# 線形計劃法의 심플렉스 알고리즘과 쿤-터커條件

鄭 基 俊

이 노트는 線型計劃法의 쿤-터커條件에 등장하는 선택변수, 여분변수, 쌍대변수 등 모든 변수들이 심플렉스표에서 찾아지는 이유를 체계적으로 설명한다.

## 1. 序 論

최적화 기법으로서의 線形計劃法은 그 뒤에 개발된 非線形計劃法 속에 포함되고 말아 이론적으로는 점점 우리의 관심의 대상에서 멀어지는 경향이 있다. 그러나 비선형계획법의 쿤-터커조건이 선형계획법에서는 최적화의 필요충분조건이 된다는 매력적인 성질과 심플렉스 알고리즘으로 그 구체적인 최적해를 구할 수 있다는 또 하나의 매력은 선형계획법에 대한 관심을 버리지 못하게 하고 있다.

이 노트에서는 심플렉스 알고리즘에서 사용되는 심플렉스표에 등장하는 각각의 항목들이 쿤-터커조건과 구체적으로 어떻게 관련되는지와 원문제, 쌍대문제의 선택변수, 여분변수들이 어떤 모습으로 등장하는지에 관한 별로 알려져 있지 않은 내용을 체계적으로 정리해 보고자 한다.

## 2. 線形計劃問題

여기서는 標準的 極大化 線形計劃問題를 다루기로 한다. 제약식은 $m$개이고 $n$개의 선택변수는 $m \times n$ 벡터 $x$이고, 목적식의 계수인 $1 \times n$ 벡터 $p'$와 제약식의 상수항인 $m \times 1$ 벡터 $r$은 편의상, $p' > 0'$ 및 $r > 0$으로 가정한다.

〔原問題〕

$$\text{Max } R = p'x$$

$$\text{(2.1)} \qquad \text{s.t.} \quad Ax \leq r$$

$$x \geq 0$$

〔라그랑지函數〕

$$L(x, y) = p' x + y' (r - Ax) \tag{2.2}$$

〔쿤-터커條件〕

$$L_x = p' - y' A \equiv -t' \le 0', \quad x \ge 0, \quad t' x = 0 \tag{2.3}$$

$$L_y = r - Ax \equiv s \ge 0, \quad y' \ge 0', \quad y' s = 0 \tag{2.4}$$

이 쿤-터커조건은 最適化의 必要充分條件이다. 그러므로 최적상태에서는 다음 두 관계가 성립한다.

$$L(x, y) = p' x + y' (r - Ax) = p' x + y' s = p' x = R \tag{2.5}$$

및

$$L(x, y) = p' x + y' (r - Ax) = y' r + (p' - y' A)x = y' r - t' x = y' r \tag{2.6}$$

## 3. 심플렉스 알고리즘

쿤-터커조건과 심플렉스 알고리즘을 연결시키기 위하여 문제의 형식을 약간 바꿔본다. 즉, 여분변수벡터 $s$를 이용하여 문제의 형식을 변형하면 다음과 같다.

〔問題〕

| | | |
|---|---|---|
| | 目的式: | $R - p' x + 0' s = 0$ |
| (3.1) | 制約式: | $Ax + s = r$ |
| | 符號制約: | $x \ge 0, \quad s \ge 0$ |

이 목적식과 제약식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & -p' & 0' \\ 0 & A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ x \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

또는

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} -p' & 0' \\ A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

이 식의 좌변을 다음과 같이 변형해 보자. 즉 "廣義의 選擇變數 벡터" $\begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix}$가 최적의 실행가능기저해에서 기저변수벡터 $x_B$와 비기저변수벡터 $x_N$로 분리되고, 기저변수벡터가 앞쪽에 배열되도록 변수의 배열순서를 바꾼다. 이 연산은 順列行列 $P$와 그 逆行列 $P^{-1}$를 사용하여 다음과 같이 표현된다:

$$\begin{bmatrix} -p' & 0' \\ A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p' & 0' \\ A & I \end{bmatrix} PP^{-1} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

그리고 이 순열행렬에 의한 연산결과, 즉 계수열의 배열순서가 바뀐 결과를 다음과 같이 표현하기로 한다. 즉,

$$\begin{bmatrix} -p' & 0' \\ A & I \end{bmatrix} P \equiv \begin{bmatrix} -p'_B & -p'_N \\ B & N \end{bmatrix}$$

이에 대응하는 변수의 배열순서 변경 결과는 다음과 같다.

$$P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

이를 종합하면 다음 결과가 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} -p' & 0' \\ A & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p'_B & -p'_N \\ B & N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$$

따라서 식 (3.2)는 다음과 같이 변형된다. 즉,

$$\begin{bmatrix} 1 & -p'_B & -p'_N \\ 0 & B & N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R \\ x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

## 4. 심플렉스 알고리즘의 結果

심플렉스 알고리즘에 따라 최적상태에서, "확장된 기저변수 벡터" $\begin{bmatrix} R \\ x_B \end{bmatrix}$의 계수행렬을 단위행렬로 만들려면 이는 그 행렬의 역행렬, 즉,

$$\begin{bmatrix} 1 & -p'_B \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & p'_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$$

을 식 (3.6)의 앞에 곱하면 된다. 우선 이를 식 (3.6)의 좌변에 곱해 보자:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & p'_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} 1 & -p'_B \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -p'_N \\ N \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ x_B \end{bmatrix} \\ x_N \end{bmatrix} \\ & = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0' \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -p'_N + p'_B B^{-1} N \\ B^{-1} N \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ x_B \end{bmatrix} \\ x_N \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.1}$$

이를 약간 더 변형하면 다음과 같이 계산된다:

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 0' \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -p'_N + p'_B B^{-1} N \\ B^{-1} N \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ x_B \end{bmatrix} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} 0' x_B + t'_N x_N \\ I x_B + B^{-1} N x_N \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

여기서 우리는 $t'_N$을

$$(-p'_N + p'_B B^{-1}N) \equiv t'_N$$

으로 정의하였다. 이제 식 (3.6)의 우변에 그 역행렬을 곱해 보자:

$$\begin{bmatrix} 1 & p'_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p'_B B^{-1} r \\ B^{-1} r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'r \\ B^{-1} r \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

이 (4.2)와 (4.3)의 두 결과를 결합하면 식 (3.6)은 다음과 같이 변형된다.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} 0' x_B + t'_N x_N \\ I x_B + B^{-1} N x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p'_B B^{-1} r \\ B^{-1} r \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

## 5. 最適의 判定과 最適解

이 $x_B$가 기저벡터인 현재의 상태가 最適狀態라면, 그 최적상태임을 알 수 있는 증거는 무엇인가? 식 (4.4)에 의하면 목적식의 기저변수의 계수는 0벡터로 되어 있다. 그러므로 그 목적식의 비기저변수의 계수벡터가 비음벡터이면 더 이상 개선의 여지가 없다. 그러므로 최적조건은

〔最適條件〕 $t'_N \geq 0'$

이 충족되는 것이다. 이 최적상태에서 변수들의 값은 식 (4.4)에서 다음과 같이 읽혀질 수 있다. 즉,

〔最適解〕 $x_N = 0, \quad x_B = B^{-1} r, \quad R = p'_B B^{-1} r$

## 6. 심플렉스 알고리즘의 結果와 쿤-터커條件

이 最適解의 성질을 쿤-터커條件에 비추어서 음미해 보기로 하자. 먼저 쿤-터커의 조건으로부터 우리는 최적상태에서

$$R = p'x = y'r$$

임을 알고 있다. 그러므로 우리는 위의 〔最適解〕의 표현에서

$$y' = p'_B B^{-1} \tag{6.1}$$

임을 추론할 수 있다. 그러면 과연 이 推論이 쿤-터커조건과 整合性을 가지는지를 검토해 보자.

식 (3.6)의 양변의 앞에 곱했던 역행렬을 식 (3.2)에 곱해 보자. 즉,

$$\begin{bmatrix} 1 & p'_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -p' & 0' \\ 0 & A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ x \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & p'_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

이 좌변을 평가해 보면 다음과 같다. 즉,

$$\begin{bmatrix} 1 & p'_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -p' & 0' \\ 0 & A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ x \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (-p' + p'_B B^{-1} A) & p'_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} A & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ x \\ s \end{bmatrix}$$

여기서, 식 (6.1)을 고려하면,

$$-p' + p'_B B^{-1} A \equiv -p' + y'A \equiv t' \tag{6.3}$$

으로 되며, 이 관계는 다음과 같이 표현된다. 즉,

$$\begin{bmatrix} 1 & (-p' + p'_B B^{-1}A) & p'_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1}A & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ x \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} t' & y' \\ B^{-1}A & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix}$$

이 결과와 식 (6.1)을 감안하면 식 (6.2)는 다음과 같이 변형된다. 즉,

(6.4) $$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} t' & y' \\ B^{-1}A & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'r \\ B^{-1}r \end{bmatrix}$$

이를 식 (4.4)를 약간 변형한 식,

(6.5) $$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} R + \begin{bmatrix} 0' & t'_N \\ I & B^{-1}N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'r \\ B^{-1}r \end{bmatrix}$$

와 비교해 보자. 이 비교에서 우리는 다음 사실을 안다. 즉,

(6.6) $$t'x + y's = 0'x_B + t'_N x_N$$

즉,

(6.7) $$[t' \quad y'] \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = [0' \quad t'_N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$$

그런데 식 (3.5)의 관계에 의하여, 다음 관계가 성립한다:

(6.8) $$[t' \quad y'] \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = [t' \quad y']\, PP^{-1} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = [t' \quad y'] P \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$$

그러므로, 식 (6.7) 및 최적조건을 감안할 때,

(6.9) $$[t' \quad y']\, P = [0' \quad t'_N] \geq 0'$$

라는 관계가 얻어진다. 그리하여, $[0' \quad t_N']$의 배열순서를 바꾼 것에 지나지 않는 $[t' \quad y']$은 다음 부등식을 만족한다. 즉,

$$t' \geq 0', \quad y' \geq 0' \tag{6.10}$$

또 식 (6.6)의 우변의 값은 0이다. 비기저변수의 값은 정의상 최적기저해에서 0이기 때문이다. 따라서 $t'x + y's = 0$이며, 여기서의 인수들은 모두 비음이기 때문에 다음 관계가 성립한다. 즉

$$t'x = 0, \quad y's = 0 \tag{6.11}$$

그리고 심플렉스 알고리즘에서는 실행가능성이 당연히 전제되어 있기 때문에

$$x_B = B^{-1}r \geq 0 \tag{6.12}$$

이 성립하며, 식 (3.5)에서 얻어지는

$$\begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} \equiv P \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \tag{6.13}$$

의 관계로부터 實行可能條件,

$$x \geq 0, \quad s \geq 0 \tag{6.14}$$

이 얻어진다. 그리하여 쿤-터커조건 전체가 (6.10), (6.11) 및 (6.14)에 의하여 확보되었다.

## 7. 심플렉스 알고리즘에서의 雙對變數들

이상에서 본 바와 같이 심플렉스 알고리즘에 등장하는 雙對問題의 選擇變數 $y'$와 쌍대문제의 여분변수 $t'$의 값들은 모두 최적상태에서 쿤-터커조건을 만족한다. 그러면 이 변수들은 구체적으로 그 알고리즘에서 어디에 그 모습을 드러내는가? 이는 식 (6.4)에서 보

는 바와 같이, 심플렉스 최종표의 목적식의 계수행에 그 모습을 드러낸다. 즉 선택변수 $x$의 계수벡터가 $t'$이고, 여분변수 $s$의 계수벡터가 바로 $y'$이다.

서울大學校 經濟學部 名譽敎授
137-846 서울특별시 서초구 방배2동 967-28
전화: 011-9775-6370
E-mail: kjjeong@snu.ac.kr

## 參 考 文 獻

Chiang, A. C.(1984): *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 3rd ed., McGraw-Hill.

Danzig, G. B.(1963): *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press.

Silberberg, E., and Wing Suen(2001): *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill

Simon, C. P., and L. Blume(1994): *Mathematics for Economists*, Norton.

Takayama, A.(1985): *Mathematical Economics*, 2nd ed., Cambridge University Press.

______(1994): *Analytical Methods in Economics*, Harvester Wheatsheaf.