# 3變數 利子率 期間 構造 模型(1)

安 炯 賢

이 논문은 Longstaff & Schwartz(1992)의 모형을 확장한 것으로 短期利子率의 平均回歸를 세 번째 요소로 추가하였다. 이 모형은 기존의 세 요소 모형과 비교할 때 두 가지 방면에서 현저히 구분된다. 첫째, 위험프리미엄에 대한 설정은 Cox-Ingersoll-Ross의 균형 모형에 의해 뒷받침되며 둘째, 비록 세 요소 사이에 相關關係가 존재하는 것을 허용할지라도 債券價格 및 債券옵션價格에 대한 닫힌 꼴의 解(closed form solution)를 도출할 수 있다. 이러한 일반적인 특성에 대한 가정하에서 이 모형은 Litterman & Scheinkman(1991), 그리고 Balduzzi, Das, & Foresi(1993) 등의 채권기대수익률의 기간구조의 특성을 포괄할 수 있다.

## 1. 模 型

이 장에서는 삼 요소 Longstaff & Schwartz 모형을 유도한다. 이와 관련한 핵심기법은 관측할 수 없는 상태변수들에 의해 생성할 수 있는 공간과 같은 공간을 생성할 수 있는 관측 가능한 상태변수들로 변형시키는 것이다.

경제를 확률공간 $(\Omega, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P})$로 나타내자. 이 때 $\boldsymbol{F} = \{\mathcal{F}\}_{0 \le t \le T}$이다. 우선 價格決定函數(pricing kernel) $M(t, T)$에 대해 정의를 내리면

$$S(t) = E^{\mathbb{P}}[M(t, T)S(T)|F_t] \tag{1.1}$$

이고, 여기서 $S(t)$는 자산의 가격을 나타내며 $S(t, w)$: $[0, \infty) \times \Omega \to \boldsymbol{R}^{+}$이다.

完全市場을 가정하면 Harrison & Kreps(1979)가 증명한 바와 같이 각각의 시장에 代表的인 行爲者(representative agent)가 존재한다. 이 대표적인 행위자가 로그효용함수 및 확률적 규모수익불변 생산함수를 갖고 있다고 가정하면 아래의 確率微分方程式을 적을 수 있다.

$$\frac{dq(t)}{q(t)} = (\delta_1 f_1(t) + \delta_2 f_2(t) + \delta_3 f_3(t))dt \tag{1.2}$$

(1) 이 논문은 서울대학교 신임교수 연구 정착금의 지원을 받아 이루어졌다.

$$+\sigma_1\sqrt{f_1(t)}d\omega_1(t)+\sigma_2\sqrt{f_2(t)}d\omega_2(t)+\sigma_3\sqrt{f_3(t)}d\omega_3(t)$$

여기서 $\{f_i(t)\}, i=1,2,3$은 경제의 생산과정에 영향을 주는 세 요소의 집합이다.

세 요소들은 Cox, Ingersoll, & Ross(1985b)에서와 같이 각각 제곱根過程(square-root process)을 따른다고 가정한다.

$$df_i(t)=(v_i+\varphi_i f_i(t))dt+s_1\sqrt{f_i(t)}dz_i(t) \quad \forall i=1,2,3. \tag{1.3}$$

$\underline{w}=(w_1(t)\ w_2(t)\ w_3(t))^\top$, $\underline{z}=(z_3(t)\ z_3(t)\ z_3(t))^\top$이라고 표시하고 그 相關關係는 다음과 같다.

$$Corr(d\underline{w},d\underline{z})=\begin{pmatrix}1&0&0&\rho_1&0&0\\0&1&0&0&\rho_2&0\\0&0&1&0&0&\rho_3\\\rho_1&0&0&1&0&0\\0&\rho_2&0&0&1&0\\0&0&\rho_3&0&0&1\end{pmatrix} \tag{1.4}$$

위의 가정하에 우리는 價格決定函數(pricing kernel)를 유도할 수 있다.

$$M(t,T)=\phi\exp\left[-\int_t^T[\sigma_1\sqrt{f_1(s)}dw_1(s)+\sigma_2\sqrt{f_2(s)}dw_2(s)+\sigma_3\sqrt{f_3(s)}dw_3(s)]\right]$$
$$=\exp\left[-\int_t^T\{\delta_1f_1(s)+\delta_2f_2(s)+\delta_3f_3(s)-\frac{1}{2}[\sigma_1^2f_1(s)+\sigma_2^2f_2(s)+\sigma_3^2f_3(s)]\}ds\right]$$

이토의 補助定理(Ito's lemma)로부터 우리는 價格決定函數(pricing kernel)의 確率微分方程式(Stochastic Differential Equation)을 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{dM(0,t)}{dM(0,t)}=[(\sigma_1^2-\delta_1)f_1(t)+(\sigma_2^2-\delta_2)f_2(t)+(\sigma_3^2-\delta_3)f_3(t)]dt \tag{1.5}$$
$$-\sigma_1\sqrt{f_1(t)}dw_1(t)-\sigma_2\sqrt{f_2(t)}dw_2(t)-\sigma_3\sqrt{f_3(t)}dw_3(t)$$

完全市場을 가정하면 유일한 마팅게일 측도 $Q$가 존재하여 원래의 측도 $\boldsymbol{P}$와 동일한 공집합을 공유한다. 새로운 확률측도 $Q$하에서 할인채권가격 대비 자산 가격은 마팅게일을 따른다.

$$\frac{S(t)}{B(t)} = E^Q\left[\frac{S(T)}{B(T)}\right] = E^P\left[\frac{dQ}{dP}\frac{S(T)}{B(T)}\right]$$

여기서 할인채권가격은 아래와 같다.

$$B(t) = \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)$$

$r(s)$는 국소적 무위험이자율을 나타낸다. $\frac{dQ}{dP}$는 Radon-Nikodym 도함수 혹은 危險中立密度 過程(risk neutral density process)을 나타내며 아래와 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}\Psi(t,T) &\equiv \frac{dQ}{dP} \\ &= \exp\left(-\int_t^T \eta(s)^\top d\underline{w}(s) - \frac{1}{2}\int_t^T \eta(s)^\top \eta(s)ds\right)\end{aligned}$$

여기서 $\eta(s)$는 價格決定函數(pricing kernel)의 위험 프리미엄을 나타내는 $(3\times1)$ 벡터다. 그러면 우리는 식 (1.5)를 아래와 같이 변형할 수 있다.

$$\begin{aligned}S(t) &= E_t^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)S(T)\right] \\ &= E_t^P\left[\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)\Psi(t,T)S(T)\right] \\ &= E_t^P\left[\exp\left(-\int_t^T \eta(t)^\top d\underline{w} - \int_t^T\left(r(s) + \frac{1}{2}\eta(s)^\top \eta(s)\right)ds\right)S(T)\right].\end{aligned}$$

완전시장 가정하에 價格決定函數(pricing kernel)는 반드시 유일해야 한다. (이는 동치마팅게일측도(equivalent martingale measure)의 유일성에 의해 결정된다.)

$$M(t,T)=\exp\left(-\int_t^T \eta(s)^\top d\underline{w}(s)-\int_t^T\left(r(s)+\frac{1}{2}\eta(s)^\top\eta(s)\right)ds\right)$$

이토의 補助定理(Ito's lemma)에 따라 다시 確率微分方程式을 적으면 아래와 같다.

(1.6)
$$\frac{dM(0,t)}{M(0,t)}=-r(t)dt-\eta(t)^\top d\underline{w}(t)$$

식 (1.5)와 식 (1.6)으로부터 우리는 아래의 관계식을 세울 수 있다.

(1.7)
$$r(t)=(\delta_1-\sigma_1^2)f_1(t)+(\delta_2-\sigma_2^2)f_2(t)+(\delta_3-\sigma_3^2)f_3(t)$$

(1.8)
$$\eta(t)=\left(\sigma_1\sqrt{f_1(t)}\ \ \sigma_2\sqrt{f_2(t)}\ \ \sigma_3\sqrt{f_3(t)}\right)^\top$$

Longstaff & Schwartz와 마찬가지로 아래에서 상태함수들의 擴散母數(diffusion parameter)가 1이 되도록 標準化하였다. 표준화를 하기 위해 각 상태변수들을 자체의 擴散母數(diffusion parameter)로 나누게 된다.

$$x=\frac{f_1(t)}{s_1^2},\quad y=\frac{f_2(t)}{s_2^2},\quad z=\frac{f_3(t)}{s_3^2}.$$

이렇게 표준화된 상태변수들은 아래와 같은 確率微分方程式을 가진다.

$$dx(t)=(\theta_y-\kappa_x x(t))dt+\sqrt{x(t)}dz_1(t)$$
$$dy(t)=(\theta_y-\kappa_y y(t))dt+\sqrt{y(t)}dz_2(t)$$
$$dz(t)=(\theta_z-\kappa_z z(t))dt+\sqrt{z(t)}dz_3(t)$$

각 요소의 위험프리미엄을 아래와 같이 정의하자.

$$\phi_x(t)=\lambda_x x(t),\quad \phi_y(t)=\lambda_y y(t),\quad \phi_z(t)=\lambda_z z(t).$$

이 때,

$$\lambda_x = \rho_1\sigma_1, \quad \lambda_y = \rho_2\sigma_2, \quad \lambda_z = \rho_3\sigma_3$$

이며, 따라서 위험중립측도 $Q$하에서 요소들의 확률미분방정식은 다음과 같다.

$$dx(t) = [\theta_x - (\kappa_x + \lambda_x)x(t)]dt + \sqrt{x(t)}d\tilde{z}_1(t)$$

$$dy(t) = [\theta_y - (\kappa_y + \lambda_y)y(t)]dt + \sqrt{y(t)}d\tilde{z}_2(t)$$

$$dz(t) = [\theta_z - (\kappa_z + \lambda_z)z(t)]dt + \sqrt{z(t)}d\tilde{z}_3(t)$$

여기서 $\tilde{z}_1(t) = z_1(t) + \int_0^t \lambda_x \sqrt{x(s)}ds$이고 $\tilde{z}_2(t)$와 $\tilde{z}_3(t)$도 마찬가지로 정의할 수 있다. 아래 변수에 대해 정의를 내리면

$$\varphi_x = \kappa_x + \lambda_x, \quad \varphi_y = \kappa_y + \lambda_y, \quad \varphi_z = \kappa_z + \lambda_z$$

이고, 여기서 $\kappa_i$는 $\boldsymbol{P}$ 측도하에서의 平均回歸 母數들(mean-reversion parameter)이며 $\varphi_i$는 $Q$ 측도하에서의 평균회귀 모수들이다. 또 아래의 모수들에 대해 정의를 내리자.

$$\alpha_x = (\delta_1 - \sigma_1^2)s_1^2, \quad \alpha_y = (\delta_2 - \sigma_2^2)s_2^2, \quad \alpha_z = (\delta_3 - \sigma_3^2)s_3^2.$$

만기일이 $(t+\tau)$인 채권의 가격 $P(t, t+\tau)$는 價格決定函數(pricing kernel) $M(t, T)$의 조건부 기대값이며 이로부터 아래의 偏微分方程式(partial differential equation)을 적을 수 있다.

$$\frac{1}{2}(xP_{xx} + yP_{yy} + xP_{zz}) + (\theta_x - \varphi_x x)P_x + (\theta_y - \varphi_y y)P_y + (\theta_z - \varphi_z z)P_z - rP + P_t = 0$$

다른 한 방면으로 이토의 補助定理(Ito's lemma)에 의하여 우리는 단기이자율의 확률미분방정식을 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$dr(t) = (\Pi - \Theta)dt + \sqrt{\frac{\alpha_x}{D}\{(\alpha_z\kappa_y - \alpha_y\kappa_z)r(t) + (\kappa_z - \kappa_y)V(t) - (\alpha_z - \alpha_y)\Theta(t)\}}d\tilde{z}_1$$
$$+ \sqrt{\frac{\alpha_y}{D}\{(\alpha_x\kappa_z - \alpha_z\kappa_x)r(t) + (\kappa_x - \kappa_z)V(t) - (\alpha_x - \alpha_z)\Theta(t)\}}d\tilde{z}_2$$

$$+\sqrt{\frac{\alpha_z}{D}\{(\alpha_y\kappa_x-\alpha_x\kappa_y)r(t)+(\kappa_y-\kappa_x)V(t)-(\alpha_y-\alpha_x)\Theta(t)\}}d\tilde{z}_3$$

$$\Pi=\alpha_x\theta_x+\alpha_y\theta_y+\alpha_z\theta_z$$

$$D=(\alpha_z-\alpha_y)\kappa_x+(\alpha_x-\alpha_z)\kappa_y+(\alpha_y-\alpha_z)\kappa_z$$

여기서 우리는 세 개의 요소를 아래와 같이 정의하였다.

$$r(t)=\alpha_x x(t)+\alpha_y y(t)+\alpha_z z(t)$$

$$V(t)=\alpha_x^2 x(t)+\alpha_y^2 y(t)+\alpha_z^2 z(t)$$

$$\Theta(t)=\alpha_x\kappa_x x(t)+\alpha_y\kappa_y y(t)+\alpha_z\kappa_z z(t)$$

$r(t)$의 변동성이 $V(t)$임은 간단하게 증명할 수 있다. 따라서 우리는 관측 불가능한 변수들인 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$를 관측 가능한 혹은 원칙상 예측 가능한 변수들로 변형하였으며, 여기서 $\Theta(t)$는 단기이자율의 기대변화값을 결정하는 요소다. 이 요소는 이자율의 기대변화의 확률적 움직임에 영향을 미치는 주요한 요소라는 점에서 Balduzzi, Das, & Foresi(1993), Chen(1995)의 장기평균이자율, 그리고 Balduzzi, Das, & Foresi(1994)의 中心傾向(central tendency)과 유사하다. 그러나 이 요소는 장기평균보다 평균회귀와 연계된다. 만일 $\Theta(t)$가 $\Pi$보다 작으면 이자율이 오를 것을 예측할 수 있거나 그 반대이다.

따라서 이 요소는 경제사회에서 보편적으로 형성된 이자율에 대한 조건부 기대값을 결집시킨 것이다. 그 반면 $V(t)$는 利子率의 擴散 母數(diffusion parameter)이며 다가오는 충격에 대한 이자율의 민감도에 대한 척도이다.

이론적으로 채권수익률의 기간구조모형에서 세 개 狀態變數들이 아니라 두 개 狀態變數들이 존재한다면 임의의 두 요소는 남은 한 개 요소를 확장할 수 있다. 마찬가지로 오직 한 개 상태변수만 존재한다면 세 개 요소들은 서로 확장할 수 있다. 이는 나중에 요소의 개수를 식별함에 있어서 실증분석 도구를 제공한다.

우리는 모형에서의 세 요소들의 동태가 서로 의존함을 간단하게 알아볼 수 있다. 이는 우리 모델이 Balduzzi, Das, & Foresi(1993)의 논문에 비하여 가지고 있는 특별한 강점이다. $r(t)$, $V(t)$, 및 $\Theta(t)$는 結合 마르코프 過程(joint Markov Process)을 따른다.

무위험이자율은 0부터 무한대까지의 값을 가질 수 있으며 장기에 가서 定常分布(stationary distribution)을 가지며 그 平均과 分散은 다음과 같다.

$$E(r)=\frac{\alpha_x\theta_x}{\kappa_x}+\frac{\alpha_y\theta_y}{\kappa_y}+\frac{\alpha_z\theta_z}{\kappa_z},\quad Var(r)=\frac{\alpha_x^2\theta_x}{2\kappa_x^2}+\frac{\alpha_y^2\theta_y}{2\kappa_y^2}+\frac{\alpha_z^2\theta_z}{2\kappa_z^2}.$$

이자율의 이러한 定常密度(stationary density)는 서로 독립인 세 개 감마分布(Gamma distribution)을 따르는 변수들의 선형결합의 밀도와 일치한 것이다.

비슷한 분석을 통하여 우리는 $V(t)$와 $\Theta(t)$도 임의의 양의 값을 가진다는 것을 알 수 있다. 이 요소들도 서로 독립인 세 개 감마분포를 따르는 변수들의 선형결합의 밀도와 일치한 정상밀도를 가진다. Longstaff & Schwartz에서 $\Theta(t)$는 $r(t)$와 $V(t)$의 선형함수인 반면 이 논문에서 $\Theta(t)$는 원래의 상태변수들이 양의 값을 가져야 하는 조건을 만족시키는 어떠한 값도 가질 수 있다. $V(t)$와 $\Theta(t)$는 다음과 같은 平均들과 分散들을 가진다.

$$E(V)=\frac{\alpha_x^2\theta_x}{\kappa_x}+\frac{\alpha_y^2\theta_y}{\kappa_y}+\frac{\alpha_z^2\theta_z}{\kappa_z},\quad Var(V)=\frac{\alpha_x^4\theta_x}{2\kappa_x^2}+\frac{\alpha_y^4\theta_y}{2\kappa_y^2}+\frac{\alpha_z^4\theta_z}{2\kappa_z^2}$$

$$E(\Theta)=\alpha_x\theta_x+\alpha_y\theta_y+\alpha_z\theta_z,\quad Var(\Theta)=\frac{\alpha_x^2\theta_x}{2}+\frac{\alpha_t^2\theta_y}{2}+\frac{\alpha_z^2\theta_z}{2}$$

## 2. 債券價格

債券價格에 대한 偏微分方程式을 풀고 요소들의 函數로 표현하면 아래의 식을 도출할 수 있다.

$$P(t,t+\tau)=A_x(\tau)^{2\theta_x}A_y(\tau)^{2\theta_y}A_x(\tau)^{2\theta_z}\exp[B(\tau)\tau-C(\tau)r(t)-F(\tau)V(t)-G(\tau)\Theta(t)]$$

$$A_x(\tau)=\frac{2\gamma_x}{(\varphi_x+\gamma_x)(e^{\gamma_x\tau}-1)+2\gamma_x}$$

$$A_y(\tau)=\frac{2\gamma_y}{(\varphi_y+\gamma_y)(e^{\gamma_y\tau}-1)+2\gamma_y}$$

$$A_z(\tau)=\frac{2\gamma_z}{(\varphi_z+\gamma_z)(e^{\gamma_z\tau}-1)+2\gamma_z}$$

$$B(\tau)=\theta_x(\varphi_x+\gamma_x)+\theta_y(\varphi_y+\gamma_y)+\theta_z(\varphi_z+\gamma_z)$$

$$C(\tau)=A_x(\tau)(e^{\gamma_x\tau}-1)\frac{\alpha_y\kappa_z-\alpha_z\kappa_y}{\gamma_x D}+A_y(\tau)(e^{\gamma_y\tau}-1)\frac{\alpha_z\kappa_x-\alpha_x\kappa_z}{\gamma_y D}$$
$$+A_z(\tau)(e^{\gamma_z\tau}-1)\frac{\alpha_x\kappa_y-\alpha_y\kappa_x}{\gamma_z D}$$
$$F(\tau)=A_x(\tau)(e^{\gamma_x\tau}-1)\frac{\kappa_y-\kappa_z}{\gamma_x D}+A_y(\tau)(e^{\gamma_y\tau}-1)\frac{\kappa_z-\kappa_x}{\gamma_y D}+A_z(\tau)(e^{\gamma_z\tau}-1)\frac{\kappa_x-\kappa_y}{\gamma_z D}$$
$$G(\tau)=A_x(\tau)(e^{\gamma_x\tau}-1)\frac{\alpha_z-\alpha_y}{\gamma_x D}+A_y(\tau)(e^{\gamma_y\tau}-1)\frac{\alpha_x-\alpha_z}{\gamma_y D}+A_z(\tau)(e^{\gamma_z\tau}-1)\frac{\alpha_y-\alpha_x}{\gamma_z D}$$
$$\gamma_x=\sqrt{\varphi_x^2+2\alpha_x}$$
$$\gamma_y=\sqrt{\varphi_y^2+2\alpha_y}$$
$$\gamma_z=\sqrt{\varphi_z^2+2\alpha_z}$$

이 均衡模型은 Longstaff & Schwartz와 유사하게 설명할 수 있으나 다른 성질들이 더해져 있다. 요소들에 대한 $P(t, t+\tau)$의 편미분은 양의 값을 가질 수도 있고 음의 값을 가질 수도 있다. 이 점에서 우리 모형은 신축성이 더 강한 것이다. 收益率은 아래와 같이 정의하였다.

$$yld(t,t+\tau)=\frac{2\theta_x}{\tau}\log A_x(\tau)+\frac{2\theta_y}{\tau}\log A_y(\tau)+\frac{2\theta_z}{\tau}\log A_z(\tau)+B(\tau)$$
$$-\frac{C(\tau)}{\tau}r(t)-\frac{F(\tau)}{\tau}V(t)-\frac{G(\tau)}{\tau}\Theta(t),$$

이 정의로부터 아래 식을 간단하게 도출할 수 있다.

$$\lim_{\tau\to 0} yt(t,t+\tau)=r(t)$$
$$\lim_{\tau\to\infty} yt(t,t+\tau)=\theta_x(\gamma_x-\varphi_x)+\theta_y(\gamma_y-\varphi_y)+\theta_z(\gamma_z-\varphi_z)$$

따라서 채권수익률 期間構造 曲線(term structure curve)은 현시점의 이자율에서 출발하여 $(\tau=0)$ 현시점의 이자율과 무관계한 長期平均$(\tau=\infty)$에 도달한다.

이 모형에서 세 개의 요소들은 채권수익률의 기간구조의 서로 다른 특성들에 영향을 미친다. 그 특성들에 대해서 Balduzzi, Das, & Foresi(1994)의 논문에서 이미 설명하였다.

세 변수가 수익률곡선에 미치는 영향을 살펴보면 다음과 같다. 첫 번째 변수인 단기이자율은 수익률곡선의 水準(level)을 결정한다. 두 번째 변수인 변동성은 수익률의 곡률(curvature)에 영향을 미친다. Balduzzi & Foresi 역시 이러한 변동성의 영향에 대한 해석을 제공했다. 마지막으로 우리 모형의 $\Theta(t)$는 Balduzzi & Foresi의 長期平均(long-term mean)처럼 기간구조곡선의 기울기(steepness)를 결정하는 平均回歸項(mean-reversion term)이다. 이러한 성분들은 Litterman & Scheinkman(1991)의 논문에서 이미 설명되어 있으며 그들은 이 세 성분들이 채권가격변화의 약 96%를 포착할 수 있음을 보여 주었다. 우리 모형에서의 세 요소들도 위의 성분들의 특성을 잘 표현하고 있다. 더 나아가서 Balduzzi, Das, & Foresi(1993) 및 Chen(1995)의 논문들과 달리 우리는 요소들 사이에 相關性(nontrivial correlation)이 존재한다는 가정하에서도 채권가격에 대한 닫힌 꼴의 해를 구했다.

채권의 기간 프리미엄은 다음의 식으로 표현할 수 있다.

$$\Lambda(t) = \Lambda_r r(t) + \Lambda_V V(t) + \Lambda_\Theta \Theta(t)$$

여기서

$$\Lambda_r = -\lambda_x A_x(\tau)(e^{\gamma_x \tau} - 1)\frac{\alpha_y \kappa_z - \alpha_z \kappa_y}{\gamma_x D} - \lambda_y A_y(\tau)(e^{\gamma_y \tau} - 1)\frac{\alpha_z \kappa_x - \alpha_x \kappa_z}{\gamma_y D}$$

$$- \lambda_z A_z(\tau)(e^{\gamma_z \tau} - 1)\frac{\alpha_x \kappa_y - \alpha_y \kappa_x}{\gamma_z D}$$

$$\Lambda_V = -\lambda_x A_x(\tau)(e^{\gamma_x \tau} - 1)\frac{\kappa_y - \kappa_z}{\gamma_x D} - \lambda_y A_y(\tau)(e^{\gamma_y \tau} - 1)\frac{\kappa_z - \kappa_x}{\gamma_y D} - \lambda_z A_z(\tau)(e^{\gamma_z \tau} - 1)\frac{\kappa_x - \kappa_y}{\gamma_z D}$$

$$\Lambda_\Theta = -\lambda_x A_x(\tau)(e^{\gamma_x \tau} - 1)\frac{\alpha_z - \alpha_y}{\gamma_x D} - \lambda_y A_y(\tau)(e^{\gamma_y \tau} - 1)\frac{\alpha_x - \alpha_z}{\gamma_y D} - \lambda_z A_z(\tau)(e^{\gamma_z \tau} - 1)\frac{\alpha_y - \alpha_x}{\gamma_z D}$$

$\tau$을 고정시키면 기간 프리미엄은 세 개 요소들의 선형함수로 나타낼 수 있다. 일반적으로 기간 프리미엄의 부호는 정해져 있지 않다. 우리는 모든 $\lambda_i$가 동시에 양의 값 혹은 음의 값을 가질 경우에만 부호를 명확히 할 수 있다. Lonstaff & Schwartz의 모형은 두 개의 $\lambda_i$를 포함할 수 있도록 일반화할 수 있지만 엄밀한 버전은 다른 상태들과 다른 만기들 사이에 서로 다른 부호들을 만들어 낼 수 없다. 이것은 그들의 모형에서의 두 번째 요소가 생산기술에 있어서의 擴散 項(diffusion term)을 보여 주지 못하였기 때문에 위험 프리

미엄이 한 개 요소 모형에서와 같이 표현되었기 때문이다.

마지막으로 債券價格의 變動性의 期間構造를 살펴보자. 이 연구는 Schaefer & Schwartz(1987)가 논한 바와 같이 특별히 채권옵션의 가격에 매우 큰 영향을 미친다. 우리 모형에서의 변동성의 기간구조는 아래와 같이 설명할 수 있다.

$$Vol(t,t+\tau) = \Gamma_r r(t) + \Gamma_V V(t) + \Gamma_\Theta \Theta(t)$$

여기서

$$\Gamma_r = \alpha_x A_x(\tau)^2 (e^{\gamma_x \tau} - 1)^2 \frac{\alpha_y \kappa_z - \alpha_z \kappa_y}{\gamma_x^2 D} + \alpha_y A_y(\tau)^2 (e^{\gamma_y \tau} - 1)^2 \frac{\alpha_z \kappa_x - \alpha_x \kappa_z}{\gamma_y^2 D}$$
$$+ \alpha_z A_z(\tau)^2 (e^{\gamma_z \tau} - 1)^2 \frac{\alpha_x \kappa_y - \alpha_y \kappa_x}{\gamma_z^2 D}$$

$$\Lambda_V = \alpha_x A_x(\tau)^2 (e^{\gamma_x \tau} - 1)^2 \frac{\kappa_y - \kappa_z}{\gamma_x^2 D} + \alpha_y A_y(\tau)^2 (e^{\gamma_y \tau} - 1)^2 \frac{\kappa_z - \kappa_x}{\gamma_y^2 D}$$
$$+ \alpha_z A_z(\tau)^2 (e^{\gamma_z \tau} - 1)^2 \frac{\kappa_x - \kappa_y}{\gamma_z^2 D}$$

$$\Lambda_\Theta = \alpha_x A_x(\tau)^2 (e^{\gamma_x \tau} - 1)^2 \frac{\alpha_z - \alpha_y}{\gamma_x^2 D} + \alpha_y A_y(\tau)^2 (e^{\gamma_y \tau} - 1)^2 \frac{\alpha_x - \alpha_z}{\gamma_y^2 D}$$
$$+ \alpha_z A_z(\tau)^2 (e^{\gamma_z \tau} - 1)^2 \frac{\alpha_y - \alpha_x}{\gamma_z^2 D}$$

분산은 세 요소들에 의존할 뿐만 아니라 채권의 만기에도 의존한다. 채권가격의 변동성은 Longstaff and Schwartz의 모형과 마찬가지로 만기의 單調增加函數(monotonic increasing function)다. 變動性은 0에서부터 시작하여 ($\tau = 1$) 定常狀態 點(steady state point)에 도달한다.

$$\lim_{\tau \to 0} Vol(t,t+\tau) = 0$$

$$\lim_{\tau \to \infty} Vol(t,t+\tau) = \left(\frac{2\alpha_x}{\kappa_x + \gamma_x}\right)^2 + \left(\frac{2\alpha_y}{\kappa_y + \gamma_y}\right)^2 + \left(\frac{2\alpha_z}{\kappa_z + \gamma_z}\right)^2$$

일반적으로 利子率은 中期 滿期(intermediate-maturity) 채권의 분산에 가장 큰 영향을 미치지만 그 영향은 전반적으로 크지 않다. 短期利子率의 變動性의 영향이 보다 더 크며 주로 변동성의 기간구조의 수준을 포획한다. 재미있는 사실은 $\Theta$가 비슷한 영향을 미친다는 것이다. 平均回歸(mean-reversion)은 이자율이 시간이 흐름에 따라 定常狀態(steady state)로 얼마나 빨리 회귀하는지를 제어한다. 단기변동성이 채권시장의 불확실성을 결정함과 동시에 평균회귀는 이러한 불확실성의 제거의 속도를 나타내며 따라서 변동성의 기간구조에 대한 영향이 그토록 큰 것이다.

## 3. 債券옵션價格

앞 장들에서 제시한 一般均衡의 틀에 따라 이 장에서는 債券옵션의 價格을 도출하려고 한다. 결론적으로 모형은 할인채권옵션가격들에 대한 세 요소 모형이다. 앞 장에서 우리는 평균회귀 항이 변동성의 기간구조에 중요한 영향을 미친다는 점에 대해 설명하였다. 變動性은 옵션가격을 결정하는 기초적인 결정요인이기 때문에 平均回歸는 단기간변동과 마찬가지로 채권옵션가격을 결정하는 결정적인 요소이어야 하며 이는 Lo & Wang(1995)의 연구와도 연관이 된다. 위험중립하에서 기초자산의 변동성에 대한 설정이 바뀔 경우에만 기대 수익률이 바뀌게 된다. $\Theta(t)$는 이자율의 확률적 조건부평균을 설명하는 항으로, 역시 채권가격 즉 채권옵션의 기초자산의 가격에 영향을 미친다.

$K$로 할인채권을 기초자산으로 하는 유럽형 콜옵션의 행사가격을 나타내고 $\tau$는 옵션행사일까지의 기간을, $\tau_p$는 옵션 행사일로부터 채권만기일까지의 기간이라 할 때, 債券옵션의 價格은 아래와 같다.

$$C(t,t+\tau,\tau_p) = E^P[M(t,t+\tau_p)(P(t+\tau,t+\tau+\tau_p)-K)^+]$$
$$= E^Q\left[\exp\left(\int_t^{t+\tau} r(s)ds\right)(P(t+\tau,t+\tau+\tau_p)-K)^+\right]$$

기댓값을 계산하면 아래의 채권옵션가격의 해를 얻게 된다.

$$C(t,t+\tau,\tau_p) = P(t,t+\tau+\tau_p)\Omega(\vartheta_1^*,\vartheta_2^*,\vartheta_3^*;\ 4\theta_x,4\theta_y,4\theta_z,w_1^*,w_2^*,w_3^*)$$
$$-KP(t,t+\tau)\Omega(\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3;\ 4\theta_x,4\theta_y,4\theta_z,w_1,w_2,w_3)$$

여기서

$$\vartheta_1 = \frac{4\zeta\gamma_x^2}{\alpha_x(e^{\gamma_x\tau}-1)(e^{\gamma_x\tau_p}-1)A_x(\tau)A_x(\tau_p)}$$

$$\vartheta_2 = \frac{4\zeta\gamma_y^2}{\alpha_y(e^{\gamma_y\tau}-1)(e^{\gamma_y\tau_p}-1)A_y(\tau)A_y(\tau_p)}$$

$$\vartheta_3 = \frac{4\zeta\gamma_z^2}{\alpha_z(e^{\gamma_z\tau}-1)(e^{\gamma_z\tau_p}-1)A_z(\tau)A_z(\tau_p)}$$

$$\vartheta_1^* = \vartheta_1 + 2\zeta$$

$$\vartheta_2^* = \vartheta_2 + 2\zeta$$

$$\vartheta_3^* = \vartheta_3 + 2\zeta$$

$$w_1 = \frac{4\gamma_x A_x(\tau)e^{\gamma_x\tau}[(\alpha_z\kappa_y - \alpha_y\kappa_z)r(t) + (\kappa_z - \kappa_y)V(t) + (\alpha_y - \alpha_z)\Theta(t)]}{\alpha_x(e^{\gamma_x\tau}-1)D}$$

$$w_2 = \frac{4\gamma_y A_y(\tau)e^{\gamma_y\tau}[(\alpha_x\kappa_z - \alpha_z\kappa_x)r(t) + (\kappa_x - \kappa_z)V(t) + (\alpha_z - \alpha_x)\Theta(t)]}{\alpha_y(e^{\gamma_y\tau}-1)D}$$

$$w_3 = \frac{4\gamma_z A_z(\tau)e^{\gamma_z\tau}[(\alpha_y\kappa_x - \alpha_x\kappa_y)r(t) + (\kappa_y - \kappa_x)V(t) + (\alpha_x - \alpha_y)\Theta(t)]}{\alpha_z(e^{\gamma_z\tau}-1)D}$$

$$w_1^* = \frac{8\gamma_x^3 A_x(\tau)e^{\gamma_x\tau}[(\alpha_z\kappa_y - \alpha_y\kappa_z)r(t) + (\kappa_z - \kappa_y)V(t) + (\alpha_y - \alpha_z)\Theta(t)]}{\alpha_x(e^{\gamma_x\tau}-1)[2\gamma_x^2 + \alpha_x(e^{\gamma_x\tau}-1)(e^{\gamma_x\tau_p}-1)A_x(\tau)A_x(\tau_p)]D}$$

$$w_2^* = \frac{8\gamma_y^3 A_y(\tau)e^{\gamma_y\tau}[(\alpha_x\kappa_z - \alpha_z\kappa_x)r(t) + (\kappa_x - \kappa_z)V(t) + (\alpha_z - \alpha_x)\Theta(t)]}{\alpha_y(e^{\gamma_y\tau}-1)[2\gamma_y^2 + \alpha_y(e^{\gamma_y\tau}-1)(e^{\gamma_y\tau_p}-1)A_y(\tau)A_y(\tau_p)]D}$$

$$w_3^* = \frac{8\gamma_z^3 A_z(\tau)e^{\gamma_z\tau}[(\alpha_y\kappa_x - \alpha_x\kappa_y)r(t) + (\kappa_y - \kappa_x)V(t) + (\alpha_x - \alpha_y)\Theta(t)]}{\alpha_z(e^{\gamma_z\tau}-1)[2\gamma_z^2 + \alpha_z(e^{\gamma_z\tau}-1)(e^{\gamma_z\tau_p}-1)A_z(\tau)A_z(\tau_p)]D}$$

$$\zeta = 2\theta_x \log A_x(\tau) + 2\theta_y \log A_y(\tau) + 2\theta_z \log A_z(\tau) - \log K.$$

$\Omega(\vartheta_1^*, \vartheta_2^*, \vartheta_3^*;\ 4\theta_x, 4\theta_y, 4\theta_z, w_1^*, w_2^*, w_3^*)$는 세 변수 非中心카이제곱分布(noncentral chi-square distribution) 函數를 나타낸다.

$$\int_0^{\vartheta_1}\int_0^{\vartheta_2(1-\frac{u_1}{\vartheta_1})}\int_0^{\vartheta_3(1-\frac{u_1}{\vartheta_1}-\frac{u_2}{\vartheta_2})}\chi^2(u_1,4\theta_x,w_1)\chi^2(u_2,4\theta_y,w_2)\chi^2(u_3,4\theta_z,w_3)du_1du_2du_3$$

여기서 $\chi^2(\cdot,p,q)$는 자유도가 $p$이고 非中心母數(noncentral parameter)가 $q$인 非中心카이제곱密度(noncentral chi-square density)를 나타낸다. Longstaff and Schwartz(1992)의 논문에서와 마찬가지로 비중심카이제곱분포를 따르는 변수들인 $u_1, u_2, u_3$의 밀도의 곱은 그들의 聯合密度(joint density)이며 이는 세 변수들이 相互 獨立이기 때문이다. 적분은 (0, 0, 0), ($\vartheta_1$, 0, 0), (0, $\vartheta_2$, 0) 및 (0, 0, $\vartheta_3$) 네 점들에 의해 정의된 직사각형 범위에서 값을 구한다. $\Omega(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3; 4\theta_x, 4\theta_y, 4\theta_z, w_1, w_2, w_3)$도 비슷하게 정의되었다. 이 삼변수적분은 Chen & Scott(1992)의 이변수적분으로부터 쉽게 도출할 수 있다. Longstaff & Schwartz와 마찬가지로 채권옵션가격에 대한 대부분의 比較靜態(comparative statics)들은 유의하지 않은 것으로 나왔다. 이 결과는 직관적으로 설명 가능하다. 즉 세 요소들이 채권가격 자체에 영향을 주는 동시에 다른 요소들, 예를 들면, 割引函數(discount function), 변동성 역시 옵션가격을 결정하기 때문이다.

## 4. 結 論

본 연구는 短期利子率의 平均回歸를 포함하는 3요소 이자율 모형을 사용하여 채권가격 및 이자율의 기간구조와 이자율 옵션의 가격 결정 모형을 유도하였다. 이 모형은 기존의 3요소 모형과 비교하여 요소들 간의 相互依存性을 허용한다는 측면에서 더욱 유연한 형태를 허용하게 되며, 평균회귀와 연계된 단기 이자율의 기대 변화가 Longstaff & Schwartz의 제한 조건을 확장시킬 수 있다. 따라서 이 모형은 이자율의 기간구조를 설명하는 데 있어서 기존의 모형들을 모두 포괄하면서 닫힌 형태의 채권 가격을 유도하게 되고, 아울러 평균회귀 항이 利子率과 變動性의 期間構造에 중요한 영향을 미치는 것을 설명하면서 이자율 옵션 가격 모형을 유도할 수 있다는 장점을 갖는다 하겠다.

서울大學校 經濟學部 副敎授

151-742 서울특별시 관악구 신림동 산 56-1

전화: (02)880-5684

팩스: (02)886-4231

E-mail: ahnd@snu.ac.kr

# 參 考 文 獻

Ahn, D., and B. Gao(1995): "Endogenous Exchange Rate and Currency Option: Arbitrage Approach," unpublished manuscript, NYU.

Balduzzi, P., S. R. Das, and S. Foresi(1993): "Understanding the Yield Curve: Evidence from a Three Factor Model of Interest Rate," Working Paper, NYU.

______(1994): "The Central Tendency: A Second Factor in the Short-Term Rate," Working Paper, NYU.

Chen, L.(1995): "Stochastic Mean and Stochastic Volatility: A Three-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Pricing of Interest Rate Derivatives," Working Paper, Board of Governors of the Federal Reserve System.

Chen, R. R., and L. Scott(1992): "Pricing Interest Options in a Two- Factor Cox-Ingersoll-Ross Model of the Term Structure," *Review of Financial Studies*, **5**, 613-636.

Chung, K. L., and R. J. Williams(1990): *Introduction to Stochastic Integration*, Birkhauser, Boston.

Constantinides, G.(1992): "A Theory of the Nominal Structure of Interest Rates," *Review of Financial Studies*, **5**, 531-552.

Cox, J. C., and C. Huang(1991): "Optimal Consumptions and Portfolio Policies When Asset Prices Follow Diffusion Process," *Journal of Economic Theory*, **49**, 33-83.

Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross(1979): "A Reexamination of Traditional Hypothesis about the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, **36**, 769-799.

______(1985a): "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices," *Econometrica*, **53**, 363-384.

______(1985b): "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, **53**, 385-406.

Duffie, D.(1992): *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press.

Duffie, D., and R. Kan(1993): "A Yield-Factor Model of Interest Rates," Working Paper, Stanford University.

Elliot, R.(1982): *Stochastic Calculus and Application*, Berlin, Springer-Verlag.

Harrison, M., and D. Kreps(1979): "Martingale and Arbitrage in Multiperiod Security Markets," *Journal of Economic Theory*, **20**, 381-408.

Harrison, M., and S. Pliska(1981): "Martingale and Stochastic Integral in the Theory of Continuous

Trading," *Stochastic Processes and Their Application*, **11**, 215-260.

Litterman, R., and J. Scheinkman(1991): "Common Factors Affecting Bond Returns," *Journal of Fixed Income*, **1**, 54-61.

Lo, A., and J. Wang(1995): "Implementing Option Pricing Models When Asset Returns Are Predictable," *Journal of Finance*, **50**, **1**, 87-129.

Longstaff, F. A., and E. S. Schwartz(1992): "Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model," *Journal of Finance*, **47**, 1259-1282.

Pearson, N. D., and T. S. Sun(1994): "Exploiting the Conditional Density in Estimation the Term Structure: An Application to the Cox, Ingersoll, and Ross Model," *Journal of Finance*, **49**, 1279-1304.

Revuz D, and M. Yor(1990): *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer-Verlag, New York.

Saa-Requejo(1993): "The Dynamics and the Term Structure of Risk Premia in Foreign Exchange Markets," INSEAD Working Paper.

Schaefer, S. M., and E. S. Schwartz(1987): "Time Dependent Variance and the Pricing of Bond Options," *Journal of Finance*, **42**, **5**, 1113-1128.

Singleton, K.(1994): "Persistence of International Interest Rate Correlation," Working Paper, Stanford University.

Stroock, D., and S. Varadhan(1979): *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer-Verlag, New York.

Sundaresan, Mahadevan(1984): "Consumption and Equilibrium Interest Rates in Stochastic Production Economies," *The Journal of Finance*, **39**, **1**, 77-92.

Vasicek, O.(1977): "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, **5**, 177-188.