最適化의 2階條件의 經濟的 意味의 새로운 解釋

— 一般限界寄與遞減의 概念을 利用한 充分條件의 解釋 —

鄭 基 俊

等式制約 또는 無制約하의 最適化 문제에서, 目的函數에 대한 選擇變數의 一般限界寄與函數의 概念을 導入한다. 그리고 이 概念을 이용하여 最適化의 2階充分條件들이 모두 一般限界寄與遞減의 概念과 同値임을 보임으로써, 그 經濟的 意味를 새롭게 解釋한다.

1. 序 論

最適化의 安定條件 내지 充分條件들이 가지는 經濟的 意味에 관한 논의의 역사는 경제학의 역사만큼이나 길다. 특히 限界生產 遞減의 개념은 고전경제학을 받쳐주는 중요한 기둥이었고, 그 후 서수적 목적함수와 관련해서는 限界代替率 遞減의 개념이 역시 중요한 기둥이 되어 주었다. 그러나 엄밀하게 따지자면, 限界生產 遞減의 개념은 선택변수가 하나뿐인 경우에만 타당한 안정조건이며, 변수가 둘만 되어도 적절한 조건이 될 수 없다. 限界代替率 遞減의 개념 역시 두 변수 사이의 관계일 뿐 세 변수만 되어도 적용이 어렵다는 사실이 밝혀지면서, 그 유용성은 크게 훼손되었다. 그리하여 그 개념들은 현재 경제학의 초보수준의 교육에서만 명맥을 유지하고 있는 실정이라고 하지 않을 수 없다.

限界生產 遞減의 개념과 限界代替率 遞減의 개념은 현재 最適化의 2階(充分)條件이라고 하는 수학적 개념과 이를 일반화했다고 볼 수 있는 오목성/볼록성과 준오목성/준볼록성의 개념으로 대치되어 있다. 예컨대, 최적화의 2계충분조건이란 것은, 일정하게 정의되는 順次的 主小行列式(successive principal minors)의 부호조건으로 제시된다. 그러나 이것이 한계생산 체감 및 한계대체율 체감의 개념을 일반화한 것이 분명함에도 불구하고, 그 부호조건의 의미를 이 개념들과 연결하는 것은 至難한 것으로 알려져 왔다. 實例를 들어 보자.

먼저 限界生產 遞減과 관련하여, Silberberg and Wing Suen(2001)은 *The Structure of Economics*에서, 2요소의 경우는 그래프에 의한 설명을 시도하고 있다. 그러나 일반적인 경우에 대해서는 다음과 같이 말하고 있다. "… there are all the remaining principal minors to consider, these are not easily given intuitive explanations," (p. 124). 즉 설명을 포기하고 있다.

限界代替率 遞減과 관련하여, Samuelson(1983)은 그의 *Foundations of Economic Analysis*에서 다음과 같이 이야기하고 있다. 즉, "The isoquants must also be convex to the origin in all directions … ." (p. 61). Hicks(1946)를 보자. 그는 *Value and Capital*에서 "… the marginal rate of substitution must diminish for substitutions in every direction." (p. 25)이라고 말하고 있다. 그러나 이들은 그 말들이 2계조건과 구체적으로 어떻게 연결되는지는 말하고 있지 않다. Arrow and Enthoven(1961)은 an equivalence between quasiconcavity and a kind of diminishing marginal rate of substitution을 이야기하고 있으나, 그 의미를 직관적으로 파악하기가 어렵다. Takayama(1994)는 "… the economic interpretation of … [the bordered Hessian condition] (BHC) is quite hard." (p. 118)라고 말함으로써, 2계조건의 경제적 설명을 위하여 고심했으나 성공하지 못했음을 고백하고 있다.

끝으로 限界生産 遞減과 限界代替率 遞減 사이의 관계에 관하여 검토해 보자. Archibald and Lipsey(1976)는 다음과 같이 말하고 있다. "… what we have found is that diminishing marginal productivity is neither necessary nor sufficient for diminishing marginal rate of substitutability." (p. 256). 이 말은 옳은 말이지만, 이 두 개념의 일반화된 개념인 함수의 오목성과 준오목성 사이에 성립하는 포함관계, 즉 오목함수는 준오목함수라는 관계에 비추어 볼 때, 유감스러운 일이라 하지 않을 수 없다.

이상과 같은 기존의 논의에 대한 불만으로부터, 필자는 과거 이십여 년에 걸쳐서 그 의미해석방법의 "改善"에 계속 관심을 가져왔다. 그 최초의 결과는 정기준(1984)이었고, 이를 개량한 설명이 정기준(1986)이었다. 그리고 Jeong(1995)은 개량된 영문판이었다. 그러나 그 설명에 대해서는 필자 자신도 어느 정도 불만을 가지고 있었는데, 이제 거의 흡족한 설명을 할 수 있게 된 것 같아 이 논문에서 이를 정리해 보고자 한다.

結果를 요약하면 다음과 같다.

(1) 제약이 없는 경우든 (복수 개의) 제약이 있는 경우든, 그리고 목적식과 제약식이 선형이든 비선형이든 관계없이, 순차적 주소행렬식의 부호로 주어지는 최적화의 2계충분조건들은 모두 우리가 새로 정의하는 선택변수의 "一般限界寄與"의 체감과 同値임을 보일 수 있다. (따라서 모든 2階充分條件은 "一般限界寄與의 遞減(the diminishing marginal contributions)"으로 완벽하게 표현할 수 있다.)

(2) 하나의 등식제약하의 최적화 문제에서 목적식 또는 제약식이 선형인 경우에는, 위의 "一般限界寄與 遞減"은 우리의 새로운 "一般限界代替率 遞減"의 개념으로 완벽한 번역이 가능하다.

(3) (2)의 경우에, 복수 개의 선택변수를 묶어 하나의 複合變數(composite variable)를 만드는 技法을 쓰면, "一般限界寄與 遞減"은 그 복합변수의 "(통상적) 限界代替率 遞減"의 개념으로 완벽한 번역이 가능하다.

(4) 제약이 없는 최적화 문제에서의 "一般限界寄與 遞減"이라는 최적화 조건을 생산함수에 적용하여 "一般限界生産 遞減"으로 해석할 때, 그 조건은 그 생산함수의 "一般限界代替率 遞減"을 포함함을 보일 수 있다. 즉, 오목성/준오목성 사이와 유사한 포함관계가 성립한다. 주지하다시피, 한계생산 체감과 한계대체율 체감 사이에는 포함관계가 성립하지 않는다.

2. 古典的 最適化 問題

우선 선택변수가 셋이고 제약식이 하나인 경우를 다루어보자.

問題: 目的式: $y = f(x_1, x_2, x_3)$

制約式: $g(x_1, x_2, x_3) = 0$

이 문제를 푸는 표준적인 방법은, 우선 승수 λ를 매개로 목적식과 제약식을 결합한 라그랑지함수를 다음과 같이 정의하는 일로부터 시작한다:

(2.1) $$L(\lambda, x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda g(x_1, x_2, x_3)$$

이 함수를 각각의 변수에 관해서 편도함수를 구하고 0으로 놓으면, 주지하는 바와 같이 古典的 最適化의 1階必要條件이 얻어진다:

〔1階必要條件〕

(2.2) $$L_\lambda(\lambda, x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3) = 0$$

(2.3) $$L_1(\lambda, x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda g_1(x_1, x_2, x_3) = 0$$

(2.4) $$L_2(\lambda, x_1, x_2, x_3) = f_2(x_1, x_2, x_3) + \lambda g_2(x_1, x_2, x_3) = 0$$

(2.5) $$L_3(\lambda, x_1, x_2, x_3) = f_3(x_1, x_2, x_3) + \lambda g_3(x_1, x_2, x_3) = 0$$

이 네 조건으로 이루어지는 연립방정식을 풀어서 그 해를 $(\lambda^*, x_1^*, x_2^*, x_3^*)$라 하면, 이는, 다음의 2계충분조건하에서, 최적해 내지 최적점이 된다. 2계충분조건은 라그랑지함수의 2계편도함수들로 이루어지는 행렬식들의 부호조건인데 통상 다음과 같이 표현된다:

〔極大의 2階充分條件〕

(2.6) $$|\overline{H}_2| > 0, \quad |\overline{H}_3| < 0$$

〔極小의 2階充分條件〕

(2.7) $$|\overline{H}_2| < 0, \quad |\overline{H}_3| < 0$$

여기서 행렬 $\overline{H}_3$와 $\overline{H}_2$는 다음과 같이 정의된다:

(2.8) $$\overline{H}_3 \equiv \begin{bmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ g_3 & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}$$

(2.9) $$\overline{H}_2 \equiv \begin{bmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$$

여기에 추가하여 행렬 $\overline{H}_1$을 다음과 같이 정의하자:

(2.10) $$\overline{H}_1 \equiv \begin{bmatrix} 0 & g_1 \\ g_1 & L_{11} \end{bmatrix}$$

그러면 $g_1 \neq 0$라고 가정할 때,

$$|\overline{H}_1| = -g_1^2 < 0$$

이므로 위의 2계조건들은 다음과 같이 고쳐 쓰는 것이 가능하다:

〔極大의 2階充分條件〕

(2.11)
$$\frac{|\overline{H}_2|}{|\overline{H}_1|}<0, \quad \frac{|\overline{H}_3|}{|\overline{H}_2|}<0$$

〔極小의 2階充分條件〕

(2.12)
$$\frac{|\overline{H}_2|}{|\overline{H}_1|}>0, \quad \frac{|\overline{H}_3|}{|\overline{H}_2|}>0$$

3. 2階充分條件의 "經濟的 意味" 探索

最適化의 二階條件은 數學的으로는 나무랄 데 없겠으나, 그것이 經濟的으로 어떤 의미를 가질까에 대해서는 앞에서 설명한 바와 같이 많은 궁금증이 남아 있다. 여기서는 그 경제적 의미의 탐색을 시도한다. 이를 위해서 變數의 調整體系를 다음과 같이 정의한다:

變數의 調整體系: 최적점 근방에서 변수 x_3가 독립적으로 변할 때 나머지 변수 λ, x_1, x_2는 1계필요조건의 처음 세 식을 충족하면서 종속적으로 변한다. 즉 조정체계는 연립방정식체계 (2.2), (2.3), (2.4)이며, 이 체계에서 x_3는 유일한 독립변수이다.

이 조정체계에 陰函數定理를 적용하면, 최적점 근방에서 우리는 여러 가지 중요한 명제를 얻을 수 있다. 우선 세 종속변수에 관해서 다음 명제를 얻을 수 있다:

命題 1: 함수

$$\lambda=\lambda(x_3),$$
$$x_1=x_1(x_3),$$
$$x_2=x_2(x_3)$$

가 존재하여, 이를 우리의 조정체계 (2.2), (2.3), (2.4)에 대입하면 그 체계는 최적점 근

방에서 다음과 같은 항등식체계가 된다. 즉,

(3.1) $$L_\lambda^*(x_3) \equiv L_\lambda(\lambda(x_3),\ x_1(x_3),\ x_2(x_3),\ x_3) \equiv g^*(x_3) \equiv 0$$

(3.2) $$L_1^*(x_3) \equiv L_1^*(\lambda(x_3),\ x_1(x_3),\ x_2(x_3),\ x_3) \equiv f_1^*(x_3) + \lambda(x_3) g_1^*(x_3) \equiv 0$$

(3.3) $$L_2^*(x_3) \equiv L_2^*(\lambda(x_3),\ x_1(x_3),\ x_2(x_3),\ x_3) \equiv f_2^*(x_3) + \lambda(x_3) g_2^*(x_3) \equiv 0.$$

命題 2: 최적점에서 평가한 함수 λ, x_1, x_2의 x_3에 대한 도함수 λ', x_1', x_2'를 벡터 형태로 나타내면 이는 다음과 같다. 즉,

(3.4) $$\begin{bmatrix} \lambda' \\ x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} d\lambda(x_3)/dx_3 \\ dx_1(x_3)/dx_3 \\ dx_1(x_3)/dx_3 \end{bmatrix} = -\overline{H}_2^{-1} \begin{bmatrix} g_3 \\ L_{13} \\ L_{23} \end{bmatrix}$$

4. 調整體系下에서의 라그랑지函數와 選擇變數의 一般限界寄與

이 조정체계하에서, 우리는 라그랑지함수 (2.1)을 x_3만의 함수 $L^*(x_3)$로 쓸 수 있다. 즉,

(4.1) $$L^*(x_3) \equiv L(\lambda(x_3),\ x_1(x_3),\ x_2(x_3),\ x_3) \equiv f^*(x_3) + \lambda(x_3) g^*(x_3)$$

그런데 命題 1의 식 (3.1)에 의하여 이 식의 우변의 마지막 항은 항등적으로 0이다. 따라서 다음 命題가 성립한다. 즉,

命題 3: 조정체계로 축약된 라그랑지함수는 같은 조정체계로 축약된 목적함수 $f^*(x_3)$와 항등적으로 같다. 즉,

(4.2) $$L^*(x_3) \equiv f^*(x_3) \equiv f(x_1(x_3),\ x_2(x_3),\ x_3).$$

(이 명제는 포락성정리를 닮았다.)

이 조정체계하에서의 x_3의 목적함수에 대한 한계기여를 x_3의 "一般限界寄與 函數(the general marginal-contribution function, $GMC(x_3)$)"라고 부르기로 하고, 이를 다음과 같이 정의한다:

$$(4.3) \qquad GMC(x_3) \equiv \frac{d}{dx_3} f^*(x_3) \equiv \frac{d}{dx_3} f(x_1(x_3),\ x_2(x_3),\ x_3)$$

그런데 식 (4.2)에 의하면 이는 다음과 같이 된다:

$$(4.4) \qquad GMC(x_3) \equiv \frac{d}{dx_3} f^*(x_3) \equiv \frac{d}{dx_3} L^*(x_3)$$

그러므로 이 一般限界寄與를 평가하기 위해서는 라그랑지함수를 분석하는 것이 편리하다. 식 (4.1)을 미분하여 보자. 즉,

$$\frac{d}{dx_3} L^*(x_3) \equiv L^*_\lambda(x_3)\lambda' + L^*_1(x_3)x'_1 + L^*_2(x_3)x'_2 + L^*_3(x_3)$$

그런데 이 식의 우변의 앞의 세 항은 命題 1의 식 (3.1), (3.2), (3.3)에 의하여 항등적으로 0이다. 따라서, 식 (4.4)을 감안할 때, (포락성 정리와 비슷한) 다음 식이 얻어진다:

$$(4.5) \qquad GMC(x_3) \equiv L^*_3(x_3)$$

즉,

$$(4.6) \qquad GMC(x_3) \equiv L_3(\lambda(x_3),\ x_1(x_3),\ x_2(x_3),\ x_3) \equiv f^*_3(x_3) + \lambda(x_3)g^*_3(x_3)$$

설명을 덧붙이자면, $L^*_3(x_3)$는 $L(\lambda,\ x_1,\ x_2,\ x_3)$의 x_3에 관한 편도함수를, 조정체계에 따라서 x_3만의 함수로 표현한 것이다. 그리고 변수 x_3를 파라미터로 보면, 식 (4.3)의 정의에서 알 수 있는 바와 같이 $GMC(x_3)$는 간접목적함수의 비교균형분석을 나타내고, 따라서 식 (4.5)는 포락성정리를 나타낸다고 볼 수 있다. 그런데 변수 x_3는 최적점을 구하기까지는 선택변수의 하나였으므로, 최적점에서, 즉 x^*_3에서는 그 한계기여가 0이다. 즉 $GMC(x^*_3) = 0$이다.

5. 一般限界寄與의 變化

식 (4.6)를 미분하면 一般限界寄與의 변화를 알 수 있다. 미분해 보자:

$$\frac{d}{dx_3}GMC(x_3) \equiv g_3\lambda' + L_{31}x_1' + L_{32}x_2' + L_{33}$$

$$\equiv L_{33} + [g_3 \;\; L_{31} \;\; L_{32}]\begin{bmatrix}\lambda' \\ x_1' \\ x_2'\end{bmatrix}$$

여기에 식 (3.4)의 관계를 대입하면 다음 결과를 얻는다:

(5.1) $$\frac{d}{dx_3}GMC(x_3) \equiv L_{33} - [g_3 \;\; L_{31} \;\; L_{32}]\,\overline{H}_2^{-1}\begin{bmatrix}g_3 \\ L_{13} \\ L_{23}\end{bmatrix} \equiv \frac{|\overline{H}_3|}{|\overline{H}_2|}$$

이 식 (5.1)의 마지막 등식이 성립하는 것은 약간의 설명을 요할지 모른다.

이 설명을 위해서는 분할정방행렬의 행렬식에 관한 다음 명제가 유용하다:

命題 4: A_{11}, A_{22}가 정방행렬이고, $|A_{11}| \neq 0$이면,

(5.2) $$\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix} \equiv |A_{11}||A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$$

라는 항등관계가 성립한다.

이 명제의 證明은 다음과 같다. 즉, 항등식

$$\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}A_{11} & 0 \\ A_{21} & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\end{bmatrix}$$

의 양변의 행렬식의 값을 구하여 정리하면 식 (5.2)가 얻어진다. 이 명제는 2×2 행렬의

경우, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \equiv a_{11}(a_{22} - a_{21}a_{11}^{-1}a_{12})$의 관계를 일반화한 것으로 볼 수 있다. 이 행렬식은 $a_{22} \neq 0$일 때 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \equiv a_{22}(a_{11} - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21})$로 전개할 수 있는 것과 마찬가지로, 이 명제의 식 (5.2)는 $|A_{22}| \neq 0$일 때 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \equiv |A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}||A_{22}| \tag{5.3}$$

이제, 식 (2.8)의 정방행렬 $\overline{H}_3$를 분할하여,

$$\overline{H}_3 \equiv \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} g_3 \\ L_{13} \\ L_{23} \end{bmatrix} \\ [\, g_3 \quad L_{31} \quad L_{32} \,] & L_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} [\overline{H}_2] & \begin{bmatrix} g_3 \\ L_{13} \\ L_{23} \end{bmatrix} \\ [g_3 \quad L_{31} \quad L_{32}] & L_{33} \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

로 변형하고 이 命題 4의 식 (5.2)을 이용하면 식 (5.1)의 마지막 등식이 성립함을 알 수 있다. 그리하여 다음 관계가 얻어진다. 즉,

$$\frac{d}{dx_3}GMC(x_3) \equiv \frac{|\overline{H}_3|}{|\overline{H}_2|} \tag{5.5}$$

이는 選擇變數 x_3의 一般限界寄與의 변화를 2계충분조건, (2.11) 및 (2.12)와 맺어주는 중요한 관계다. 즉 이 관계는 (2.11)과 (2.12) 각각의 두 번째 조건이 일반한계기여의 변화방향이라는 경제적 의미로 해석될 수 있음을 보여준다.

6. 制約式이 線形일 때의 一般限界代替率

경제학에서 限界代替率 遞減은 최적화의 2계충분조건과 관련해서 논의된다. 그러나 그 논의는 그리 철저하지 못하다. 여기서는 限界代替率을 여러 가지로 정의하여 이를 2階充分條件과 관련시켜 보고자 한다. 여기서는 우선, 목적함수가 비선형이고 제약식이 선형인 최적화 문제, 예컨대 비용제약하의 産出極大化 問題의 경우, 목적함수, 예컨대 생산함수를 이용한 한계대체율 문제를 고려해 보자. 일반적으로 x_3에 대한 x_i의 限界代替率(marginal rate of substitution, MRS_{i3})은 무차별곡면상에서

$$MRS_{i3} \equiv -\frac{\partial x_i}{\partial x_3} \equiv \frac{f_3(x_1, x_2, x_3)}{f_i(x_1, x_2, x_3)}, \qquad i=1,\ 2$$

와 같이 정의될 수 있을 것 같이 생각되지만, 이 정의는 엄밀하지도 유용하지도 않다. 그 한계대체율이 무엇의 함수인지를 분명히 하는 것이 필요하기 때문이다. 그리하여 우리는 조정체계에 따라서 변수들이 움직일 때, 즉 x_3가 독립적으로 변함에 따라서 x_i가 종속적으로 변할 때, x_3에 대한 x_i의 一般限界代替率 函數(the general marginal rate of substitution function, $GMRS_{i3}(x_3)$)를 다음과 같이 정의하기로 한다. 즉,

$$GMRS_{i3}(x_3) \equiv \frac{f_3^*(x_3)}{f_i^*(x_3)}, \quad i=1,\ 2 \tag{6.1}$$

이 정의식에 命題 1의 항등관계 (3.2), 즉,

$$f_i^*(x_3) + \lambda(x_3) g_i^*(x_3) \equiv 0, \quad i=1,\ 2$$

를 대입하여 정리하면, 다음과 같다. 단, $g_i^*(x_3) = g_i$(상수)임을 감안한다.

$$GMRS_{i3}(x_3) \equiv \frac{f_3^*(x_3)}{-\lambda(x_3) g_i}, \quad i=1,\ 2 \tag{6.2}$$

$GMRS_{i3}(x_3)$가 x_3의 변화에 어떤 반응을 보이는가를 알아보기 위하여 식 (6.2)를 미분해 보자:

$$\frac{d}{dx_3} GMRS_{i3}(x_3) \equiv \frac{-1}{g_i} \frac{d}{dx_3} \frac{f_3^*(x_3)}{\lambda(x_3)} = \frac{-1}{g_i} \frac{1}{\lambda} \left[\frac{df_3^*(x_3)}{dx_3} - \frac{f_3}{\lambda} \frac{d\lambda(x_3)}{dx_3} \right] \tag{6.3}$$

이 식의 우변의 꺾쇠표 안의 표현을 A라 하면, 이는 다음과 같이 변형된다. 즉,

$$A \equiv f_{31} x_1' + f_{32} x_2' + f_{33} + g_3 \lambda' \equiv f_{33} + [g_3 \ \ f_{31} \ \ f_{32}] \begin{bmatrix} \lambda' \\ x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$$

여기서는 命題 1에서의 $f_3 + \lambda g_3 = 0$의 관계가 이용되었다. 또 g가 선형이기 때문에 $L_{ij} = f_{ij}$임을 고려하면, 이는 식 (5.1)에 의하여,

$$A = \frac{|\overline{H}_3|}{|\overline{H}_2|} = \frac{d}{dx_3} GMC(x_3)$$

이 얻어진다. 이 결과를 식 (6.3)에 대입하면, 이는

$$(6.4) \qquad \frac{d}{dx_3} GMRS_{i3}(x_3) \equiv \frac{-1}{g_i} \frac{d}{dx_3} \frac{f_3^*(x_3)}{\lambda(x_3)} = \frac{-1}{\lambda g_i} \frac{|\overline{H}_3|}{|\overline{H}_2|}$$

로 변형되고, $f_i + \lambda g_i = 0$의 사실을 이용하여 정리하면, 다음 결과가 얻어진다:

$$(6.5) \qquad \frac{d}{dx_3} GMRS_{i3}(x_3) \equiv \frac{1}{f_i} \frac{|\overline{H}_3|}{|\overline{H}_2|}, \quad i = 1,\ 2.$$

이 결과를 식 (5.5)와 비교하면 다음 관계가 얻어진다. 즉,

$$(6.6) \qquad \frac{d}{dx_3} GMC(x_3) = f_1 \frac{d}{dx_3} GMRS_{13}(x_3) = f_2 \frac{d}{dx_3} GMRS_{23}(x_3)$$

이 결과는 x_3의 一般限界寄與의 변화와 一般限界代替率의 변화 사이에 극히 간단한 정비례 관계가 존재함을 보여준다. (이 관계는 제약식이 선형일 때만 성립한다.)

7. 目的式이 線型일 때의 一般限界代替率

이번에는 목적함수가 선형이고 제약식이 비선형인 최적화 문제, 예컨대 산출제약하의 비용극소화 문제의 경우, 제약함수, 예컨대 생산함수의 변형물을 이용한 일반한계대체율을 고려해 보자. 그 경우 x_3에 대한 x_i의 一般限界代替率 函數(the general marginal-rate-of-substitution function, $GMRS_{i3}(x_3)$)를 다음과 같이 정의한다. 즉,

$$GMRS_{i3}(x_3) \equiv \frac{g_3^*(x_3)}{g_i^*(x_3)}, \quad i=1,\ 2 \tag{7.1}$$

이 식에 命題 1의 항등관계 (3.2), 즉,

$$f_i^*(x_3) + \lambda(x_3) g_i^*(x_3) \equiv 0, \quad i=1,\ 2$$

을 대입하되, 목적식이 선형이므로 $f_i^*(x_3) = f_i$가 상수임을 감안하면, 이는 다음과 같이 변형된다:

$$GMRS_{i3}(x_3) \equiv \frac{-1}{f_i} g_3^*(x_3) \lambda(x_3), \quad i=1,\ 2 \tag{7.2}$$

이 $GMRS_{i3}(x_3)$가 x_3의 변화에 어떤 반응을 보이는가를 알아보기 위하여 식 (7.2)를 미분해 보자. 즉,

$$\frac{d}{dx_3} GMRS_{i3}(x_3) \equiv \frac{-1}{f_i}[g_3\lambda' + \lambda g_{31} x_1' + \lambda g_{32} x_2' + \lambda g_{33}] \tag{7.3}$$

이 식의 우변의 꺾쇠 안을 A라 하면, 이는 다음과 같이 변형된다. 즉,

$$A \equiv \lambda g_{33} + g_3\lambda' + \lambda g_{31} x_1' + \lambda g_{32} x_2' \equiv \lambda g_{33} + [g_3 \ \ \lambda g_{31} \ \ \lambda g_{32}] \begin{bmatrix} \lambda' \\ x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$$

여기서, $L_{ij} = \lambda g_{ij}$임을 고려하면, 이는 식 (5.1)에 의하여,

$$A \equiv L_{33} - [g_3 \ \ L_{31} \ \ L_{32}] \bar{H}_2^{-1} \begin{bmatrix} g_3 \\ L_{13} \\ L_{23} \end{bmatrix} \equiv \frac{|\bar{H}_3|}{|\bar{H}_2|} \equiv \frac{d}{dx_3} GMC(x_3)$$

이 얻어진다. 이 결과를 식 (7.3)에 대입하고 정리하면, 다음 결과가 얻어진다:

$$\frac{d}{dx_3}GMRS_{i3}(x_3) \equiv \frac{-1}{f_i}\frac{|\overline{H}_3|}{|\overline{H}_2|} = \frac{-1}{f_i}\frac{d}{dx_3}GMC(x_3), \quad i=1,\ 2. \tag{7.4}$$

즉,

$$\frac{d}{dx_3}GMC(x_3) = -f_1\frac{d}{dx_3}GMRS_{13}(x_3) = -f_2\frac{d}{dx_3}GMRS_{23}(x_3) \tag{7.5}$$

이 결과는 x_3의 一般限界寄與의 변화와 一般限界代替率의 변화 사이에, 역시 극히 간단한 선형관계가 존재함을 보여준다. (이 관계는 목적식이 선형일 때만 성립한다.)

8. 費用制約下의 産出極大化 問題에서의 複合變數에 대한 限界代替率

우리의 原問題는 다음과 같았다.

原問題: 目的式: $y=f(x_1, x_2, x_3)$

制約式: $g(x_1, x_2, x_3)=0$

이 문제를 비용제약하의 산출극대화 문제로 보기 위하여 우리는 目的式을 생산함수로 보고, 制約式을 비용제약식으로 본다. 즉,

$$g(x_1, x_2, x_3) = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 - c = 0 \tag{8.1}$$

여기서 요소가격 w들과 주어진 가용총비용 c는 양의 상수이다. 이제 우리는 변수 x_1과 x_2를 결합하여 複合變數(composite variable) Y를 다음과 같이 정의한다:

$$Y \equiv w_1x_1 + w_2x_2 \tag{8.2}$$

그러면 제약식과 목적식은 새로운 선택변수 Y와 x_3의 함수로 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있

다:

$$g(x_1, x_2, x_3) \equiv Y + w_3 x_3 - c \equiv G(Y, x_3) = 0 \tag{8.3}$$

$$y = f(x_1, x_2, x_3) \equiv F(Y, x_3) \tag{8.4}$$

최적점 근방에서의 목적함수들 간의 항등식,

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv F(Y, x_3) \equiv F(w_1 x_1 + w_2 x_2, x_3) \tag{8.5}$$

을 감안하면, 1계편도함수들 사이에는 다음과 같은 관계를 확인할 수 있다:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) \equiv F_Y(Y, x_3) w_1, \quad f_1^*(x_3) \equiv F_Y^*(x_3) w_1, \tag{8.6}$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) \equiv F_Y(Y, x_3) w_2, \quad f_2^*(x_3) \equiv F_Y^*(x_3) w_2, \tag{8.7}$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) \equiv F_3(Y, x_3), \quad f_3^*(x_3) \equiv F_3^*(x_3). \tag{8.8}$$

즉,

$$F_Y^*(x_3) \equiv \frac{f_1^*(x_3)}{w_1} \equiv -\lambda(x_3) \equiv \frac{f_2^*(x_3)}{w_2} \tag{8.9}$$

$$F_3^*(x_3) \equiv f_3^*(x_3) \tag{8.10}$$

식 (8.9)의 두번째, 세번째 항등호가 성립하는 것은, 이 경우에도 命題 1의 식 (3.2), (3.3)이 여전히 성립하기 때문이다.

이를 이용하여 우리는 x_3에 대한 Y의 한계대체율을, x_3의 함수로, 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$MRS_{Y3}(x_3) \equiv \frac{F_3^*(x_3)}{F_Y^*(x_3)} \equiv \frac{f_3^*(x_3)}{-\lambda(x_3)} \tag{8.11}$$

이를 x_3에 관해서 미분하되, 식 (6.4) 및 $F_Y = -\lambda$의 관계를 고려하면, 그 결과는 다음과 같다. 즉,

$$(8.12)\qquad \frac{d}{dx_3}MRS_{Y3}(x_3) \equiv -\frac{d}{dx_3}\frac{f_3^*(x_3)}{\lambda(x_3)} = \frac{1}{F_Y}\frac{|\overline{H}_3|}{|\overline{H}_2|}$$

이를 식 (5.5)의 관계를 고려하여 변형하면, 다음 관계를 얻는다:

$$(8.13)\qquad \frac{d}{dx_3}GMC(x_3) \equiv \frac{|\overline{H}_3|}{|\overline{H}_2|} \equiv F_Y\frac{d}{dx_3}MRS_{Y3}(x_3)$$

이 관계는 一般限界寄與의 변화가 複合要素에 대한 限界代替率의 변화와 단순한 비례관계임을 보여준다. 따라서 이 두 변화는 동일한 최적화의 2계충분조건에 의해서 그 성질이 규정된다.

9. 새로운 調整體系

우리가 새로 고려하려는 조정체계는, 최적점 근방에서 x_2만 독립적으로 변하고 λ와 x_1은 종속적으로 변하며, x_3는 최적상태 x_3^*를 그대로 유지하는 경우이다. 변수 λ와 x_1이 종속적으로 변한다는 것은 1계필요조건 중에서 처음 두 조건, 즉

$$(9.1)\qquad L_\lambda(\lambda, x_1, x_2, x_3^*) = g(x_1, x_2, x_3^*) = 0$$

$$(9.2)\qquad L_1(\lambda, x_1, x_2, x_3^*) = f_1(x_1, x_2, x_3^*) + \lambda g_1(x_1, x_2, x_3^*) = 0$$

이 충족되면서 변한다는 의미이다. 이 두 식을 새로운 조정체계로 보면, 이 체계에는

$$|\overline{H}_1| \equiv \begin{vmatrix} L_{\lambda\lambda} & L_{\lambda 1} \\ L_{1\lambda} & L_{11} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 0 & g_1 \\ g_1 & L_{11} \end{vmatrix} = -g_1^2 < 0$$

의 조건하에서, 음함수정리의 적용이 가능하다. 즉,

$$\lambda = \lambda(x_2)$$
$$x_1 = x_1(x_2)$$

인 함수가 존재하여, 이를 (9.1)과 (9.2)에 대입하면, 그 체계는 恒等式체계가 된다. 즉,

(9.3) $$L_\lambda^*(x_2) \equiv L_\lambda(\lambda(x_2),\ x_1(x_2),\ x_2,\ x_3^*) \equiv g^*(x_2) \equiv 0$$

(9.4) $$L_1^*(x_2) \equiv L_1(\lambda(x_2),\ x_1(x_2),\ x_2,\ x_3^*) \equiv f_1^*(x_2) + \lambda(x_2) g_1^*(x_2) \equiv 0$$

그리고 이 함수들의 導函數는 다음과 같이 표현된다:

(9.5) $$\begin{bmatrix} \lambda' \\ x_1' \end{bmatrix} = -\overline{H}_1^{-1} \begin{bmatrix} g_2 \\ L_{12} \end{bmatrix}$$

새로운 조정체계하에서 라그랑지함수 (2.1)을 x_2만의 함수로 쓸 수 있다. 즉,

(9.6) $$L^*(x_2) \equiv L(\lambda(x_2),\ x_1(x_2),\ x_2,\ x_3^*) \equiv f^*(x_2) + \lambda(x_2) g^*(x_2)$$

그런데, 이 식의 우변의 마지막 항은, 식 (9.3)에 의하여, 항등적으로 0이다. 따라서 다음 명제가 성립한다. 즉,

(9.7) $$L^*(x_2) \equiv f^*(x_2) \equiv f(x_1(x_2),\ x_2,\ x_3^*).$$

10. 새로운 調整體系下에서의 一般限界寄與와 그 變化

이 새로운 조정체계하에서의 x_2의 목적함수에 대한 한계기여를 "x_2의 一般限界寄與函數, $GMC(x_2)$"라고 하면, 이는 다음과 같이 정의된다:

(10.1) $$GMC(x_2) \equiv \frac{d}{dx_2} f^*(x_2) \equiv \frac{d}{dx_2} f(x_1(x_2),\ x_2,\ x_3^*)$$

그런데 최적점 근방에서는 $f^*(x_2) \equiv L^*(x_2)$이므로 이 식은 다음과 같이 표현된다:

$$(10.2) \qquad GMC(x_2) \equiv \frac{d}{dx_2} f^*(x_2) \equiv \frac{d}{dx_2} L^*(x_2)$$

그러므로 이 一般限界寄與를 평가하기 위해서는 라그랑지함수 (9.6)을 분석하는 것이 편리하다. 식 (9.6)을 미분하여 보자. 즉,

$$\frac{d}{dx_2} L^*(x_2) \equiv L_\lambda^*(x_2)\lambda' + L_1^*(x_2)x_1' + L_2(\lambda(x_2),\ x_1(x_2),\ x_2,\ x_3^*)$$

그런데 이 식의 우변의 처음 두 항은, 식 (9.3)과 (9.4)에 의하여, 항등적으로 0이다. 따라서, 식 (10.2)을 감안할 때, 다음 식이 얻어진다. 즉,

$$(10.3) \qquad GMC(x_2) \equiv L_2^*(x_2) \equiv L_2(\lambda(x_2),\ x_1(x_2),\ x_2,\ x_3^*)$$

식 (10.3)을 미분하면 一般限界寄與의 변화를 알 수 있다. 미분해 보자.

$$(10.4) \qquad \frac{d}{dx_2} GMC(x_2) \equiv L_{2\lambda}\lambda' + L_{21}x_1' + L_{22} \equiv L_{22} + [g_2 \quad L_{21}]\begin{bmatrix} \lambda' \\ x_1' \end{bmatrix}$$

여기에 식 (9.5)의 관계를 대입하면 다음 결과를 얻는다:

$$(10.5) \qquad \frac{d}{dx_2} GMC(x_2) \equiv L_{22} - [g_2 \quad L_{21}]\overline{H}_1^{-1}\begin{bmatrix} g_2 \\ L_{12} \end{bmatrix} \equiv \frac{|\overline{H}_2|}{|\overline{H}_1|}$$

마지막 등식은 식 (5.2)의 항등관계를 적용하여 얻어진 것이다. 이는 우리의 일반한계기여의 변화를 2계충분조건, (2.11) 및 (2.12) 각각의 첫째 조건이 일반한계기여의 체감이라는 경제적 의미를 가짐을 보여주는 중요한 관계다.

11. 새로운 調整體系에서의 限界代替率과 그 變化

새로운 조정체계하에서, 비용제약하의 산출극대화 문제의 경우, 目的函數, 예컨대 生産函數를 이용한 限界代替率 問題를 고려해 보자. 이 경우에는 x_2의 독립적 변화에 대한 x_1의 종속적 변화만이 고려되므로 그 한계대체율은 다음과 같이 정의된다.

$$(11.1) \qquad MRS_{12}(x_2) \equiv \frac{f_2^*(x_2)}{f_1^*(x_2)}$$

이 정의식의 분모와 관련되는 항등관계는 식 (9.2)에서 $g_1 = w_1$임을 감안하여 얻어진다. 즉, 항등관계,

$$(11.2) \qquad L_1(\lambda(x_2),\ x_1(x_2),\ x_2,\ x_3^*) \equiv 0$$

로부터 항등관계,

$$(11.3) \qquad f_1^*(x_2) + \lambda(x_2)w_1 \equiv f_1(x_1(x_2),\ x_2,\ x_3^*) + \lambda(x_2)w_1 \equiv 0,$$

가 얻어진다. 이를 식 (11.1)에 대입하여 정리하면 다음과 같다:

$$(11.4) \qquad MRS_{12}(x_2) \equiv \frac{-1}{w_1}\frac{f_2^*(x_2)}{\lambda(x_2)}$$

$MRS_{12}(x_2)$가 x_2의 변화에 어떤 반응을 보이는가를 알아보기 위하여 식 (11.4)의 우변의 뒷부분을 미분해 보자:

$$(11.5) \qquad \frac{d}{dx_2}\frac{f_2^*(x_2)}{\lambda(x_2)} = \frac{1}{\lambda}[\frac{d}{dx_2}f_2(x_1(x_2),\ x_2,\ x_3^*) - \frac{f_2}{\lambda}\frac{d}{dx_2}\lambda(x_2)]$$

$$= \frac{1}{\lambda}[f_{21}x_1' + f_{22} + w_2\lambda'] = \frac{1}{\lambda}[f_{22} + [w_2 \quad f_{21}]\begin{bmatrix}\lambda' \\ x'\end{bmatrix}]$$

이 연산의 두 번째 등호는 등식, $f_2 + \lambda w_2 = 0$에 의한 것이다. 여기서 $L_{ij} = f_{ij}$임을 고려하면서 식 (9.5), 즉,

$$\begin{bmatrix} \lambda' \\ x_1' \end{bmatrix} = -\overline{H}_1^{-1} \begin{bmatrix} g_2 \\ L_{12} \end{bmatrix} = -\overline{H}_1^{-1} \begin{bmatrix} w_2 \\ f_{12} \end{bmatrix}$$

을 대입하면, 그 결과는 다음과 같다.

$$(11.6) \qquad \frac{d}{dx_2} MRS_{12}(x_2) \equiv \frac{-1}{\lambda w_1}\left(f_{22} - [w_2 \ \ f_{21}]\overline{H}_1^{-1}\begin{bmatrix} w_2 \\ f_{12} \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{f_1}\frac{|\overline{H}_2|}{|\overline{H}_1|}$$

마지막 등호는 $f_1 + \lambda w_1 = 0$의 사실을 이용하였다. 즉,

$$(11.7) \qquad \frac{d}{dx_2} MRS_{12}(x_2) = \frac{|\overline{H}_2|}{f_1 |\overline{H}_1|}$$

이는 식 (10.5)의 일반한계기여의 변화와 다음과 같은 항등관계를 가진다

$$(11.8) \qquad \frac{d}{dx_2} GMC(x_2) \equiv f_1 \frac{d}{dx_2} MRS_{12}(x_2) \equiv \frac{|\overline{H}_2|}{|\overline{H}_1|}$$

이 결과는 一般限界寄與의 변화와 限界代替率의 변화 사이에 극히 간단한 正比例 관계가 존재함을 보여준다(이 관계는 제약식이 선형일 때만 성립한다.).

註釋: 식 (11.7)의 관계는 보통 의미의 限界代替率 遞減을 나타내는 식이어야 한다. 즉 제3의 변수를 고정시키고 두 변수 사이의 관계만을 보고 있는 것이다. 그런데 이 식은 식 (6.5) 및 (8.12)로 표현되는 한계대체율의 변화식과 너무나 닮았다. 반대로 통상적인 표현,

$$(11.9) \qquad \frac{d}{dx_2} MRS_{12}(x_2) = \frac{|\overline{H}_2|}{-f_1 w_1^2} = -\frac{1}{f_1 w_1^2} |\overline{H}_2|$$

과 너무 닮지 않았다. $|\overline{H}_1| \equiv -g_1^2$이기 때문에 내용은 꼭 같지만 말이다. 식 (11.9)의 우변의 표현이 식 (11.7)의 우변의 표현과 동치라는 것을 인식하지 못한 것이 식 (6.5) 또는 (8.12)의 발견을 더디게 하지 않았을까?

12. 無制約 最適化의 境遇

제약이 없는 경우의 최적화 문제가 다음과 같이 주어져 있다.

問題: 目的式: $y = f(x_1, x_2, x_3)$

그리고 이때 最適點 (x_1^*, x_2^*, x_3^*)에서는 다음의 1階必要條件이 만족된다.

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ (12.1)\qquad &f_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ &f_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{aligned}$$

또 最適化의 2階充分條件은 2계편도함수들의 행렬식의 값의 부호조건으로 다음과 같이 주어진다:

〔極大의 充分條件〕

$$(12.2)\qquad |H_1| \equiv f_{11} < 0, \quad |H_2| \equiv \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad |H_3| \equiv \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} < 0$$

〔極小의 充分條件〕

$$(12.3)\qquad |H_1| \equiv f_{11} > 0, \quad |H_2| \equiv \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad |H_3| \equiv \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} > 0$$

여기서, $|H_0| \equiv 1$로 정의하면, 이 조건은 다음과 같이 표현된다:

〔極大의 2階充分條件〕

$$\frac{|H_i|}{|H_{i-1}|}<0, \quad i=1,\ 2,\ 3 \tag{12.4}$$

〔極小의 2階充分條件〕

$$\frac{|H_i|}{|H_{i-1}|}>0, \quad i=1,\ 2,\ 3 \tag{12.5}$$

이상의 내용은 너무나 잘 알려져 있으나, 2階條件의 "經濟的" 의미는 충분히 피력되고 있지 못하다. 여기서는 이를 선택변수의 목적함수에 대한 限界寄與의 변화로 설명하고자 한다.

제1단계로, x_1만 독립적으로 변하고 나머지 변수들은 최적점에서 고정되어 있을 때, x_1의 限界寄與函數 $MC(x_1)$은

$$MC(x_1)\equiv f_1(x_1,\ x_2^*,\ x_3^*) \tag{12.6}$$

이 되고 그 한계기여의 변화는 이를 x_1에 관하여 미분함으로써 얻어진다. 즉,

$$\frac{d}{dx_1}MC(x_1)=\frac{d}{dx_1}f_1(x_1,x_2^*,x_3^*)=f_{11}\equiv|H_1| \tag{12.7}$$

단, 그 도함수는 최적점에서 평가하였다.

제2단계로, x_2만 독립적으로 변하고 x_3는 최적점에서 고정되어 있으며, x_1은 1계조건의 첫째 식을 충족하면서 x_2에 종속적으로 변할 때를 고려하자. 이 경우 변수들 간에는 다음 관계가 성립한다:

$$f_1(x_1,x_2,x_3^*)=0 \tag{12.8}$$

이 경우, 2계충분조건의 첫째 조건에 따라 $|H_1|=f_{11}\neq 0$을 가정하면 이 식에 음함수정

리를 적용하여 다음 명제를 얻을 수 있다. 즉, 함수

$$x_1 = x_1(x_2)$$

가 존재하며 그 도함수 x_1' 은,

$$x_1' \equiv \frac{d}{x_2} x_1(x_2) = -f_{11}^{-1} f_{12} \tag{12.9}$$

이다. 이 때, x_2의 一般限界寄與函數를 다음과 같이 정의하자:

$$MC(x_2) \equiv f_2^*(x_2) \equiv f_2(x_1(x_2),\ x_2,\ x_3^*) \tag{12.10}$$

그러면 그 한계기여의 변화는 이를 x_2에 관하여 미분함으로써 얻어진다. 즉,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_2} MC(x_2) &= \frac{d}{dx_2} f_2^*(x_2) = f_{21} x_1' + f_{22} \\ &= f_{22} - f_{21} f_{11}^{-1} f_{12} = \frac{1}{f_{11}} (f_{11} f_{22} - f_{21} f_{12}) = \frac{|H_2|}{|H_1|} \end{aligned} \tag{12.11}$$

단, 모든 도함수는 최적점에서 평가된다.

제3단계는 유사한 절차를 거쳐서, 즉 x_3만 독립적으로 변하고 x_1과 x_2는 1계조건을 충족하면서 종속적으로 변하는 경우, x_3의 一般限界寄與函數를 다음과 같이 정의한다:

$$MC(x_3) \equiv f_3^*(x_3) \equiv f_3(x_1(x_3),\ x_2(x_3),\ x_3) \tag{12.12}$$

그리고 이를 미분하여, 그 한계기여의 변화가 다음과 같음을 확인할 수 있다. 즉,

$$\frac{d}{dx_3} MC(x_3) = \frac{d}{dx_3} f_3(x_1(x_3),\ x_2(x_3),\ x_3) = \frac{|H_3|}{|H_2|} \tag{12.13}$$

이리하여, 이 식은 식 (12.7), (12.11)과 더불어 최적화의 2계충분조건을 일반한계기여의 변화로 표현할 수 있는 바탕을 제공한다.

13. 無制約 最適化와 線型制約 最適化의 2階充分條件들 사이의 關係

이상에서 본 바와 같이 無制約 最適化의 경우 그 2계충분조건은 테없는 헤시안 주소행렬식, $|H_i|$의 부호로, 예컨대 極大化의 경우

$$|H_3| \equiv \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} \tag{13.1}$$

등으로 주어진다. 그런데 線型制約 最適化의 경우에는 유테 헤시안 주소행렬식, $|\overline{H}_i|$의 부호로, 예컨대

$$|\overline{H}_3| \equiv \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ g_2 & f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ g_3 & f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 0 & [g_1 \ g_2 \ g_3] \\ \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} & [H_3] \end{vmatrix} \tag{13.2}$$

등의 부호로 주어진다. 여기서 우리는 테가 없는 $|H_i|$의 부호가 주어지면 테가 있는 $|\overline{H}_i|$의 부호가 결정되는가의 문제를 다루어 보고자 한다.

우리는 식 (5.2) 및 (5.3)으로 주어지는 항등관계가 여러 가지 유용한 결과를 유도할 수 있음을 보았다. 이를 (13.2)에 적용해 보자:

$$|\overline{H}_3| \equiv -[g_1 \ g_2 \ g_3]H_3^{-1}\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}|H_3| \tag{13.3}$$

또는

$$\frac{|\overline{H}_3|}{|H_3|} \equiv -[g_1 \ \ g_2 \ \ g_3]H_3^{-1}\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \tag{13.4}$$

여기서 H_3가 음정부호행렬이면 H_3^{-1} 역시 음정부호행렬이 되므로 식 (13.4)의 우변의 이차형식의 부호는 음이고, 우변 전체의 부호는 양이다. 즉 좌변의 분자와 분모는 같은 부호를 가진다. 특히 $|H_3|<0$이므로 분자 역시 $|\overline{H}_3|<0$이다. 일반적으로 H_i가 음정부호행렬이면 $|\overline{H}_i|$의 부호는 $|H_i|$의 부호와 같다. 한편, H_3가 양정부호행렬이면 H_3^{-1} 역시 양정부호행렬이 되므로 식 (13.4)의 우변 전체의 부호는 음이다. 특히 $|H_3|>0$이므로 분자는 $|\overline{H}_3|<0$이다. 일반적으로 H_i가 양정부호행렬이면, $|H_i|$의 부호가 모두 양이므로, $|\overline{H}_i|$의 부호는 모두 음이다.

이 논리를 生産函數에 적용하면, "모든 一般限界生産들이 체감하는 성질을 가지는 생산함수의 모든 一般限界代替率들은 체감한다"는 명제가 도출된다.

14. 가장 一般的인 調整體系

우리의 가장 일반적인 변수들의 조정체계는, m개의 制約式과 n개의 選擇變數를 가지는 最適化 問題의 調整體系이다. 우리가 지금 고려할 상황을 설명하면 다음과 같다. 즉, 선택변수 n개는 세 그룹으로 나누어서 순서대로 각각 x_1, x_2, x_3라고 하며, 또 각각은 $n_1\times 1$, 1×1, $n_3\times 1$ 벡터이다. (따라서 $n_1+1+n_3=n$이다.) 최적점 근방에서 두 번째 그룹의 유일한 변수 x_2만 독립적으로 변하고 m개의 라그랑지승수의 벡터 λ와 n_1개의 선택변수의 벡터 x_1는 종속적으로 변하며, n_3개의 선택변수의 벡터 x_3는 최적상태 x_3^*를 그대로 유지한다.

이 경우 라그랑지함수의 모습은 다음과 같다:

$$L(\lambda, x_1, x_2, x_3^*) = f(x_1, x_2, x_3^*) + g'(x_1, x_2, x_3^*)\lambda \tag{14.1}$$

여기서 $g'(x_1, x_2, x_3^*)$는 m개의 제약식의 열벡터이다. (도함수가 아니다.) 여기서 변수벡터 λ와 x_1이 종속적으로 변한다는 것은 1계필요조건

$$L_\lambda(\lambda, x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3) = 0, \qquad (m \times 1\text{식})$$

$$L_1(\lambda, x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1, x_2, x_3) + g_1'(x_1, x_2, x_3)\lambda = 0, \qquad (n_1 \times 1\text{식})$$

$$L_2(\lambda, x_1, x_2, x_3) = f_2(x_1, x_2, x_3) + g_2'(x_1, x_2, x_3)\lambda = 0, \qquad (1 \times 1\text{식})$$

$$L_3(\lambda, x_1, x_2, x_3) = f_3(x_1, x_2, x_3) + g_3'(x_1, x_2, x_3)\lambda = 0, \qquad (n_3 \times 1\text{식})$$

중에서 처음 두조건들이 충족되면서 변한다는 의미이다. 즉,

(14.2) $$L_\lambda(\lambda, x_1, x_2, x_3^*) = g(x_1, x_2, x_3^*) = 0, \qquad (m \times 1\text{식})$$

(14.3) $$L_1(\lambda, x_1, x_2, x_3^*) = f_1(x_1, x_2, x_3^*) + g_1'(x_1, x_2, x_3^*)\lambda = 0, \qquad (n_1 \times 1\text{식})$$

이 두 식이 우리의 一般的인 變數調整體系로 된다. (여기서 g_i'은 $n_i \times m$의 함수 기호이다.)

최적점에서 평가할 때의 행렬식의 조건, 즉

(14.4) $$|\overline{H}_1| \equiv \begin{vmatrix} L_{\lambda\lambda} & L_{\lambda 1} \\ L_{1\lambda} & L_{11} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 0 & g_1' \\ g_1 & L_{11} \end{vmatrix} \neq 0$$

을 가정하면, 이 조건하에서 우리는 이 체계에 음함수정리를 적용할 수 있다. (여기서 $\overline{H}_1$은 $m+n_1$계의 정방행렬이며 $m \times n_1$행렬 g_1의 위수는 $rank(g_1) = m$이다. 따라서 $n_1 \geq m$으로 가정된다.) 즉, 음함수정리에 따라서,

(14.5) $$\lambda = \lambda(x_2), \qquad (m \times 1\text{벡터의 식})$$

(14.6) $$x_1 = x_1(x_2), \qquad (n_1 \times 1\text{벡터의 식})$$

인 함수가 존재하여 이를 調整體系 (14.2) 및 (14.3)에 대입하면 그 체계는 항등식이 된다. 즉,

(14.7) $$L_\lambda^*(x_2) \equiv L_\lambda(\lambda(x_2),\ x_1(x_2),\ x_2,\ x_3^*) \equiv g^*(x_2) \equiv 0$$

(14.8) $$L_1^*(x_2) \equiv L_1(\lambda(x_2),\ x_1(x_2),\ x_2,\ x_3^*) \equiv f_1^*(x_2) + g_1^{*\prime}(x_2)\lambda(x_2) \equiv 0$$

그리고 이 함수들 $\lambda(x_2)$와 $x_1(x_2)$의 도함수는 다음과 같이 표현된다:

(14.9) $$\begin{bmatrix} \lambda' \\ x_1' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \partial\lambda / \partial x_2 \\ \partial\lambda / \partial x_2 \end{bmatrix} = -\overline{H}_1^{-1} \begin{bmatrix} g_2 \\ L_{12} \end{bmatrix}$$

우리의 이 일반적 조정체계하에서 라그랑지함수 (14.1)을 x_2만의 함수로 쓸 수 있다. 즉,

(14.10) $$L^*(x_2) \equiv L(\lambda(x_2),\ x_1(x_2),\ x_2,\ x_3^*) \equiv f^*(x_2) + g^{*\prime}(x_2)\lambda(x_2)$$

그런데 이 식의 우변의 마지막 항은, 식 (14.7)에 의하여, 항등적으로 0이다. 따라서 다음 命題가 성립한다. 즉,

(14.11) $$L^*(x_2) \equiv f^*(x_2) \equiv f(x_1(x_2), x_2, x_3^*).$$

15. 一般的 調整體系下에서의 一般限界寄與와 그 變化

이 일반적 조정체계하에서의 x_2의 목적함수에 대한 한계기여를 "x_2의 一般限界寄與函數, $GMC(x_2)$"라고 하면, 이는 다음과 같이 정의된다:

(15.1) $$GMC(x_2) \equiv \frac{d}{dx_2} f^*(x_2) \equiv \frac{d}{dx_2} f(x_1(x_2), x_2, x_3^*)$$

그런데 최적점 근방에서는 식 (14.11)에 의하여 $f^*(x_2) \equiv L^*(x_2)$이므로 이 식은 다음과 같이 표현된다:

(15.2) $$GMC(x_2) \equiv \frac{d}{dx_2} f^*(x_2) \equiv \frac{d}{dx_2} L^*(x_2)$$

그러므로 이 일반한계기여를 평가하기 위해서는 라그랑지함수를 분석하는 것이 편리하

다. 식 (14.10)을 미분하여 보자. 즉,

$$\frac{d}{dx_2}L^*(x_2) \equiv L_\lambda^{*\prime}(x_2)\lambda' + L_1^{*\prime}(x_2)x_1' + L_2^*(x_2)$$

그런데 이 식의 우변의 두 항은, 식 (14.7)과 (14.8)에 의하여, 항등적으로 0이다. 따라서, 식 (15.2)을 감안할 때, 다음 식이 얻어진다. 즉,

$$GMC(x_2) \equiv L_2^*(x_2) \equiv L_2(\lambda(x_2), x_1(x_2), x_2, x_3^*) \tag{15.3}$$

식 (15.3)를 미분하면 일반한계기여의 변화를 알 수 있다. 미분해 보자.

$$\frac{d}{dx_2}GMC(x_2) \equiv L_{2\lambda}'\lambda' + L_{21}'x_1' + L_{22} \equiv L_{22} + [g_2' \;\; L_{21}']\begin{bmatrix}\lambda' \\ x_1'\end{bmatrix} \tag{15.4}$$

여기에 식 (9.5)의 관계를 대입하면 다음 결과를 얻는다:

$$\frac{d}{dx_2}GMC(x_2) \equiv L_{22} - [g_2' \;\; L_{21}']\overline{H}_1^{-1}\begin{bmatrix}g_2 \\ L_{12}\end{bmatrix} \equiv \frac{|\overline{H}_2|}{|\overline{H}_1|} \tag{15.5}$$

마지막 등식은 식 (5.2)의 항등관계를 적용하여 얻어진 것이다. 그리고 최우변의 분자는 $m+n_1+1$계의 행렬식이고, 분모는 $m+n_1$ 계의 행렬식이다. 이는 우리의 일반한계기여의 변화를 일반적인 2계충분조건과 연결시켜 주는 중요한 관계다.

최적화의 2계충분조건은 식 (15.5)의 최우변의 부호로 규정된다. 즉,

〔極大化의 2階充分條件〕:

$$\frac{|\overline{H}_3|}{|\overline{H}_2|} < 0, \qquad n_1 = m,\ m+1,\ \cdots,\ n-1$$

〔極小化의 2階充分條件〕:

$$\frac{|\overline{H}_3|}{|\overline{H}_2|} > 0, \quad n_1 = m,\ m+1,\ \cdots,\ n-1$$

식 (15.5)에 의하면 이 조건들은 다음 조건들과 동치이다. 즉,

〔極大化의 2階充分條件〕:

$$\frac{d}{dx_2} GMC(x_2) < 0, \quad n_1 = m,\ m+1,\ \cdots,\ n-1$$

〔極小化의 2階充分條件〕:

$$\frac{d}{dx_2} GMC(x_2) > 0, \quad n_1 = m,\ m+1,\ \cdots,\ n-1$$

註釋: $n_1 = m$일때의 $|\overline{H}_1|$의 부호

$n_1 = m$일 때, $|\overline{H}_1| \equiv \begin{vmatrix} 0 & g_1' \\ g_1 & L_{11} \end{vmatrix}$의 g_1은 $m \times m$의 비특이 정방행렬이다. 따라서, 그 행렬식은 다음과 같이 평가된다. 즉,

$$|\overline{H}_1| \equiv \begin{vmatrix} 0 & g_1' \\ g_1 & L_{11} \end{vmatrix} = (-1)^m \begin{vmatrix} g_1' & 0 \\ L_{11} & g_1 \end{vmatrix} = (-1)^m \, |g_1|^2$$

즉, 그 부호는 $(-1)^m$와 같다. 우리는 이미 $m = 1$일 때, 그 부호가 음임을 알고 있다.

서울大學校 經濟學部 名譽教授
137-846 서울특별시 서초구 방배2동 967-28
전화: 011-9775-6370
E-mail: kjjeong@snu.ac.kr

參考文獻

정기준(1984): "생산함수의 오목성과 준오목성의 경제적 의미," 성곡학술문화재단, 『성곡논총』, **15**, 325-363.

______(1986): 『미시경제이론』, 경문사.

Archibald, G. G., and R. G. Lipsey(1976): *An Introduction to Mathematical Economics: Methods and Applications.*

Arrow, K. J., and A. C. Enthoven(1961): "Quasi-concave Programming," *Econometrica*, **29**, 779-800.

Hicks, J. R.(1946): *Value and Capital*, 2nd ed., Clarendon Press.

Jeong, Ki-Jun(1995): "Economic Characterizations of the Second-Order Sufficient Conditions," Seoul National University, *Seoul Journal of Economics*, **8**, 413-424.

Samuelson, P. A.(1983): *Foundations of Economic Analysis*, enlarged edition, Harvard University Press.

Silberberg, E., and Wing Suen(2001): *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill.

Takayama, A.(1994): *Analytical Methods in Economics*, Harvester Wheatsheaf.