의 小區間으로 구분하면, 각 만기시점별 옵션가격은 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

$$(2.11) \quad 0 = -\frac{D[x, (m+1)\Delta t] - D(x, m\Delta t)}{\Delta t} + rS \frac{2}{\Delta S} D_x[x, (m+1)\Delta t] + \sigma^2 S^2 \frac{2}{(\Delta S)^2} D_{xx}[x, (m+1)\Delta t] - rD[x, (m+1)\Delta t].$$

여기서 $\Delta S = S_2 - S_1$ 이다. 마지막으로 옵션 기초자산 가격의 변동영역 $[S_1, S_2]$ 의 境界值에서 境界條件을 부여한다. 블랙-숄즈 모형에서 유리피인 풋옵션의 경우 境界條件은

$$(2.12) \quad \begin{aligned} D(S_1, \tau) &= X \exp(-r\tau) - S_1, \\ D(S_2, \tau) &= 0, \tau \in [0, T] \end{aligned}$$

이다. 行列式을 도출하기 위해 $(N_S \times N_S)$ 행렬 $P = [P_{ij}]_{ij}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$(2.13) \quad P_{ij} = P_{j-1}(x_{t-1}), i, j = 1, 2, \dots, N_S$$

그리고 1계 및 2계 導函數 행렬 $P^{(1)}, P^{(2)}$ 도 유사하게 정의된다. 또한, 對角行列 S 및 S^2 는 각각 $\{S_0, \dots, S_{N_S-1}\}$ 및 그 自乘값을 對角元素로 가지는 행렬이며, 여기서

$$(2.14) \quad S_i = \frac{(S_1 + S_2) + (S_2 - S_1)x_i}{2}, i = 0, 1, \dots, N_S - 1$$

이다. 시점 $t \in \{0, \Delta t, \dots, (N_T - 1)\Delta t\}$ 에서 N_S 개의 S 값에서의 옵션 近似값은 다음과 같이 표현된다.

$$(2.15) \quad [D(S_i, \tau)]_{i=0}^{N_S-1} = \left[\sum_{n=0}^{N_S-1} b_{n,t} P_n(x_i) \right]_{i=0}^{N_S-1} \equiv P b_t$$

계산의 效率性을 위해 p.d.e.를 다음과 같이 行列式으로 표현한다.

$$(2.16) \quad R_{t+\Delta t} = Q b_t,$$

여기서

$$(2.17) \quad R_{t+\Delta t} \equiv -(\Delta t)^{-1} \begin{bmatrix} D(x_0, \tau - \Delta t) \\ D(x_1, \tau - \Delta t) \\ \dots \\ D(x_{N_S-1}, \tau - \Delta t) \end{bmatrix},$$

$$Q \equiv -\left(r + \frac{1}{\Delta t}\right)P + \frac{2r}{\Delta S} SP^{(1)} + \frac{2\sigma^2}{(\Delta S)^2} S^2 P^{(2)},$$

$$b_t \equiv (b_{0,t}, \dots, b_{N_S-1,t})'$$

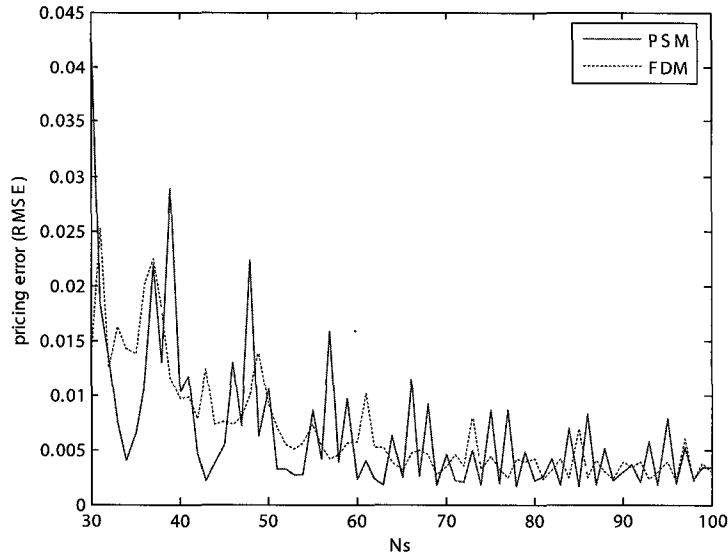
이다. 境界條件을 賦課하기 위해서는, 유러피언 풋옵션의 경우, 벡터 $R_{t+\Delta t}$ 의 처음 및 마지막 원소를 각각 $D(x_0, \tau) = 0$, 및 $D(x_{N_S-1}, \tau) = X \exp(-r\tau) - S_1$ 으로 代置시켜야 한다. 그리고 행렬 Q 의 처음 및 마지막 행도 행렬 P 의 처음 및 마지막 행과 같아지도록 변경되어야 한다. 滿期 바로 직전 시점 $t = (N_T - 1)\Delta t$ 에서 벡터 $R_{N_T\Delta t} = R_T$ 는 알려져 있으므로 식 (2.16)을 이용하여 $b_{(N_T-1)\Delta t}$ 를 구할 수 있다. 이제 한 시점 뒤로 이동하여 $t = (N_T - 2)\Delta t$ 에서 $R_{(N_T-1)\Delta t} = -Pb_{(N_T-1)\Delta t}/\Delta t$ 를 구한 뒤 $R_{(N_T-1)\Delta t} = Qb_{(N_T-2)\Delta t}$ 를 이용하여 $b_{(N_T-2)\Delta t}$ 를 구하게 된다. 이러한 過程을 反復하여 b_0 를 구하고 이를 이용하여 N_S 개의 기초자산 가격 $\{S_i\}$ 에서의 옵션의 近似값인 Pb_0 를 계산할 수 있다. 시점이 변하더라도 행렬 Q 는 변화가 없으며 벡터 R_t 의 마지막 원소만 변경하면 된다.

유사스펙트럼 방법과 유한차분 방법의 收斂速度를 比較하기 위해 N_S 를 30에서 100까지 1씩 증가시키면서 5가지 옵션(즉, $S/X \in (0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2)$)에 대해 옵션가격 計算誤差를 블랙-숄즈 가격공식을 이용하여 구하고 이로부터 平均誤差自乘의 平方根(RMSE: root-mean squared errors)을 산출하였다. 그 밖의 모형 파라미터는 $X = 100$, $r = 0.05$, $T = 0.5$, $\sigma = 0.3$, $N_T = 100$ 이다. 가격계산에서의 誤差가 <그림 1>에 나타나 있다. 두 방법 모두에서 誤差水準은 N_S 가 增加함에 따라 減少하였으나, 유사스펙트럼 방법에서의 오차가 유한차분방법에서의 오차보다 컸으며 N_S 의 변화에 따른 변동도 크게 나타났다. 이러한 결과는 이론에서의 예상과는 다른 것이다. 왜냐하면, 유한차분방법에서 近似解는 N_S^{-2} 의 速度로 收斂하나, 유사스펙트럼 방법에서는 幾何級數的으로(exponentially) 收斂하여 수렴 속도가 유사스펙트럼에서 더 빠르기 때문이다.⁽²⁾

한 시점에서의 옵션가격을 다음 시점에서의 옵션가격의 線型結合으로 나타낼 때의 加重值 $\{w_i\}$ 가 <그림 2>에 제시되었다.⁽³⁾ 그림에서 보이듯이, 유사스펙트럼 방법에서의 가중치는 유한차분 방법에서의 가중치에 비해 좀 더 分散되어 있으며, 부호도 꼬리부분에서 交代되는 모습을 보인다. 이러한 가중치의 특징과 만기시의 표준옵션의 가격함수가 꺾여 있다(kinked)는 점이 結合되어 유사스펙트럼 방법에 의한 옵션가격 계산결과의 計算誤差

(2) Wilmott et al.(1993) 또는 Tavella and Randall(2000) 참조.

(3) 옵션가격을 계산하는 행렬식으로부터 $b_t = Q^{-1}R_{t+\Delta t} = -(\Delta t)^{-1}Q^{-1}D_{t+\Delta t}$ 을 얻을 수 있고, 양변에 행렬 P 를 곱하여(pre multiply) $D_t = -(\Delta t)^{-1}PQ^{-1}D_{t+\Delta t}$ 을 얻을 수 있다.



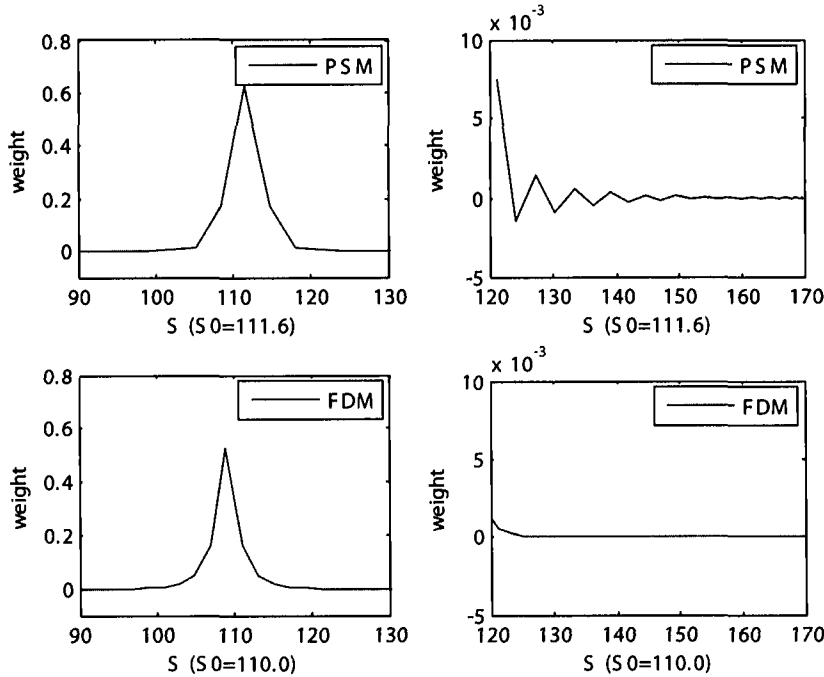
〈그림 1〉 類似스펙트럼 및 有限差分 方法에 依한 유러피안 풋옵션의 價格誤差: 블랙-숄즈 模型

패턴을 나타내고 있다고 판단된다. N_s 가 변화함에 따라 加重値와 加重値의 位置도 변화하게 되는데, 이러한 변화는 옵션 行市價格(X)을 중심으로 옵션가격이 급격히 변동하는 영역에서 옵션가격에 波動(oscillation)을 야기하게 된다.

이러한 현상은 binomial 方法에 의한 옵션가격 계산에서도 유사하게 나타난다. 이런 문제점을 緩和하기 위해 Broadie and Detemple(1996)은 꺾여진 滿期時의 옵션가격 대신에 만기에서 한 시점 앞선 시점에서 블랙-숄즈 공식에 의한 부드러운 옵션가격 曲線을 이용할 것을 제안하였다. 이 방법은 有限差分 方法뿐만 아니라 특히, 유사스펙트럼 方法에도 잘 적용이 될 수 있는 것으로 나타났다. 〈그림 3〉은 각 N_s 에서 그 N_s 보다 큰 모든 N_s 에 대해 價格計算誤差(RMSE)의 最大值를 나타내고 있다. Broadie and Detemple 方法을 적용한 결과 이론에서 예상한 대로 유사스펙트럼 方法이 有限差分 方法보다 더 빠른 收斂速度를 나타내었다.

2.2. 아메리칸 옵션

유러피언 옵션과는 달리 아메리칸 옵션에 대해서는, 簡單한 블랙-숄즈 모형에서조차도 價格公式가 아직까지 알려지지 않고 있다. 그러나 블랙-숄즈 모형에 대해서는 近似解를 구하는 方法이 많이 제시되었다. 예를 들면, Geske and Johnson(1984), MacMillan(1986),

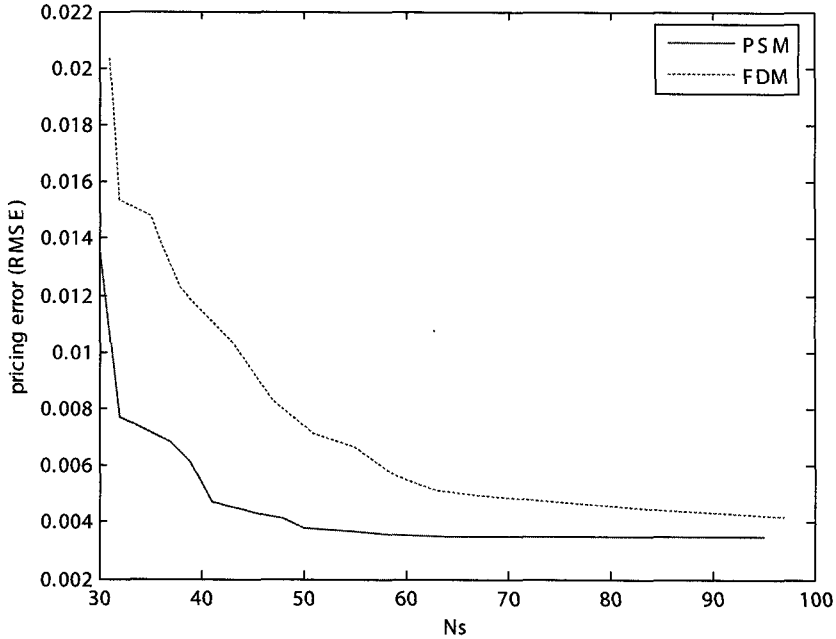


〈그림 2〉 類似스펙트럼 및 有限差分 方法에 依한 유러피안 풋옵션 價格計算에서의 加重值:
블랙-숄즈 模型

Broadie and Detemple(1996), 그리고 Ju(1998) 등이 그러한 예이다. 아메리칸 옵션가격의 數值的 計算은 Lattice나 유한차분 方法에서와 같이 유사스펙트럼 方法에서도 특별한 어려움 을 야기하지는 않는다. 滿期 이전 각 시점에서 옵션가격은 옵션解를 나타내는 벡터 Pb_t 와 옵션의 內在價値(intrinsic value) 중 큰 값을 취하는 과정을 새로이 추가함으로써 아메리칸 옵션가격을 계산할 수 있다. 〈그림 4〉는 1,000 time-step의 binomial lattice 方法에 의한 아메리칸 옵션가격을 기준으로 유사스펙트럼 方法 및 유한차분 方法에 의한 옵션가격 오차의 絶對值를 N_s 의 函數로 나타내고 있다.

3. 確率變動性 模型에서의 옵션價格 計算

Heston(1993)의 確率變動性(SV: stochastic volatility) 모형은 S_t 와 σ_t 를 狀態變數로 가지는 二要因(two-factor) 模型이다. 마팅게일 測度(measure) Q 하에서 기초자산가격의 動學



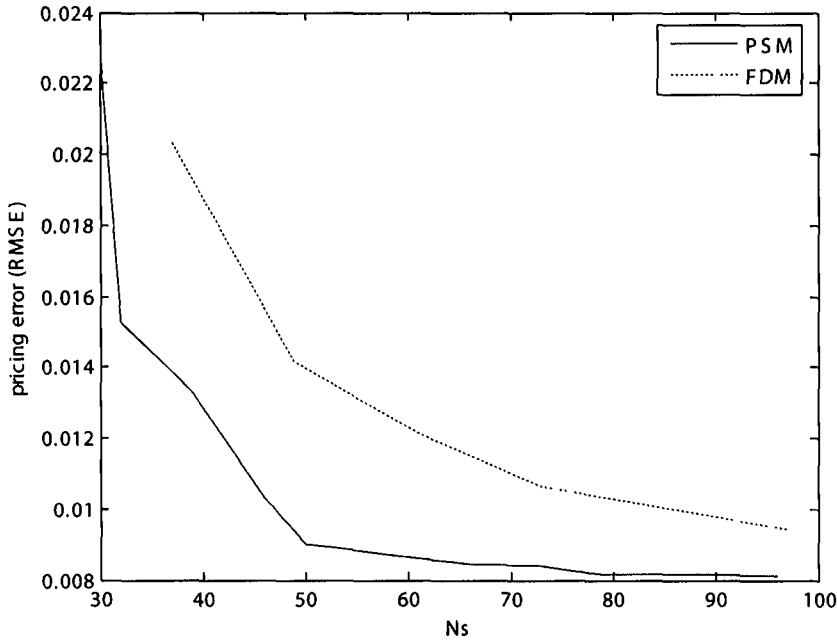
〈그림 3〉 類似스펙트럼 및 有限差分 方法에 依한 유러피안 풋옵션의 價格誤差:
블랙-숄즈 模型, Broadie-Detemple 方法을 適用

(dynamics)은 다음과 같이 정의된다.

$$(3.1) \quad \begin{aligned} dS_t/S_t &= rdt + \sigma_t dW_{1t}, \\ d\sigma_t^2 &= (\alpha - \beta\sigma_t^2) dt + \gamma\sigma_t(\rho dW_{1t} + \rho_2 dW_{2t}). \end{aligned}$$

여기서 $\rho_2 = (1 - \rho^2)^{1/2}$ 이며, $\{W_{jt}; j = 1, 2\}$ 는 獨立인 브라운 運動이다. 滿期가 T 인 옵션가 격은 다음과 같은 p.d.e.를 만족하게 된다.

$$(3.2) \quad \begin{aligned} 0 = & -D_\tau + rS_t D_S + \frac{\sigma_t^2}{2} S_t^2 D_{SS} + (\alpha - \beta\sigma_t^2) D_{\sigma^2} \\ & + \gamma^2 \frac{\sigma_t^2}{2} D_{\sigma^2\sigma^2} + \rho\gamma\sigma_t^2 S_t D_{\sigma^2 S} - rD. \end{aligned}$$



〈그림 4〉 類似스펙트럼 및 有限差分 方法에 의한 美國인 淸淸淸의 價格誤差:
블랙-숄즈 模型, Broadie-Detemple 方法을 適用

境界條件은 二次元 定義域의 네 極端에 대해 賦課된다. S_t 에 대해서는 블랙-숄즈 모형에서와 같다. 淸淸淸인 경우 모든 $\sigma_t^2 \in [0, \sigma_2^2]$ 및 $\tau \in [0, T]$ 에 대해 $D(S_1, \sigma_t^2, \tau) = X \exp(-r\tau) - S_1$, $D(S_2, \sigma_t^2, \tau) = 0$ 이다. 變動性에 대한 境界조건은 다소 不分明하다. 變動性이 매우 큰 수준에서는 淸淸淸가 變動性의 變化에 鈍感하다는 점을 반영하여 모든 $S_t \in [S_1, S_2]$ 및 $\tau \in [0, T]$ 에 대해 $D_{\sigma^2}(S, \sigma_t^2, \tau) = 0$ 이다. 그리고 p.d.e.에 $\sigma_t^2 = 0$ 을 代入함으로써 나머지 境界조건을 얻을 수 있다. 즉,

$$(3.3) \quad 0 = -D_\tau(S_p, 0, \tau) + rS_t D_S(S_p, 0, \tau) + \alpha D_{\sigma^2}(S_p, 0, \tau) - rD(S_p, 0, \tau).$$

一次元 基淸淸의 텐서積(tensor product)을 통해 多次元의 基淸淸를 얻을 수 있다. $D(S_p, \sigma_t^2, \tau) = D(x, y, \tau)$ 의 近似解는 식 (3.4)와 같이 표현된다.

$$(3.4) \quad \sum_{n_s=0}^{N_s-1} \sum_{n_\sigma=0}^{N_\sigma-1} b_{n_s n_\sigma t} P_{n_s}(x) P_{n_\sigma}(y) \equiv [P(y) \otimes P(x)] b_t.$$

여기서

$$(3.5) \quad \begin{aligned} x &= [2S_t - (S_1 + S_2)] / (S_2 - S_1), \\ y &= (2\sigma_t^2 - \sigma_2^2) / \sigma_2^2, \\ P(x) &= [P_0(x) \cdots P_{N_s-1}(x)], \\ P(y) &= [P_0(y) \cdots P_{N_\sigma-1}(y)] \end{aligned}$$

이며, b_t 는 $N_s N_\sigma$ 개의 원소를 가진 벡터이다.

변수 변환, p.d.e.의 행렬형태로의 표현 및 경계조건의 부과 등은 블랙-숄즈 모형에서와 같은 방식으로 이루어진다. 行列式은

$$(3.6) \quad R_{t+\Delta t} = Q b_t$$

이다. 여기서

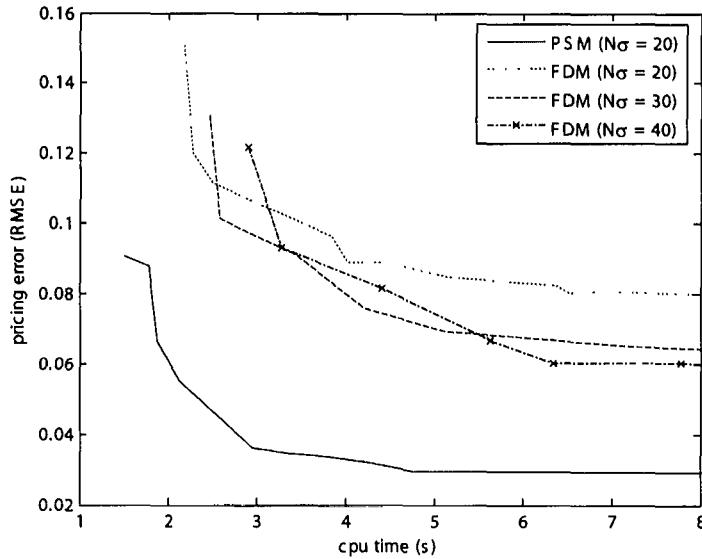
$$(3.7) \quad R_{t+\Delta t} \equiv -(\Delta t)^{-1} \begin{bmatrix} D(x_0, y_0, t-\Delta t) \\ \cdots \\ D(x_0, y_{N_\sigma-1}, \tau-\Delta t) \\ \cdots \\ D(x_{N_s-1}, y_0, \tau-\Delta t) \\ \cdots \\ D(x_{N_s-1}, y_{N_\sigma-1}, \tau-\Delta t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q &\equiv -\left(r + \frac{1}{\Delta t}\right) P_{XY} + \frac{2r}{\Delta S} (P_Y \otimes S P_X^{(1)}) + \frac{2\sigma^2}{(\Delta S)^2} (\Sigma P_Y \otimes S^2 P_X^{(2)}) \\ &\quad + \frac{2}{\sigma_2^2} [(\alpha I_{N_\sigma} - \beta \Sigma) P_Y^{(1)}] \otimes P_X + \frac{2}{\sigma_2^4} \gamma^2 (\Sigma P_Y^{(2)} \otimes P_X) \\ &\quad + \rho \gamma \frac{2}{\Delta S} \frac{2}{\sigma_2^2} (\Sigma P_Y^{(1)} \otimes S P_X^{(1)}), \\ b_t &\equiv (b_{0,t}, \cdots, b_{N_s-1,t})' \end{aligned}$$

이며, 그리고

$$\begin{aligned}
 (3.8) \quad & P_{XY} = P_Y \otimes P_X, P_{XY}^{(k,l)} = P_Y^{(l)} \otimes P_X^{(k)}, k, l = 0, 1, 2, \\
 & P_X^{(k)} = [P_{j-1}^{(k)}(x_{i-1})]_{i,j}, i, j = 1, \dots, N_S, \\
 & P_Y^{(l)} = [P_{j-1}^{(l)}(y_{i-1})]_{i,j}, i, j = 1, \dots, N_\sigma, \\
 & \Sigma = \text{diag}[\sigma_0^2, \dots, \sigma_{N_\sigma-1}^2].
 \end{aligned}$$

유사스펙트럼 방법과 유한차분 방법의 成果를 비교하기 위해 $S_0/X \in \{0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2\}$, $\sigma_0 \in \{0.1, 0.2, 0.3\}$ 으로 이루어진 15가지 유티피언 풋옵션의 가격공식으로부터 계산한 가격을 이용하여 誤差를 測定하였다. $\tau = T - t = 0.5, X = 100$ 이며, 여타 模型係數는 S&P 500 指數 資料를 이용하여 추정된 結果를 Eraker *et al.*(2003)에서 引用하여 사용하였다. <그림 5>는 유사스펙트럼 방법과 유한차분 방법에 각각 Broadie-Detemple 방법을 적용하여 각 방법의 正確度 및 計算時間을 나타내고 있다. 여기서 계산시간은 秒單位의 cpu 시간을 나타내며, 正確度는 해당 계산시간 및 그 이상의 시간을 사용하여 얻게 되는 RMSE의 最大값을 나타낸다. 유사스펙트럼 방법에서는 $N_\sigma = 20$ 으로 固定시키고, 유한차분 방법에서는 $N_\sigma \in \{20, 30, 40\}$ 에 대해 각각 N_S 를 變化시키면서 計算速度 및 正確度



<그림 5> 類似스펙트럼 및 有限差分 方法에 依한 유티피언 풋옵션의 計算時間 및 價格誤差: 確率變動性 模型, Broadie-Detemple 方法을 適用

推移를 나타내었다. 비교를 가급적 公正하게 하기 위해 유한차분 方法을 실제 具現하는데 가능한 여러 方法을 적용하였으며, 그 중 가장 좋은 결과만을 비교의 대상으로 삼았다.⁽⁴⁾ 두 方法 모두에서 計算시간은 블랙-숄즈 모형에서보다 더 많이 걸렸으나, 유사스펙트럼 方法이 유한차분 方法보다 더욱 效率的이었다. 유사스펙트럼 方法은 동일한 計算시간에 대해 유한차분 方法보다 두세 배 正確한 結果를 산출하였다.

價格公式이나 效率的인 近似式이 아직 알려지지 않고 있는 아메리칸 옵션의 價格 計算에도 유사스펙트럼 方法이 잘 적용될 수 있음을 강조하고 싶다.

4. 점프를 가진 確率變動性 模型에서의 옵션價格 計算

Merton(1976)은 옵션가격 모형에 처음으로 점프 過程을 導入하였으며, Bates(1996)와 Scott(1997)은 점프過程과 確率的 變動性을 結合하였다. 최근들어 Duffie *et al.*(2000)은 옵션의 基礎資產뿐만 아니라 變動性에도 점프過程을 導入한 模型을 제안하였으며, Eraker *et al.*(2003)은 기초자산 價格 및 변동성에서 점프과정의 필요하다는 經驗的 證據를 제시하였다. 점프 과정을 도입하게 되면 p.d.e.는 p.i.d.e.로 되어 數值的 解를 얻기가 더욱 어려워진다. 그러나 유사스펙트럼 方法에서는 비교적 용이하게 이러한 복잡함을 해결할 수 있다. 여기서는 Bates의 基礎資產 價格에만 점프를 가진 確率變動性 模型만을 살펴볼 예정이다, 점프 과정이 변동성에도 포함된 경우로 확장하는 것은 크게 어렵지 않을 것이다.

基礎資產 價格은 마팅게일 측도 \mathcal{Q} 하에서 다음과 같은 動學을 따른다.

$$(4.1) \quad dS_t = (r - \theta v)S_t dt + \sigma_t S_t dW_t + S_t - U dJ_t.$$

여기서 $\{W_t\}_{t \geq 0}$ 과 $\{J_t\}_{t \geq 0}$ 는 독립인 위너(Wiener) 및 포아송(θ) 過程이다. 만일 $J_t > 0$ 이면, $[0, t]$ 동안 基礎資產 價格에 比例的인, 크기가 $\{U_j; j = 1, \dots, J_t\}$ 인 점프가 나타남을 의미한다. 확률변수 U 는 W 및 J 와 獨立이며, $\log(1 + U) \sim \text{i.i.d.N}[\log(1 + v) - \xi^2/2, \xi^2]$ 로 가정한다. 마팅게일 測度 \mathcal{Q} 하에서 $\{D(S_t, \sigma_t^2, \tau)/M_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 이 마팅게일이라는 조건으로부터 식 (4.2)의 p.i.d.e.를 導出할 수 있다.⁽⁵⁾

(4) 유한차분 方法을 실제로 구현하기 위해 Matlab6.5 및 Fortran95에서 sparse matrix specification 과 LU decomposition을 사용한 direct method, Fortran95에서 ITPACK, NSPCG, SPARSKIT 등 여러 package를 이용하여 iterative methods를 적용하였다. 그중 SPARSKIT을 사용한 iterative methods가 가장 성과가 우수하여, 그 결과를 비교의 대상으로 하였다.

(5) 여기서 M_t 는 money fund의 가치이다.

$$\begin{aligned}
 (4.2) \quad 0 = & -D_\tau + (r - \theta v - \frac{\sigma_t^2}{2})D_s + \frac{\sigma_t^2}{2}D_{ss} + (\alpha - \beta\sigma_t^2)D_{\sigma^2} \\
 & + \gamma^2 \frac{\sigma_t^2}{2}D_{\sigma^2\sigma^2} + \rho\gamma\sigma_t^2 D_{\sigma^2s} - rD \\
 & + \theta(E[D(s_t + u, \sigma_t^2, \tau)] - D(s_t, \sigma_t^2, \tau)).
 \end{aligned}$$

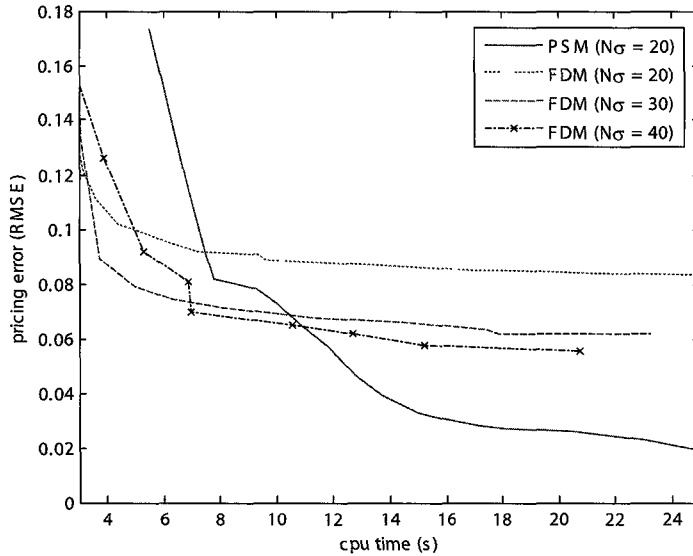
여기서 $s_t = \log(S_t)$, $u = \log(1 + U)$ 이다.

確率變動性 模型에서와 같이 옵션가격 $D(s_t, \sigma_t^2, \tau)$ 은 $(s_t, \sigma_t^2, \tau) \in [s_1, s_2] \times [0, \sigma_2^2]$ 에서 Chebyshev 多項式으로 近似되어야 하나, p.i.d.e.에서 기댓값을 포함한 항을 계산하기 위해서는 옵션가격 D 가 모든 $s_t \in R$ 에서 定義되어야 한다. 옵션가격 함수를 s_t 에 대해 아래와 같이 정의한다.

$$(4.3) \quad D(s_t, \sigma_t^2, \tau) = \begin{cases} X \exp(-r\tau), & s_t < s_1 \\ \sum_{n_x=0}^{N_x-1} \sum_{n_\sigma=0}^{N_\sigma-1} b_{n_x, n_\sigma, t} P_{n_x}(x) P_{n_\sigma}(y), & s_t \in [s_1, s_2] \\ 0, & s_t > s_2. \end{cases}$$

여기서 $x = (2s - s_1 - s_2)/(s_2 - s_1)$ 이며, $y = (2\sigma_t^2 - \sigma_2^2)/\sigma_2^2$ 이다. Gaussian quadrature를 사용하면 기댓값을 포함하는 항을 옵션가격의 加重量으로 표현할 수 있다. 만일 $s_t = s_k$ 이고 그에 대응하는 collocation point가 x_k 라면 quadrature에 의한 기댓값항의 近似값은

$$\begin{aligned}
 (4.4) \quad & \sum_{i=1}^I w_i D(s_k + u_i, \sigma_t^2, \tau) \\
 & = \sum_{i \in F} w_i \sum_{n_x=0}^{N_x-1} \sum_{n_\sigma=0}^{N_\sigma-1} b_{n_x, n_\sigma, t} P_{n_x}(x_k + v_i) P_{n_\sigma}(y) \phi(u_i) \\
 & \quad + \sum_{i \in G} w_i (X e^{-r\tau} - e^{s_k + u_i}) \phi(u_i) \\
 & = (\sum_{i \in F} w_i P_Y \otimes P_X(x_k + v_i) \phi(u_i)) b_t \\
 & \quad + \sum_{i \in G} w_i (X e^{-r\tau} - e^{s_k + u_i}) \phi(u_i) \\
 & \equiv Q(x_k) b_t + q_t(x_k).
 \end{aligned}$$



〈그림 6〉 類似스펙트럼 및 有限差分 方法에 依한 유러피안 옵션의 計算時間 및 價格誤差:
 점프 過程을 包含한 確率變動性 模型, Broadie-Detemple 方法을 適用

여기서 $v = 2u(s_2 - s_1)$, $\phi(u)$ 는 確率變數 u 의 p.d.f., 指數集合 F 와 G 는 $F = \{i : s_k + u_i \in [s_1, s_2]\}$, $G = \{i : s_k + u_i < s_1\}$ 로 정의된다. 식 (4.4)에서 行列 Q 는 時點에 관계없이 일정하나 scalar q_i 는 時點에 따라 변한다는 점에 留意할 需要가 있다.

確率變動性 模型에서와 같이 두 方法을 利用하여 算出한 15개 유러피안 옵션의 價格을 價格公式을 利用한 價格과 比較하여 價格誤差와 計算時間을 比較하였다. 〈그림 6〉은 計算時間과 正確度 間의 trade-off 關係를 보여 준다. 그림에서 보이듯이 유사스펙트럼 方法은 높은 正確도가 需要한 영역에서 유한차분 方法에 比해 效率的인 것으로 나타났으며, 正確도가 향상되는 程度도 작지 않은 것으로 나타났다. 예를 들면, cpu 시간이 15秒인 경우 유사스펙트럼 方法은 유한차분 方法에 比해 두세 배 正確한 結果를 算出하였다.⁽⁶⁾

(6) 기댓값항이 없는 경우에는 유한차분 방법은 p.d.e.를 sparse 계수행렬을 가지는 선형 연립방정식 체계로 전환하여 근사해를 구하게 된다. 그리고 sparse 계수행렬은 여러 효율적인 수치해석적 알고리즘을 사용할 수 있게 해준다. 그러나 기댓값항이 존재하는 경우에는 계수행렬이 조밀(dense)해져서 선형 연립방정식을 풀 때 더 많은 계산비용이 필요하게 된다. 만일 점프 과정이 기초자산뿐만 아니라 변동성에도 포함되면 계수행렬은 더욱 조밀하게 되고 계산비용은 더욱 커지게 된다.

5. 結 論

類似스펙트럼 방법은 直交多項式인 基底函數의 線型結合으로 p.d.e.의 近似解를 나타낸다. 이 방법은 物理學이나 工學에서는 널리 사용되어 왔으나, 財務學 분야에서는 아직 널리 사용되지 않아 왔다. 이 논문에서는 옵션價格 公式이 아직 존재하지 않는 옵션가격의 계산 문제에서 유사스펙트럼 방법이 通常的인 옵션가격 計算方法에 비해 效率的임을 보였다. 옵션의 기초자산 가격이 確率變動性을 가지거나 점프 過程이 結合된 경우 裁定去來(arbitrage)가 存在하지 않는다는 조건에서 도출되는 p.d.e. 또는 p.i.d.e.를 유사스펙트럼 접근법내에서 다루는 방법을 개발하였다. 특히, 점프 과정이 도입될 때 나타나는 p.i.d.e.를 다루기 위해 quadrature 방법을 활용하였다. 有限差分 방법과 같이 유사스펙트럼 방법도 아메리칸 옵션이나 여타 經路依存的인 옵션의 가격계산에 활용될 수 있다. 그리고 계산시간과 정확도를 기준으로 볼 때 유사스펙트럼 방법이 유한차분 방법보다 효율적임을 밝혔다.

계산방법을 선택할 때 計算時間과 正確度 이외에도 많은 要因을 考慮할 수 있다. Canuto *et al.*(1988)와 Boyd(2001)은 유사스펙트럼 방법에 의한 解의 收斂性和 安定性 등 이론적 측면을 다루고 있다. 실제 具現하는 측면에서 볼 때 프로그래밍 노력은 양 방법이 비슷할 것으로 판단된다. Suh(2005)는 잘 알려진 여러 異色옵션(exotic options)에 대해 유사스펙트럼 방법을 적용하여 동 방법이 여러 옵션가격 계산문제에 應用될 수 있는지를 點檢하고 있다.

韓國銀行 金融經濟研究員 課長

100-794 서울특별시 중구 남대문로 3가 110

전화: (02)759-5411

팩스: (02)759-5410

E-mail: swsuh@bok.or.kr

參 考 文 獻

Bakshi, G., C. Cao, and Z. Chen(1997): "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models," *Journal of Finance*, 52, 2003-2049.

- Bates, D. S.(1996): “Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Processes Implicit in Deutschemark Options,” *Review of Financial Studies*, **9**, 69-108.
- _____(2000): “Post - ’87 Crash Fears in S&P 500 Futures Options,” *Journal of Econometrics*, **94**, 181-238.
- Black, F., and M. Scholes(1973): “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*, **81**, 637-654.
- Boyd, J. P.(2001): *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, New York, Dover.
- Broadie, M., and J. Detemple(1996): “American Option Valuation: New Bounds, Approximations, and a Comparison of Existing Methods,” *Review of Financial Studies*, **9**, 211-1250.
- Canuto, C., M. Hussaini, A. Quarteroni, and T. Zang(1988): *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, New York, Springer-Verlag,
- Duffie, D., J. Pan, and K. Singleton(2000): “Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-diffusions,” *Econometrica*, **68**, 1343-1376.
- Eraker, B., M. Johannes, and N. Polson(2003): “The Impact of Jumps in Volatility and Returns,” *Journal of Finance*, **58**, 1269-1300.
- Geske, R., and H. Johnson(1984): “The American Put Option Valued Analytically,” *Journal of Finance*, **39**, 1511-1554.
- Heston, S.(1993): “A Closed-form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options,” *Review of Financial Studies*, **6**, 327-343.
- Ju, N.(1998): “Pricing an American Option by Approximating Its Early Exercise Boundary as a Multipiece Exponential Function,” *Review of Financial Studies*, **11**, 627-646.
- MacMillan, L. W.(1986): “Analytic Approximation for the American Put Option,” *Advances in Futures and Options Research*, **1**, 119-139.
- Merton, R. C.(1976): “Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous,” *Journal of Financial Economics*, **3**, 125-144.
- Scott, L.(1997): “Pricing Stock Options in a Jumpdiffusion Model with Stochastic Volatility and Interest Rates: Applications of Fourier Inversion Methods,” *Mathematical Finance*, **7**, 413-424.
- Suh, S.(2005): “Orthogonal Polynomials in Option Pricing by the p.d.e. and Martingale Approaches,” Ph. D. Dissertation, University of Virginia.

Tavella, D., and C. Randall(2000): *Pricing Financial Instruments: The Finite Difference Method*, John Wiley and Sons.

Wilmott, P., J. Dewynne, and S. Howison(1993): *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*, Oxford, UK, Oxford Financial Press.