變動金利附債券 價格決定模型(1)

安炯賢 · 崔英敏

본 연구는 變動金利債券 및 대표적 利子率派生商品인 caps과 floorer에 대한 의의를 살펴보고 가격결정을 위한 모형수립 및 그 해를 구하는 것을 목적으로 한다. 개별적인 여러 caplet으로 구성되는 caps은 금리상한인 cap rate 이상으로 상승하면 매도자가 매입자에게 그 차액만큼을 지급하기로 약정한 계약을 말하며, floors는 금리가 floor rate 이하로 하락하면 매도자가 매입자에게 그 차액만큼을 지급하는 개별 flooret으로 구성되는 상품을 말한다. 이러한 이자율파생상품들은 이자율의 움직임에 전적으로 영향받게 되며, 이에 대표적인 이자율 확률과정인 Vasicek 모형하에서 이들의 합리적인 가격결정을 위한 닫힌 해를 계산하였다.

1. 序　論

利子率派生商品 市場은 점점 그 규모가 커져가고 있으며 그 중에서도 caps과 floors는 가장 널리 거래되는 대표적 상품이다. '금리캡' 내지 '金利上限契約'이라 불리우는 caplet은 어떠한 금리가 계약상 금리상한, 즉 cap rate 이상으로 상승하면 매도자가 매입자에게 그 차액만큼을 지급하기로 약정한 계약을 말한다. 반면 금리가 cap rate 이하인 경우 매도자는 아무런 지급의무를 갖지 않는다. 그러므로 주로 변동금리 차입자가 단기 동안 이자율의 증가가 예상되는 경우 caplet을 매입하여 목표기간 동안 금리인상의 손실을 회피할 수 있도록 해준다. 이런 의미에서 cap rate는 최대 차입이자율이 특정한 수준을 절대 넘지 않도록 해주는 일종의 보험으로 간주할 수 있다. 따라서 이러한 보험에 대한 대가로서의 보험료로 매도자에게 프리미엄을 지급하게 된다.

반대로 floorlet은 '금리플로어' 내지 '金利下限契約'으로 어떠한 금리가 계약된 floor rate 이하로 하락하면 매도자가 매입자에게 그 차액만큼을 지급한다. 금리가 floor rate 이상인 경우에는 매도자는 아무런 지급의무를 갖지 않는다. 그러므로 floorlet을 매입하는 것은 變動金利資產 收益의 下限線(minimum return on investment)을 설정하는 보장의 역할을 한다. Floorlet은 단기이자율이 감소하는 시점에 변동금리상품에서의 수익을 관리하고자 할 때 사용된다. 역시 이러한 보장에 대한 대가로 매도자에게 프리미엄이 지급되어야

(1) 본 연구는 재단법인 서울대학교 발전기금 연구비 지원을 받아 이루어졌다.

〈그림 1〉 caplet의 現金흐름

한다.

變動金利(L)에 노출된 단기자금조달의 위험을 낮추기 위해 caplet을 이용하는 경우를 도시해 보면, 매 지급시점에서의 現金흐름은 다음의 두 부분으로 분할된다. 첫 번째, 차입원금에 대해 변동금리(L)로 지급하는 이자비용이 존재한다. 두 번째, 현재 변동금리가 cap rate K보다 높은 경우, 차입자는 그 차이를 보상받게 된다.

利子率派生商品 시장은 다양한 시장이자율에 근거하는 상품들로 구성된다. 따라서 caps 이나 floors와 같은 변동금리에 연동되는 이자율파생상품은 다양한 만기구조에 노출되게 된다. 결국 정확한 變動金利債(FRN: Floating Rates Note)의 평가는 기간구조에 조건하여 얼마나 옵션의 가격을 정확하게 설정하는가에 달려있게 된다. 본 연구에서는 Vasicek 모형에 근거한 기간구조를 이용, 변동금리채 및 caps와 floors의 價格決定을 시도하고자 한다.

2. 旣存硏究

이자율파생상품의 가격결정을 위한 利子率 模型은 크게 두 부류로 분류할 수 있다. 그 첫 번째로 현물이자율을 이용한 均衡模型으로 전체 其間構造를 현물이자율을 이용하여 추정한다. 즉, 위험중립세계에서 단기이자율(r)의 확률과정을 유도 후 그로부터 채권가격에 미치는 영향을 파악한다. 확률과정의 차이에 따라 대표적으로 Vasicek(1977), Cox, Ingersoll, and Ross(1985), Longstaff and Schwartz(1992) 등의 모형이 있다. 이렇게 현물이자율을 이용한 모형은 기초 변수의 범주 내 다양한 움직임이 기간구조에 어떻게 영향을 미칠 것인지에 대한 세부적인 예측이 가능하다는 장점이 있다. 두 번째 Ho and Lee(1986)와 Heath, Jarrow, and Morton(1990)과 같이 선도이자율을 이용한 無差益 모형이 있다. 즉 순간선도이자율의 움직임을 포착하는 데 주력하는 모형이 그것이다. 기울기(drift)는 무차익조건하에서 결정되며, 변동성은 전체 기간구조의 확률과정을 가장 잘 묘사하도록 결정된다. 특히 변동성이 확률과정을 따르는 경우는 이자율의 Markov 특성이 깨지므로 닫힌 해가 존재하지 않게 된다. 따라서 닫힌 해를 얻기 위해서는 변동성의 확률과정에 특정한 제약을 가하게 되며 여기서 다양한 모형들의 갈래가 형성된다.(2) 이러한 선도이자율을 이용한 모형의 장점은 현재 이자율 기간구조와 정확히 일치하도록 구성되므로 실제 채권

시장의 去來價格과 일치하도록 설계된다는 점이다. 문제는 미래시점의 이자율인 선도이자율이 직접적으로 관찰이 불가능하며 균형모형과 달리 適正價格을 제시하지는 못한다는 단점을 갖는다.

균형모형은 실제 정보와 독립적인 기간구조를 만듦으로 다소 현실적인 가격과 괴리감이 발생할 수는 있다. 그러나 현재 시장에서 거래되고 있는 채권들의 거래가격이 아닌 이론적 적정가격을 제시함으로써 과소평가 내지 과대평가의 여부를 확인할 수 있다는 데 강점을 갖는다. 특히 현 시장에서의 거래가격에 대한 정확도를 확신하지 못하는 경우 균형모형은 그 적합성을 가진다.

본 연구에서는 파생상품의 가격산출이 용이하고 이자율 예측가능성 높은 것으로 알려진 대표적 균형모형인 Vasicek 확률모형하에서 변동금리채(FRN)와 대표적 이자율파생상품인 caps, floors의 가격결정을 위한 닫힌 해를 구해 보고자 한다.

3. 變動金利債(FRN) 評價

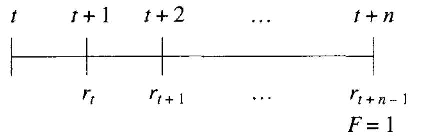
쿠폰利子率(coupon rate)이 만기 $\phi^{(3)}$를 갖는 채권의 滿期收益率(YTM)인 變動金利債券의 경우를 대상으로 하자. EMM(equivalent martingale measure) Q하에서, 이자율이 다음 Vasicek 확률과정을 따름을 가정한다.

$$
\begin{aligned}
dr(t) &= [k\,(\theta - r(t)) - \lambda]dt + \sigma d\mathcal{T} \\
&= [(k\theta - \lambda) - kr(t)]dt + \sigma d\mathcal{T}^{(4)}
\end{aligned}
$$

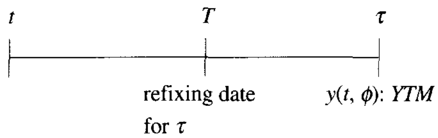
변동금리채권가격 $P_{FRN}(t)$는 不確定的인(uncertain) 쿠폰들에 대한 포트폴리오 가치와 만기에 1을 지급하는 무이표채(zero-coupon bond) 가격 $P(t, \tau)$으로 구성된다. 이때 다음과 같은 期間構造하의 쿠폰(stochastic coupon)가격 계산에 초점을 맞춘다.

T시점은 τ시점을 위한 쿠폰이자율을 설정하는 再設定日(refixing date)이다. τ시점은 쿠폰지급일로서 액면(F)을 1로 설정한 경우, 만기 ϕ의 만기수익률(YTM) $y(T, \phi)$만큼을 받게 된다. 따라서 이러한 흐름을 갖는 t시점에서의 變動金利債價格은 다음과 같이 정의된다.

(2) absolute, linear absolute, square root, proportional, linear proportional, exponential 등.
(3) 직전의 재설정일(resetting date)로부터의 기간을 의미한다.
(4) λ는 위험의 시장가격(market price of risk)을 의미한다.



〈그림 2〉 FRN의 總期間 흐름



〈그림 3〉 FRN 期間構造

$$
\begin{aligned}
P_{FRN}(t) &= E^Q\left[e^{-\int_t^\tau r(s)ds}\cdot y(T,\phi)\right] \\
&= E^Q\left[e^{-\int_t^\tau r(s)ds}\cdot\left\{-\frac{1}{\phi}(\ln A(\phi)-B(\phi)r(T))\right\}\right]^{(5)} \\
&= -\frac{1}{\phi}(\ln A(\phi))E^Q\left[e^{-\int_t^\tau r(s)ds}\right]+\frac{B(\phi)}{\phi}\underbrace{E^Q\left[e^{-\int_t^\tau r(s)ds}r(T)\right]}_{①}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

식 (3.1)에서 ①은 다음과 같다.

$$
E^Q\left[e^{-\int_t^\tau r(s)ds}r(T)\right]=E^Q\left[e^{-\int_t^T r(s)ds}\cdot P(T,\tau)\cdot r(T)\right]
\tag{3.2}
$$

식 (3.2)를 풀어내기 위해 다음 확률과정하에서 $e^{-\int_t^T r(s)ds}$가 도출된다.

다음 Q-measure 下에서 변동금리채가격 $P(t,T)$는 Ito 보조정리에 의거, 다음이 성립한다.

$$
\begin{aligned}
\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} &= rdt+\frac{\frac{\partial P}{\partial r_t}}{P(t,T)}\sigma dz \\
&= rdt+\frac{-B(t,T)\cdot A(t,T)\cdot e^{-B(t,T)\cdot r}}{A(t,T)\cdot e^{-B(t,T)\cdot r}}\sigma dz
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

(5) Vasicek model에 의거, $y(T,\phi)$ 재정리

$$= rdt - B(t,T)\sigma dz$$

$$e^{-\int_t^T r(s)ds} = P(t,T) \cdot e^{-\int_t^T \frac{1}{2} B(s,T)^2 \sigma^2 ds - \int_t^T B(s,T)\sigma d\tilde{T}}$$

이를 목적하는 구간 $[T, \tau]$에 대해 $P(T,\ \tau)$로 정리하면 다음과 같다.

$$P(T,\tau) = e^{-\int_T^\tau r(s)ds + -\int_T^\tau \frac{1}{2} B(s,\tau)^2 \sigma^2 ds + \int_\tau^\tau B(s,\tau)\sigma d\tilde{T}} \tag{3.4}$$

따라서 식 (3.2)는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} E^Q\left[e^{-\int_t^T r(s)ds} \cdot P(T,\tau) \cdot r(T)\right] &= P(t,\tau) \cdot E^Q\left[e^{-\frac{1}{2}\int_t^T B(s,\tau)^2 \sigma^2 ds - \int_t^T B(s,\tau)\sigma d\tilde{T}} \cdot r(T)\right] \\ &= P(t,\tau) \cdot E^{\tilde{Q}}[r(T)] \end{aligned} \tag{3.5}$$

이때 forward measure $\tilde{Q}$의 $dr(t) = [k(\theta - r(t)) - \lambda - B(t, T)\ \sigma^2]dt + \sigma d\tilde{T}$하에서 다음이 성립한다.

$$r(T) = r(t) \cdot e^{-k(T-t)} + \underbrace{\int_t^T e^{-k(T-s)}((k\theta - \lambda) - B(\tau,s)\sigma^2)ds}_{②} + \int_t^T e^{-k(T-s)}\sigma dw(s) \tag{3.6}$$

식 (3.6)에서 ②는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\int_t^T e^{-k(T-s)}((k\theta - \lambda) - B(\tau,s)\sigma^2)ds \\ &= \frac{\sigma^2}{2k^2}[e^{-k(\tau-T)}e^{-k(\tau-t+T-t)} + 2(e^{-k(T-t)} - 1)] + \frac{k\theta - \lambda}{k}(1 - e^{-k(T-t)}) \end{aligned} \tag{3.7}$$

따라서 $E^{\tilde{Q}}[r(T)]$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &E^{\tilde{Q}}[r(T)] \\ &= r(t) \cdot e^{-k(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2k^2}[e^{-k(\tau-T)}e^{-k(\tau-t+T-t)} + 2(e^{-k(T-t)} - 1)] + \frac{k\theta - \lambda}{k}(1 - e^{-k(T-t)}) \end{aligned} \tag{3.8}$$

최종적인 price는 다음과 같다.

$$\text{price} = -\frac{1}{\phi}(\ln A(\phi))E^{Q}\left[e^{-\int_t^{\tau} r(s)ds}\right] + \frac{B(\phi)}{\phi}E^{Q}\left[e^{-\int_t^{\tau} r(s)ds}r(T)\right]$$

$$= -\frac{P(t,\tau)}{\phi}\ln A(\phi) + \frac{B(\phi)}{\phi}P(t,\tau)E^{\tilde{Q}}[r(T)]$$

$$(3.9)\quad = \frac{P(t,\tau)}{\phi}\Big[-\ln A(\phi) + B(\phi)\cdot$$

$$\left\{r(t)e^{-k(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2k^2}[e^{-k(\tau-T)} - e^{-k(\tau-t+T-t)} + 2(e^{-k(T-t)} - 1)] + \frac{k\theta-\lambda}{k}(1-e^{-k(T-t)})\right\}\Big]$$

$$= \frac{P(t,\tau)}{\phi}\left[-\ln A(\phi) + B(\phi)\left\{r(t)e^{-k(T-t)} + \frac{1}{2}B(T-t)\sigma^2 + \frac{k\theta-\lambda}{k}(1-e^{-k(T-t)})\right\}\right]$$

이때 Vasicek 모형에 근거한 가격 $P(t,\tau) = A(\phi)\,e^{-B(\phi)r(t)}$의 해는 다음과 같다.

$$(3.10)\quad B(\phi) = \frac{1-e^{-k\phi}}{k}$$

$$A(\phi) = \exp\left[\frac{(B(\phi)-\phi)(k(k\theta-\lambda)-\frac{\sigma^2}{2})}{k^2} - \frac{\sigma^2 B(\phi)^2}{4k}\right]$$

4. 利子率派生商品 評價

4.1. Caps 價格評價

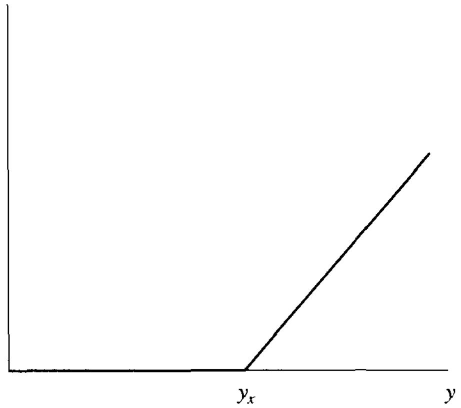
Cap은 미래 일정 시점에서 Max(변동이자율 $- y_c$, 0)를 주는 계약으로 이자율에 대한 Call option으로 볼 수 있다.

y_x를 cap rate라 할 때 다음과 같이 가격이 결정된다.

$$P_{caplet}$$

$$(4.1)\quad = E^{Q}\left[e^{-\int_t^{\tau} r(s)ds}\cdot\max(y(T,\phi)-y_x)\right]$$

$$= \underbrace{P(t,T)\int_R^{\infty}P(T,\tau)y(T,\phi)f(r(T)\mid r(t))dr(T)}_{③} - \underbrace{P(t,T)y_x\int_R^{\infty}P(T,\tau)f(r(T)\mid r(t))dr(T)}_{④}$$ [(6)]



〈그림 4〉 Caplet payoff

식 (4.1)에서 ④는 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&\int_R^{\infty} P(T,\tau) f(r(T) \mid r(t)) dr(T) \\
(4.2)\quad &= A(\tau - T)\int_R^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{1}{2v^2}\underbrace{(r(T)^2 - 2mr(T) + m^2 + 2B(\tau - T)v^2 r(T))}_{⑤}\right) dr(T)
\end{aligned}
$$

식 (4.2)에서 ⑤를 다음과 같이 재변환한다.

$$
\begin{aligned}
&r(T)^2 - 2mr(T) + m^2 + 2B(\tau - T)v^2 r(T) \\
(4.3)\quad &= [r(T) - (m - B(\tau, T)v^2)]^2 + 2mB(\tau - T)v^2 - B(\tau - T)^2 v^4
\end{aligned}
$$

이를 적용하여 다시 정리하면,

(6) 다음 이자율 확률과정하에서 다음의 관계가 성립한다.

$$dr(t) = [k(\theta - r) - B(t, T)\, \sigma^2]dt + \sigma dz$$

Vasicek model하에서 $y(T, \phi) = -\frac{1}{\phi}[\ln A(\phi) - B(\phi) r(T)] = y_x$

따라서 $R = r(T) = \frac{\phi}{B(\phi)}\left[y_x + \frac{1}{\phi}(\ln A(\phi)\right]$

$$= A(\tau - T)\int_R^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}v}$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2v^2}(r(T)-(m-B(\tau,T)v^2))^2 - \frac{1}{2v^2}(2mB(\tau-T)v^2 - B(\tau,T)^2v^4)\right]dr(T) \tag{4.4}$$

$$= \underbrace{A(\tau-T)\exp\left[-mB(\tau-T)+\frac{1}{2}B(\tau-T)^2v^2\right]}_{⑥}\cdot N(d_2)^{(7)}$$

이때의

$$m = r(t)e^{-k(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2}B(T-t)^2 + \frac{k\theta-\lambda}{k}(1-e^{-k(T-t)}) \tag{4.5}$$

단순화를 위해 위험프리미엄을 $\lambda = 0$으로 가정하는 경우,

$$\begin{aligned} m &= r(t)e^{-k(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2}B(T-t)^2 + \theta(1-e^{-k(T-t)}) \\ v^2 &= \frac{\sigma^2}{2k}(1-e^{-2k(T-t)}) \\ d_2 &= \frac{-\frac{\phi}{B(\phi)}(y_x + \frac{1}{\phi}\ln A(\phi)) + (m - B(\tau-T)v^2)}{v} \end{aligned} \tag{4.6}$$

식 (4.4)의 ⑥은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} &A(\tau-T)\exp\left[-mB(\tau-T)+\frac{1}{2}B(\tau-T)^2v^2\right] \\ &= \underbrace{\exp[-B(\tau-T)e^{-k(T-t)}r(t)]}_{⑦}\cdot \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\underbrace{A(\tau-T)\exp\left[\frac{1}{2}B(\tau-T)B(T-t)^2\sigma^2 - B(\tau-T)\theta(1-e^{-k(T-t)}) + \frac{1}{2}B(\tau-T)^2v^2\right]}_{⑧}$$

(7) $1 - N(z) = N(-z)$

식 (4.7)의 ⑦은 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\exp[-B(\tau-T)e^{-k(T-t)}r(t)]=\frac{\exp[-B(\tau-t)r(t)]}{\exp[-B(T-t)r(t)]} \tag{4.8}$$

식 (4.7)의 ⑧에 log를 취하여 정리하면,

$$\begin{aligned}&\ln\left\{A(\tau-T)\exp\left[\frac{1}{2}B(\tau-T)B(T-t)^2\sigma^2-B(\tau-T)\theta(1-e^{-k(T-t)})+\frac{1}{2}B(\tau-T)^2v^2\right]\right\}\\&=\ln A(\tau-t)-\ln A(T-t)\end{aligned} \tag{4.9}$$

지금까지 전개된 식 (4.1)의 ④를 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&P(t,T)y_x\int_R P(T,\tau)f(r(T)\mid r(t))dr(T)\\&=y_x\cdot P(t,T)\cdot\frac{\exp[-B(\tau-t)r(t)]}{\exp[-B(T-t)r(t)]}\cdot\frac{A(\tau-t)}{A(T-t)}\cdot N(d_2)\\&=y_x\cdot P(t,\tau)\cdot N(d_2)\end{aligned} \tag{4.10}$$

식 (4.1)에서 ③은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}&P(t,T)\int_R P(T,\tau)y(T,\phi)f(r(T)\mid r(t))dr(T)\\&=P(t,T)\int_R A(\tau-T)e^{-B(\tau-T)r(T)}\left[-\frac{1}{\phi}\{\ln A(\phi)-B(\phi)r(T)\}\right]\\&\quad\frac{1}{\sqrt{2\pi}v}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r(T)-m}{v}\right)^2\right]dr(T)\\&=\underbrace{P(t,T)\left[-\frac{1}{\phi}\ln A(\phi)\right]\int_R A(\tau-T)e^{-B(\tau-T)r(T)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}v}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r(T)-m}{v}\right)^2\right]dr(T)}_{⑨}\\&\quad\underbrace{+P(t,T)\left[\frac{1}{\phi}B(\phi)\right]\int_R A(\tau-T)e^{-B(\tau-T)r(T)}r(T)\frac{1}{\sqrt{2\pi}v}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r(T)-m}{v}\right)^2\right]dr(T)}_{⑩}\end{aligned} \tag{4.11}$$

식 (4.11)에서 ⑨는 다음과 같이 정리된다.

$$(4.12)\quad \begin{aligned} &P(t,T)\left[-\frac{1}{\phi}\ln A(\phi)\right]\int_R A(\tau-T)e^{-B(\tau-T)r(T)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}v}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r(T)-m}{v}\right)^2\right]dr(T) \\ &= -\frac{1}{\phi}\ln A(\phi)P(t,\tau)\cdot N(d_2) \end{aligned}$$

식 (4.11)에서 ⑩은 다음과 같이 정리된다.

$$(4.13)\quad \begin{aligned} &P(t,T)\left[\frac{1}{\phi}B(\phi)\right]\int_R A(\tau-T)e^{-B(\tau-T)r(T)}r(T)\frac{1}{\sqrt{2\pi}v}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r(T)-m}{v}\right)^2\right]dr(T) \\ &= P(t,\tau)\left[\frac{1}{\phi}B(\phi)\right]\left\{(m-B(\tau-T)v^2)N(d_2)+v\eta\left(\frac{R-(m-B(\tau-T)v^2)}{v}\right)\right\}^{(8)} \end{aligned}$$

따라서 식 (4.1)에서 ③은 ⑨+⑩이므로 다음과 같이 정리된다.

$$(4.14)\quad \begin{aligned} &\int_R^\infty P(T,\tau)y(T,\phi)f(r(T)\mid r(t))dr(T) \\ &= -\frac{1}{\phi}\ln A(\phi)P(t,\tau)\cdot N(d_2) \\ &\quad + P(t,\tau)\left[\frac{1}{\phi}B(\phi)\right]\left\{(m-B(\tau-T)v^2)N(d_2)+v\eta\left(\frac{R-(m-B(\tau-T)v^2)}{v}\right)\right\} \\ &= P(t,\tau)\left[-\frac{1}{\phi}\ln A(\phi)+\frac{1}{\phi}B(\phi)(m-B(\tau-T)v^2)\right]N(d_2) \\ &\quad + P(t,\tau)\frac{1}{\phi}B(\phi)\cdot v\eta\left(\frac{R-(m-B(\tau-T)v^2)}{v}\right) \end{aligned}$$

최종적인 caplet 공식은 다음 식 (4.15)로 정리된다.

(8) $\eta(\cdot)$ = standard normal pdf

$$
\begin{aligned}
&P_{caplet} \\
&= \underbrace{P(t,T)\int_R^{\infty} P(T,\tau)y(T,\phi)f(r(T)\mid r(t))dr(T)}_{③} - \underbrace{P(t,T)y_x\int_R^{\infty} P(T,\tau)f(r(T)\mid r(t))dr(T)}_{④} \\
&= P(t,\tau)\left[\left(-\frac{1}{\phi}\{\ln A(\phi) - B(\phi)(m - B(\tau - T)v^2) - y_x\}\right)N(d_2)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\phi}B(\phi)v\eta\left(\frac{R-(m - B(\tau - T)v^2)}{v}\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

이때

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{\phi}{B(\phi)}\left(y_x + \frac{1}{\phi}\ln A(\phi)\right) \\
m &= r(t)e^{-k(T-t)} - \frac{1}{2}B(T-t)^2\sigma^2 + \frac{k\theta - \lambda}{k}(1 - e^{-k(T-t)}) \\
v^2 &= \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2k(T-t)})
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

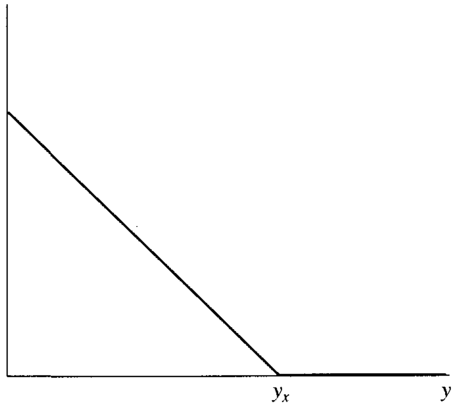
$\eta(\cdot)$ = standard normal pdf

$N(\cdot)$ = standard normal cdf

4.2. floorets 評價

미래 일정 시점에서 Max[$y_x - y(\tau, \phi)$, 0]을 주는 계약으로 이자율에 대한 put option으로 간주할 수 있다. 이때 y_x는 floor rate를 의미한다. Floor의 가격은 cap 가격결정에 사용한 truncated 분포의 moment 계산을 준용하여 계산할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&P_{Floorlet} \\
&= E^Q\left[e^{-\int_t^{\tau} r(s)ds}\cdot Max(y_x - y(\tau,\phi),0)\right] \\
&= P(t,T)E^Q[P(T,\tau)\cdot Max(y_x - y(\tau,\phi)),0] \\
&= \underbrace{P(t,T)y_x\int^R P(T,\tau)f(r(T)\mid r(t))dr(T)}_{⑪} - \underbrace{P(t,T)\int^R P(T,\tau)y(\tau,\phi)f(r(T)\mid r(t))dr(T)}_{⑫}
\end{aligned} \tag{4.17}
$$



〈그림 5〉 Floorlet payoff

where $R = \frac{\phi}{B(\phi)}\left(y_x + \frac{1}{\phi}\ln A(\phi)\right)$

식 (4.17)에서 ⑪은 다음과 같이 정리된다.

$$P(t,T)y_x\int^R P(T,\tau)f(r(T)\mid r(t))dr(T) = P(t,\tau)\,y_x N(-d_2) \tag{4.18}$$

식 (4.17)에서 ⑫는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} &P(t,T)\int^R P(T,\tau)y(\tau,\phi)f(r(T)\mid r(t))dr(T) \\ &= P(t,\tau)\left(-\frac{1}{\phi}\ln A(\phi)\right)N(-d_2) \\ &+ P(t,\tau)\left(\frac{B(\phi)}{\phi}\right)\cdot\left[(m-B(\tau-T)v^2)N(-d_2) - v\eta\left(\frac{R-(m-B(\tau-T)v^2)}{v}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.19}$$

따라서 최종적인 Floorlet의 가격은 다음과 같이 정리된다.

$$P_{Floorlet} = ⑪ - ⑫$$

$$= P(t,\tau)y_x N(-d_2) - P(t,\tau)\left(-\frac{1}{\phi}\ln A(\phi)\right)N(-d_2)$$

$$- P(t,\tau)\left(\frac{B(\phi)}{\phi}\right)\cdot\left[(m - B(\tau - T)v^2)N(-d_2) - v\eta\left(\frac{R-(m-B(\tau-T)v^2)}{v}\right)\right] \tag{4.20}$$

$$= P(t,\tau)\left[\left\{y_x + \frac{1}{\phi}\ln A(\phi) - \frac{B(\phi)}{\phi}(m - B(\tau - T)v^2)\right\}N(-d_2)\right.$$

$$\left. + \frac{B(\phi)}{\phi}v\eta\left(\frac{R-(m-B(\tau-T)v^2)}{v}\right)\right]$$

이때의

$$R = \frac{\phi}{B(\phi)}\left(y_x + \frac{1}{\phi}\ln A(\phi)\right)$$

$$m = r(t)e^{-k(T-t)} - \frac{1}{2}B(T-t)^2\sigma^2 + \theta(1 - e^{-k(T-t)})$$

$$v^2 = \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2k(T-t)})$$

$$-d_2 = \frac{\frac{\phi}{B(\phi)}\left(y_x + \frac{1}{\phi}\ln A(\phi)\right) - (m - B(\tau - T)v^2)}{v}$$

5. 結論 및 示唆點

본 연구는 變動金利債券 및 대표적 利子率派生商品인 caps와 floorer에 대한 의의를 살펴보고, Vasicek 모형하에서 이들의 합리적인 가격결정을 위한 닫힌 해를 계산하였다. 변동금리채권은 발행자에게 추가조항을 통한 발행비용의 절감을 유도해 주며, 금리상승기와 같이 변동금리선호자가 많은 상황에서 자금조달을 용이하게 해주며, 금리하락기에는 저렴한 재무비용을 누리게 해준다. 투자자에게는 투자자별 상황에 적합한 선택권이 확장된다는 장점과 금리상승기의 이익을 누릴 수 있다는 장점이 있다. 점차 활성화되고 있는 변동금리채권과 이자율파생상품 시장의 현실에 부응하여 올바른 價格評價가 요구되는 시점이다. 본 연구에서는 이러한 가격평가를 시행, 그 닫힌 해를 계산하여 발행자와 투자자를 위한 올바른 가격의 기준선을 제시하고자 시도하였다.

우리나라에서는 1994년 변동금리채권이 처음 발행된 이래 복잡다변화된 다양한 債券運用戰略이 요구되고 있는 시점이다. 또한 발행자와 투자자들은 기존에 존재하는 단순형 상품에 더해 복잡·다변화 현금흐름이 내재된 신종채권들을 요구하고 있다. 본 연구는 복합형 利子率派生商品의 價格決定을 위한 그 출발점이 될 수 있으며 정확한 이론적 배경을 지닌 이론가의 제시를 통해 현업발전의 배경이 되고자 한다.

서울大學校 經濟學部 副敎授
151-742 서울특별시 관악구 신림동 산 56-1
전화: (02)880-5684
팩스: (02)886-4231
E-mail: ahnd@snu.ac.kr

高麗大學校 經營學科 博士課程
151-742 서울특별시 관악구 신림동 산 56-1
전화: 010-7679-1905
E-mail: bugjazz@naver.com

參 考 文 獻

Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross(1985): "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, **53**, 385-408.

Heath, D., R. A. Jarrow, and A. Morton(1990): "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation," *Econometrica*, **60**, 77-105.

Ho, T. S. Y., and S. B. Lee(1986): "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims," *Journal of Finance*, **41**, 1011-1029.

Longstaff, F. A., and E. S. Schwartz(1992): "Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two Factor General Equilibrium Model," *Journal of Finance*, **47**, 1259-1282.

Vasicek, O.(1977): "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*. **5**. 177-188.