# 게임理論的 接近法을 통한 서울大學校 社會科學大學의 學科配定問題(1)

金 眞 我

본 논문에서는 서울대학교 사회과학대학에서 시행되고 있는 학과 배정 방식을 게임이론적 접근법을 통하여 분석한다.(2) 게임이론적 관점에서 학생들의 선호 순서와 각 학과의 선발요건에 의거하여 시행되는 학과 배정은 다대일 매칭 문제로 분석될 수 있으며, 학과가 배정 대상을 제한하기 위하여 우선선발요건을 부과하고 있는 점에 초점을 맞추었다. 그 분석 결과 서울대학교 사회과학대학에서 2008년도에 시행된 학과 배정 방식은 매칭 규칙이 갖추어야 할 바람직한 성질인 파레토 효율성, 전략적 무용성 그리고 공정성 등을 충족하지 않음을 보였다. 이러한 학과 배정 규칙을 개선하기 위하여 두 방안을 제시하였는데 그 중 하나는 *봉쇄 조건*이며 또 다른 하나는 학과가 *크기 조건*이나 *순환 조건* 중 하나를 만족시켜야 한다는 것이다. *봉쇄 조건*은 낮은 $g$-평점의 학생이 선점을 이유로 배정의 혜택을 누리는 것을 방지하며 학과가 *크기 조건*이나 *순환 조건* 중 하나의 조건을 만족하면 학과 배정이 첫 번째 단계에서 완료되므로 배정 과정에서 선발요건이 균일하게 적용되고, 학과 배정 규칙이 *학과 정원 단조성*을 만족한다. 또한, *학과 배정 잠정적 허가 방식*을 소개하였는데 이 학과 배정 방식에서 학과가 *크기 조건*을 만족시키면 효율적인 학과 배정이 이루어진다.

## 1. 序 論

매칭(matching) 문제는 현실세계에서 다양한 모습으로 존재한다. 결혼 문제(marriage problem)로 잘 알려진 일대일 매칭(one-to-one matching)부터 학교의 학생선발, 회사의 직원 고용, 병원의 인턴 고용 등 다대일 매칭(many-to-one matching)에 이르기까지 그 적용범위가 넓다. 본 연구에서 분석하고 있는 학과 배정 문제(the department placement problem)는 학과와 학생의 두 당사자들을 두고, 학생들을 하나의 학과에 배정되게 하므로

---

(1) 이 논문은 2008년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었다. 논문이 나오기까지 아낌없이 지도해주시고 논평해주신 전영섭 교수님께 진심으로 감사드린다. 본 논문은 김진아(2009) 석사학위 논문임을 밝힌다.

(2) 사회과학대학에는 경제학부와 심리학과, 정치학과 등의 8개의 학과가 속해 있어, 엄밀하게는 학과 및 학부 배정 문제가 되어야 하나 이를 줄여 학과 배정 문제라고 하며, 앞으로의 논의에서도 학과로 통일하여 표현한다.

다대일 매칭 문제로 간주할 수 있다. 다대일 매칭에는 두 당사자 모두가 선호를 가지고 있는 경우와 한 당사자만 선호를 가지고 있는 경우가 있는데, 두 당사자 모두가 선호를 가지고 있는 경우로는 *大學 入學 問題*(*college admission problem*)〔Gale and Shapley(1962)〕를 들 수 있다. 이 경우 대학(college)과 학생들이 모두 상대방에 대하여 선호를 가지고 있기 때문에 학생뿐만 아니라 대학도 전략적 행동을 할 수 있으며, 학생의 후생(welfare)과 대학의 후생 모두가 분석의 대상이다. 한 당사자만 선호를 가지고 있는 경우로는 *高等學校 配定 問題*(*School choice problem*)(3)〔Abdulkadiroğlu and Sönmez(2003)〕가 있는데, 이 경우에서는 학생들은 선호를 갖는 반면 학교들은 선호가 아닌 우선순위(priority order)를 갖기 때문에 학생들의 후생만을 고려하면 된다.

이 논문에서 논의하고 있는 사회과학대학의 학과 배정은 학생과 학과들의 선호에 의해 시행되는데, 학생들은 학과들에 대하여 선호를 가지고 있으며 학과들은 우선선발요건과 평점평균에 의하여 학생들의 優先順位(priority order)를 정하게 된다. 학과 배정 규칙과 유사한 방식으로 보스톤(Boston)의 공립학교 배정을 들 수 있는데,(4) 보스톤 배정 규칙은 학생들이 진실한 선호를 제출하지 않는 경우 파레토 효율성을 충족하지 않는다〔Abdulkadiroğlu and Sönmez(2003)〕. 사회과학대학의 학과 배정 규칙(5)은 배정 대상들이 진실한 선호를 제출한 경우에도 파레토 효율적인 학과 배정이 이루어지지 못할 수 있는데 이는 학과 배정 규칙이 기존의 연구와는 달리 배정 과정이 단계적이며 각 단계마다 배정을 위해 적용하는 선발요건이 다르기 때문이다.

학과 배정 규칙은 전략적 무용성과 파레토 효율성뿐만 아니라 학과 정원 단조성, 공정성 그리고 선발요건의 존중 등 매칭 규칙이 가져야할 바람직한 많은 특성들을 충족시키지 않으므로 개선이 요구된다. 따라서 분석 과정을 통하여 학과 배정 규칙이 갖는 결함의 원인을 규명하였으며, 해결 방안으로 학과 배정 규칙에 *封鎖 條件*(*Blockade condition*)을 부여하고 학과가 *크기 條件*(*Size condition*) 또는 *循環 條件*(*Cycle condition*) 중 하나의 조건을 만족해야 한다는 것을 제시하였다. *봉쇄 조건*이 도입된 학과 배정 규칙은 낮은 g-평점의 학생이 선점을 이유로 배정의 혜택을 누리는 것을 방지하므로 학과 배정 과정

(3) 우리나라의 경우 전라북도, 경기도 그리고 서울특별시의 고교 평준화 지역에서 시행된 학생 배정 방식이 다대일 매칭 규칙으로 분석되었다〔조명환, 전영섭(2004)〕.

(4) 보스톤의 공립학교 배정은 학생들의 학교에 대한 선호 순서와 각 학교에서의 학생들의 우선순위에 의거하여 시행된다. 학생들의 우선순위는 걸어서 통학이 가능한 지역에 거주하고 있는가(walk zone)와 부모가 형제들을 같은 학교에 보내기 위해 학교에 요청하는 경우(sibling)에 의하여 결정된다. 예를 들어, 첫 번째 우선순위는 walk zone과 sibling을 모두 만족하는 학생이며 두 번째 우선순위는 sibling만을 만족한 학생이다.

(5) 앞으로는 사회과학대학의 학과 배정 규칙을 학과 배정 규칙이라고 줄여서 표기한다.

이 첫 번째 단계에서 완료되는 경우 학과 배정 규칙이 *공정성*을 만족한다. 학과 배정 규칙이 *학과 정원 단조성*을 만족하고 선발요건을 학과 배정 과정에 균일하게 적용하기 위해서는 학과가 *크기 조건*과 *순환 조건* 중 한 가지만 만족하면 되는데, *순환 조건*에서 요구되는 週期(cycle)의 형성은 *봉쇄 조건*과 결부된 학과 배정 규칙이 효율적인 매칭 결과를 도출하는 것을 방해할 수 있으므로〔Ergin(2002), Kesten(2006)〕 학과는 *크기 조건*을 만족해야 한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 제2장에서는 학과 배정 규칙과 그에 따른 모형 및 특징에 관하여 논의하였고, 제3장에서는 학과 배정 규칙이 어떠한 성질들을 충족시키는지 분석하였다. 이를 토대로 제4장에서는 학과 배정 규칙을 보완하기 위한 해결 방안을 제시하였으며 제5장에서는 이러한 논의를 정리하면서 결론을 지었다.

## 2. 學科 配定 問題

서울대학교의 사회과학대학은 사회과학계열과 인류·지리학과군으로 이루어져 있다. 사회과학계열은 경제학부, 정치학과, 심리학과 등 총 7개의 학과(부)로 구성되어 있으며 인류·지리학과군은 인류학과와 지리학과로 구성되어 있다. 사회과학대학에 입학한 학생들은 학과 배정을 신청한 후에 특정 학과에 배정받게 되며 학과 배정은 매 학년도 말에 시행된다. 각 학과는 대상자를 제한하기 위하여 별도로 추가적인 배정조건을 정할 수 있는데 이것을 '優先選拔要件'이라 한다. 배정 과정에서 학과의 '우선선발요건'이 첫 번째 선발요건이며 평점평균이 두 번째 선발요건이다.

학과 배정 과정은 세 단계로 구성되어 있다. 사회과학계열의 학생들은 첫 번째 단계에서 제1지망부터 제4지망까지 선호 순서를 행정실에 제출하고 행정실은 학과의 선발요건과 제출된 선호 순서에 의거하여 학과 배정을 시행한다. 두 번째 단계에서는 첫 번째 단계에서 미배정된 학생들이 미충원된 학과를 대상으로 다시 제1지망부터 제4지망까지 선호 순서를 행정실에 제출하며 행정실은 첫 번째 단계와 동일한 방법으로 학과 배정을 시행한다. 두 번째 단계에서도 배정받지 못한 학생들은 세 번째 단계에서 학과의 선발요건과 상관없이 미충원된 학과 중 한 학과를 선택한다. 인류·지리학과군의 학생들은 제1지망 학과와 제2지망 학과를 정하여 배정 신청을 하며 사회과학계열과 동일한 방법으로 학과 배정을 시행한다. 당해 연도에 배정받지 못한 학생은 차후 연도에 학과 배정을 신청할 수 있으나, 당해 연도에 입학한 학생들을 우선적으로 선발한다.

2.1. 模型

학과 배정문제는 다음과 같이 정의된다. $S = \{s_1, \cdots, s_n\}$는 학과 배정을 신청한 학생들의 집합이며 $D = \{d_1, \cdots, d_m\}$는 사회과학대학의 모든 학과들의 집합이다. 각 학과의 정원을 $q_{d_j}$라고 할 때, 정원들의 벡터(vector)는 $Q_D = (q_{d_1}, \cdots, q_{d_m})$이다. 학과 배정 문제는 학과 배정을 신청한 학생들에게 학과를 배정하는 매칭(matching) 과정으로 학생들은 반드시 하나의 학과에 배정받아야 하며 각 학과는 자신의 정원보다 많은 학생들을 선발할 수 없다. 즉, 학과 배정 규칙 $\mu : S \rightarrow D \cup \{d_0\}$[6]은 모든 $s_i \in S$에 대하여 $|\mu(s_i)| \leq 1$을 만족하며 모든 $d_j \in D$에 대하여 $|\mu^{-1}(d_j)| \leq q_{d_j}$을 만족한다.

각 학생 $s_i$의 학과들에 대한 선호 순서를 $P_{s_i}$라고 할 때, $P_s = (P_{s_1}, \cdots, P_{s_n})$는 모든 학생들의 선호 순서의 목록이다. 학과 배정 문제에서 학생들은 서로 다른 학과에 대하여 무차별한 선호를 가지지 않는다고 가정하며, 어떠한 학과에도 배정받지 않는 것보다는 배정받는 것을 더 선호한다. 즉, 모든 $s_i \in S$와 모든 $d_i, d_j \in D$에 대하여, $d_i \; P_{s_i} \; d_j$ 또는 $d_j \; P_{s_i} \; d_i$가 성립하며 $d_j \; P_{s_i} \; d_0$를 만족한다.

학생들의 평점평균들의 목록은 $f = (f^{s_1}, \cdots, f^{s_n})$이고, 학과 $d_j$의 우선선발요건 $d_j^p$들의 목록은 $D^p = (d_1^p, \cdots, d_m^p)$이다. 각 학생들은 우선선발요건의 만족여부에 따라 1이나 0의 값을 갖는다. 즉, 모든 $s_i \in S$와 모든 $d_j \in D$에 대하여,

$$d_j^p(s_i) = \begin{cases} 1 & \text{학생}s_i\text{가 우선선발요건을 만족했을 때;} \\ 0 & \text{학생}s_i\text{가 우선선발요건을 만족하지 않았을 때} \end{cases}$$

이다. 우선선발요건은 학생선발의 첫 번째 조건이기 때문에 어떤 학생이 지망 학과의 우선선발요건을 충족시키지 않았다면, 그 학생은 지망 학과의 배정 대상에서 제외된다. 따라서 우선선발요건을 만족한 학생에게 1의 값을, 그렇지 않은 학생에게 0의 값을 부여한다. 하지만 모든 학과들이 우선선발요건을 부과하는 것은 아니기 때문에 우선선발요건을 요구하지 않는 학과는 배정 대상 모두가 우선선발요건을 만족한다고 간주한다. 학과 배정 문제의 마지막 요소는 $g$-평점이다. $g$-평점은 각 학생들의 평점평균과 우선선발요건 점수의 곱(product)으로 평점평균과 우선선발요건의 만족여부를 동시에 나타낸다. 행정실은 우선선발요건의 만족 여부와 평점평균에 의거하여 학과 배정을 시행하므로 $g$-평점은 학과들이 배정 대상에게 부여하는 우선순위라 할 수 있다.

(6) $d_0$를 배정받은 학생은 어떠한 학과에도 배정받지 못한 것을 의미한다.

2.2. 選好의 制約

학과 배정 과정에서 배정받은 학과보다 무배정 $d_0$을 더 선호하는 학생들이 있을 수 있는데 진실로 선호하는 학과가 아니면 배정받지 않겠다거나 원하지 않는 학과에 배정받은 경우가 그러하다. 이러한 학생들은 학과 배정의 결과를 수용하지 않을 것이며 차후에 다시 학과 배정을 신청하려고 할 것이다. 하지만 학과 배정 문제에서 학생 $s_i$의 진실된 선호가 $d_0\, P_{s_i}\ \mu(s_i)$일지라도 학생들은 학과 배정의 결과를 수용하게 되는데 그 이유는 加重値(weight) $\delta_T$가 존재하기 때문이다. 행정실은 당해 연도에 입학한 학생을 우선적으로 배정하기 때문에 각 학생들은 우선권을 위한 '指定 年度'를 갖는다고 할 수 있다. 따라서 가중치 $\delta_T$는 다음과 같은 관계를 만족한다.

$$\delta_T = \begin{cases} 1 & \text{if } T = t; \\ 0 & \text{if } T = t + k(k = 1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$

즉, $T$를 학생이 학과 배정을 신청한 연도라고 할 때, 학생이 지정 연도 $t$에 학과 배정을 신청하였다면, 가중치 $\delta_T$는 1의 값을 갖고, 지정 연도가 아닐 때 학과 배정을 신청하였다면 가중치 $\delta_T$는 0의 값을 갖는다.

학과 배정 규칙에서 가중치 $\delta_T$는 평점평균 및 우선선발요건과 더불어 학생선발에 영향을 미치는 중요한 요소이므로 행정실은 $g$-평점과 가중치 $\delta_T$를 결합한 점수에 의거하여 학생들을 배정한다. 가중치 $\delta_T$가 결합된 $g$-평점은 신청연도가 지정 연도와 일치하느냐 하지 않느냐에 따라서 그 값이 달라지기 때문에 높은 $g$-평점을 가진 학생일지라도 지정 연도에 학과 배정을 신청하지 않는다면 그 학생은 자신의 지망 학과에 배정받지 못할 것이다. 가중된 $g$-평점은 모든 $s_i \in S$와 모든 $d_j \in D$에 대하여 다음과 같은 관계를 성립한다.

$$\delta_T\, g^i_{d_j} = \begin{cases} g^i_{d_j} & \text{if } T = t; \\ 0 & \text{if } T = t + k(k = 1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$

그러므로 어떤 학생이 현재 배정받은 학과보다 무배정을 더 선호하여 차후 연도에 학과 배정을 다시 신청한다면, 그 학생은 현재 배정받은 학과보다 선호도가 더 낮은 학과에 배정받을 것이므로 당해 연도의 학과 배정 결과를 수용하게 된다.

### 2.3. 優先 選拔 要件

사회과학대학의 학과들 중 어떤 학과는 우선선발요건을 매 단계 요구하거나 첫 번째 단계에서만 요구하는 반면 전혀 요구하지 않는 학과들도 있는데 이것은 학과들마다 우선선발요건의 적용 정도가 다르다는 의미한다. 그 원인을 알아보기 위하여 $g$-평점을 다른 방향에서 접근해 보도록 하겠다. 학생들의 $g$-평점은 평점평균과 우선선발요건의 점수에 의해 결정되므로 어떤 학생이 학과 $d_j$에 배정받기를 희망한다면 학과 $d_j$의 우선선발요건을 만족해야 한다. 따라서 각 학과가 요구하는 우선선발요건의 만족 여부는 학과 배정을 신청한 학생들의 선호에 의존하게 된다.

$$g^i_{d_j} = f^{s_i} * d^p_j(s_i) = f^{s_i} * d^p_j(P_{s_i})$$

학생들의 선호에 의하여 학과들이 인기학과와 비인기학과로 나뉘게 되므로 학과 배정을 시행할 때 학과마다 수용 가능한 학생들의 수에 차이가 발생한다. 인기학과의 경우 배정을 희망하는 많은 학생들이 요구되는 우선선발요건을 충족하기 때문에 수용 가능한 학생의 수가 정원에 비해 많아지는 반면 비인기학과의 경우 소수의 학생들만이 우선선발요건을 만족할 것이므로 수용 가능한 학생의 수는 정원보다 적어지게 된다. 이러한 차이에도 불구하고, 각 학과는 외부적으로 주어진 정원만큼의 학생을 선발하려고 할 것이다.

모든 $s_i \in S$와 모든 $d_j \in D$에 대하여, 학과 $d_j$를 지망한 학생들 중 수용 가능한 학생들의 집합이 $S_{d_j} = \{s_i \in S | g^i_{d_j} > 0\}$이고 우선선발요건의 적용 정도를 $I_{d_j}$라고 할 때, 다음과 같은 세 가지의 적용 정도가 존재한다.

- $I_{d_j}$: 우선선발요건의 적용 정도
  - $g$-평점을 모든 단계에 적용한다. : $I^A_{d_j}$
  - $g$-평점을 제1단계에만 적용한다. : $I^1_{d_j}$
  - $g$-평점을 모든 단계에 적용하지 않는다. : $I^0_{d_j}$

각 학과는 정원만큼의 학생을 선발하기 위하여, 우선선발요건의 적용 정도에 차등을 두어 집합 $S_{d_j}$의 크기를 조절한다.

$$I_{d_j} = \begin{cases} I_{d_j}^{A} & \text{if} \, |S_{d_j}| > q_{d_j} \\ I_{d_j}^{1} & \text{if} \, |S_{d_j}| \leq q_{d_j} \\ I_{d_j}^{0} & \text{if} \, |S_{d_j}| < q_{d_j} \end{cases}$$

정원에 부합하게 학생들을 선발하기 위하여 인기학과는 수용 가능한 학생들의 수를 적절하게 감소시키기 위해 우선선발요건을 매 단계 또는 첫 번째 단계에서 요구해야 하며 그렇지 않은 학과는 많은 학생들을 수용 가능한 학생들로 간주하기 위해 우선선발요건을 요구하지 않아야 하므로 우선선발요건의 적용 정도는 학과마다 차이가 있다.

2.4. 學科 配定 規則의 方式

학생들은 학과들에 대한 선호 순서를 행정실에 제출하며 학과들은 우선선발요건과 평점평균을 선발요건으로 제시한다. $g$-평점은 두 가지 선발요건을 동시에 나타내므로 각 학과에서의 학생들의 우선순위는 $g$-평점에 의하여 결정된다. 행정실은 학생들의 선호 순서와 학과의 선발요건에 의거하여 학과 배정을 시행하며 그 방식은 다음과 같다.

제1단계

• 1 – 1단계

학생들의 제1지망만을 고려한다. 행정실은 첫 번째 지망의 우선선발요건을 만족하지 않은 학생들을 배제하고, 수용 가능한 학생들을 평점평균 순으로 배정한다. 배정 과정은 각 학과의 정원 $q_{d_j}$가 전부 채워지거나 제1지망으로 선호 순서를 제출한 학생들이 없을 때까지 진행한다.

• 1 – 2단계

미배정된 학생들의 제2지망만을 고려한다. 행정실은 두 번째 지망의 우선선발요건을 만족하지 않은 학생들을 배제하고, 수용 가능한 학생들을 평점평균 순으로 배정한다. 배정 과정은 각 학과의 정원 $q_{d_j}$가 전부 채워지거나 제2지망으로 선호 순서를 제출한 학생들이 없을 때까지 진행한다.

• 1 – 3단계

미배정된 학생들의 제3지망만을 고려한다. 행정실은 세 번째 지망의 우선선발요건을

만족하지 않은 학생들을 배제하고, 수용 가능한 학생들을 평점평균 순으로 배정한다. 배정 과정은 각 학과의 정원 $q_{d_j}$가 전부 채워지거나 제3지망으로 선호 순서를 제출한 학생들이 없을 때까지 진행된다.

- 1 – 4단계

학생들의 제4지망만을 고려한다. 행정실은 네 번째 지망의 우선선발요건을 만족하지 않은 학생들을 배제하고, 수용 가능한 학생들을 평점평균 순으로 배정한다. 배정 과정은 각 학과의 정원 $q_{d_j}$가 전부 채워지거나 제4지망으로 선호 순서를 제출한 학생들이 없을 때까지 진행한다.

제2단계

- 미배정된 학생들과 미충원된 학과들만을 대상으로 한다. 첫 번째 단계에서 어떠한 학과에도 배정받지 못한 학생들은 미충원된 학과들에 대하여 선호 순서를 행정실에 제출한다. 행정실은 선호 순서와 선발요건에 의거하여 제1단계와 동일한 방법으로 학과 배정을 실시한다.

제3단계

- 두 번째 단계에서도 미배정된 학생들과 미충원된 학과들만을 고려한다. 미배정된 학생들은 미충원된 학과들 중 하나의 학과를 선택하며 이 과정에서 학과의 선발요건은 어떠한 영향도 미치지 않는다.

학과 배정 방식을 통하여 세 번째 단계의 학과 배정 규칙은 학과들의 선발요건보다는 학과 배정 자체에 더 의미를 두고 있다는 것을 알 수 있다. 두 번째 단계에서 미배정된 학생들은 세 번째 단계에서 선발요건과 무관하게 미충원된 학과들 중 하나의 학과를 선택할 수 있으므로 자신에게 가장 큰 효용을 가져다주는 학과를 선택한다. 즉, 세 번째 단계까지 미충원된 학과들의 집합이 $D^3$이고, 세 번째 단계까지 미배정된 학생들의 집합이 $S^3$이며 $\mu^3$가 세 번째 단계에서의 학과 배정일 때, 모든 $s_i \in S^3$와 모든 $d_j \in D^3$에 대하여

$$\mu^3(s_i) = \{d_j \in D^3 \mid \max(P_{s_i})\}$$

의 관계가 성립한다. 이러한 특성으로 인하여 학과 배정 규칙은 바람직한 성질을 잃게 되는데 그것은 다음 장에서 살펴보도록 하겠다.

**定理 1**: 학과 배정 규칙은 가중치 $\delta_T$와 세 번째 단계의 배정 규칙으로 인하여 학과 배정을 신청한 학생들 모두에게 하나의 학과를 배정한다.

## 3. 學科 配定 規則의 特性

본 장에서는 학과 배정 규칙의 특성들에 관하여 분석을 해보고자 한다. 결론적으로, 학과 배정 규칙은 전략적 무용성(strategy-proofness), 공정성(fairness), 학과 정원 단조성(quota monotonicity) 등 바람직한 여러 특성들을 만족하지 않으며 선발요건도 존중하지 않는다. 학과 배정 규칙이 매칭 규칙이 가져야 할 바람직한 성질들을 충족하지 않음에도 불구하고 이러한 분석이 의미가 있는 이유는 학과 배정 규칙이 갖는 결함의 원인을 규명할 수 있으며 그것을 토대로 더 나은 학과 배정을 위한 해결 방안을 모색할 수 있기 때문이다.

### 3.1. 戰略的 無用性(Strategy-Proofness)

매칭(matching) 규칙은 다음의 조건을 만족하는 선호 순서 $P'_{s_i}$가 없을 때 전략적 무용성을 만족한다. 즉, 학생 $s_i$를 제외한 모든 학생들의 선호 순서의 목록이 $P_{-s_i}$이고 학생 $s_i$의 거짓된 선호 순서가 $P'_{s_i}$일 때, 모든 $s_i \in S$와 모든 $P_{s_i}$, $P_{-s_i}$에 대하여

$$\mu(P'_{s_i}, P_{-s_i}) \;\; P_{s_i} \;\; \mu(P_{s_i}, P_{-s_i})$$

인 관계를 성립시키는 선호 순서 $P'_{s_i}$가 존재하지 않아야 한다. 어떤 학생이 거짓된 선호 순서를 행정실에 제출하여 진실된 선호 순서를 제출하였을 때보다 선호도가 높은 학과에 배정이 되었다면, 그 학생은 거짓 선호를 표출함으로써 이득을 얻었으므로 학과 배정 규칙은 전략적 무용성을 충족하지 않는다.

학과 배정을 신청한 학생들은 선호 순서를 행정실에 제출할 때 우선선발요건의 만족 여부에 따라 거짓 선호를 밝힐 유인을 갖는다. 학과 배정 과정에서 우선선발요건을 만족시킨 학생들이 '우선순위'를 가지기 때문에 학생들은 선호도가 낮은 학과에 배정되는 것을 피하기 위하여[7] 진실된 선호와 상관없이 우선선발요건을 만족시킨 학과의 순위를 더

(7) 학과 배정 규칙은 학생들을 '완전 배정'하기 때문에 첫 번째 스텝에서 배정받지 못한 학생들이 부담해야 되는 위험은 커지게 된다. 첫 번째 지망 학과에 배정받지 못한 학생 $s_i$의 경우

높게 기술한 선호 순서를 제출한다. 이를 예 (3.1)을 통하여 살펴보도록 한다.

예 (3.1) $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$, $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$이며, 각 학과의 정원은 $Q_D = (q_{d_1}, q_{d_2}, q_{d_3}, q_{d_4}) = (1, 1, 2, 1)$이다. 학과들의 우선선발요건의 적용 정도는 $I_{d_j} = (I^1_{d_1}, I^1_{d_2}, I^A_{d_3}, I^1_{d_4})$이며, 모든 학생들의 선호 순서 $P_s = (P_{s_1}, P_{s_2}, P_{s_3}, P_{s_4}, P_{s_5})$와 평점평균의 목록 $f = (f^{s_1}, f^{s_2}, f^{s_3}, f^{s_4}, f^{s_5})$은 다음과 같이 주어져 있다.

$$
\begin{array}{ll}
d_2\ P_{s_1}\ d_3\ P_{s_1}\ d_1\ P_{s_1}\ d_4 & f = (f^{s_1}, f^{s_2}, f^{s_3}, f^{s_4}, f^{s_5}) \\
d_3\ P_{s_2}\ d_1\ P_{s_2}\ d_2\ P_{s_2}\ d_4 & \quad = (3.7, 3.5, 3.1, 3.0, 3.3) \\
d_3\ P_{s_3}\ d_2\ P_{s_3}\ d_1\ P_{s_3}\ d_4 & \\
d_3\ P_{s_4}\ d_2\ P_{s_4}\ d_1\ P_{s_4}\ d_4 & \\
d_1\ P_{s_5}\ d_2\ P_{s_5}\ d_3\ P_{s_5}\ d_4 &
\end{array}
$$

$d^p_{\{j\}}(s_i)$는 학생 $s_i$의 모든 학과들의 우선선발요건의 만족여부를 나타낸다.

$$
\begin{array}{ll}
d^p_{\{1,2,3,4\}}(s_1) = (1\ 0\ 1\ 0) & d^p_{\{1,2,3,4\}}(s_4) = (1\ 1\ 1\ 0) \\
d^p_{\{1,2,3,4\}}(s_2) = (1\ 1\ 1\ 0) & d^p_{\{1,2,3,4\}}(s_5) = (1\ 1\ 1\ 0) \\
d^p_{\{1,2,3,4\}}(s_3) = (1\ 1\ 1\ 0) &
\end{array}
$$

• 제1단계

제1－1단계

$$
\mu^1_1 = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ (s_5) & (-) & (s_2, s_3) & (-) \end{pmatrix}
$$

그리고 $\mu^1_1(s_1) = \mu^1_1(s_4) = d_0$

학생 $s_1$의 제1지망은 학과 $d_2$이고 학생 $s_5$의 제1지망은 학과 $d_1$이다. 나머지 학생들은

---

학생 $s_i$의 두 번째 지망 학과를 첫 번째 지망 학과로 제출한 학생들로 인하여 자신의 두 번째 지망 학과에도 배정 받지 못할 수 있다. 이러한 상황은 학생 $s_i$의 세 번째, 네 번째 지망 학과에서도 발생할 수 있기 때문에 거짓된 선호를 표출할 유인을 제공하며 이와 같은 문제점은 보스톤 배정 방식〔Ergin and Sönmez(2006)〕에서도 찾아볼 수 있다.

모두 학과 $d_3$을 제1지망으로 하였다. 학생 $s_2$, 학생 $s_3$ 그리고 학생 $s_4$ 모두가 학과 $d_3$의 우선선발요건을 충족했기 때문에 평점평균의 순서로 학과 $d_3$의 정원을 초과하지 않을 때까지 학생들이 배정되므로 학생 $s_2$와 학생 $s_3$만이 학과 $d_3$에 배정받는다. 학생 $s_5$는 학과 $d_1$에 수용가능하며 정원 초과의 문제도 없으므로 첫 번째 지망 학과 $d_1$에 배정받는다. 하지만 학생 $s_1$은 학과 $d_2$에 수용 가능하지 않고 학생 $s_4$의 평점평균은 다른 학생들에 비하여 낮으므로 첫 번째 지망 학과에 배정받지 못하고 다음 단계로 넘어가게 된다.

제1－2단계

학생들의 두 번째 지망만을 고려하여 학과 배정을 시행한다. 학생 $s_4$의 두 번째 지망 학과 $d_2$가 미충원 상태이면서 학생 $s_4$가 수용 가능하므로 학과 $d_2$에 배정된다. 학생 $s_1$의 경우, 두 번째 지망 학과 $d_3$이 1－1단계에서 정원이 모두 채워졌기 때문에 다음 단계로 넘어간다.

$$\mu_2^1 = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ (s_5) & (s_4) & (s_2, s_3) & (-) \end{pmatrix}$$

그리고 $\mu_2^1(s_1) = d_0$

제1－3단계

학생들의 세 번째 지망만을 고려한다. 학생 $s_1$의 세 번째 지망 학과 $d_1$의 정원이 이미 채워졌기 때문에 배정이 불가능하므로 다음 단계로 넘어간다.

$$\mu_3^1 = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ (s_5) & (s_4) & (s_2, s_3) & (-) \end{pmatrix}$$

그리고 $\mu_3^1(s_1) = d_0$

제1－4단계

학생들의 네 번째 지망만을 고려한다. 학생 $s_1$은 학과 $d_4$의 우선선발요건을 만족하지

않았기 때문에 수용 불가능하므로 학생 $s_1$은 첫 번째 단계에서 어떠한 학과에도 배정받지 못한다.

$$\mu_4^1 = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ (s_5) & (s_4) & (s_2, s_3) & (-) \end{pmatrix}$$

그리고 $\mu_4^1(s_1) = d_0$

학생 $s_1$은 높은 평점평균에도 불구하고 첫 번째 단계에서 어떠한 학과에도 배정받지 못하였다. 학생 $s_1$의 순서가 오기 전에 학과들의 정원이 이미 모두 채워졌거나 학과들의 우선선발요건을 만족하지 않았기 때문이다. 미배정된 학생은 두 번째 단계로 넘어가며 행정실은 첫 번째 단계와 동일한 방법으로 학과 배정을 실시한다. 학과 $d_4$는 첫 번째 단계에서만 우선선발요건을 요구하므로 학과 배정 과정은 두 번째 단계에서 완료된다.

• 제2단계

$$\mu^2 = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ (s_5) & (s_4) & (s_2, s_3) & (s_1) \end{pmatrix}$$

첫 번째 단계에서 학생 $s_1$은 학과 $d_4$의 우선선발요건을 만족하지 않았기 때문에 배제되었지만 두 번째 단계에서는 선발요건이 완화되어 수용 가능해지므로 학과 $d_4$에 배정된다. 학생 $s_1$은 가장 선호도가 낮은 학과에 배정되는데 이러한 배정을 피하기 위하여 학생 $s_1$이 거짓된 선호 순서 $P'_{s_1}$를 행정실에 제출한다고 가정해보자. 그 때의 학과 배정 결과는 다음과 같다.

$$P_{s'_1}:\ d_3\ P_{s'_1}\ d_1\ P_{s'_1}\ d_2\ P_{s'_1}\ d_4$$

$$\mu' = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ (s_5) & (s_3) & (s_1, s_2) & (s_4) \end{pmatrix}$$

학생 $s_5$와 학생 $s_2$는 기존의 배정 결과와 동일하지만 학생 $s_3$과 학생 $s_4$는 선호도가 더

낮은 학과에 배정되었다. 학생 $s_1$에 배정된 학과는 거짓된 선호 순서의 표출로 인하여 네 번째 지망 학과 $d_4$에서 두 번째 지망 학과 $d_3$으로 더 나아졌다. 학생 $s_1$은 거짓된 선호 순서를 제출하여 더 나은 학과에 배정되었으므로 학과 배정 규칙은 전략적 무용성(strategy-proofness)을 만족하지 않는다는 것을 알 수 있다.

3.2. 學科 定員 單調性(Quota monotonicity)

학과 배정을 신청한 학생들이 모두 선호하는 학과에 배정될 수 없는 이유는 각 학과의 정원이 외부적으로 정해져 있기 때문이다. 따라서 학과 정원이 증가하였을 때 모든 학생들은(약하게) 더 나은 학과에 배정될 수 있어야 하는데 이러한 성질을 *학과 정원 단조성*(8)이라 하겠다. 즉, 학과 $d_j$를 제외한 모든 학과들의 정원 목록이 $Q_{-d_j}$이고, $q'_{d_j} \geq q_{d_j}$의 관계가 성립한다고 할 때, 모든 $s_i \in S$와 모든 $d_j \in D$에 대하여,

$$\mu(q'_{d_j}, Q_{-d_j}, P_s, f, D^p)\ R_{s_i}\ \mu(q_{d_j}, Q_{-d_j}, P_s, f, D^p)$$

의 관계가 성립하면 매칭 규칙은 *학과 정원 단조성*을 만족한다.

학과 배정 과정이 첫 번째 단계에서 완료되었다면, 학과 배정 규칙은 *학과 정원 단조성*을 만족하지만, 두 번째 단계나 세 번째 단계에서 배정 과정이 완료되었다면 *학과 정원 단조성*을 충족하지 못할 수 있다. 이것을 다음 예 (3.2)를 통하여 살펴보도록 하겠다.

예 (3.2) $S = \{s_1, s_2, s_3\}$, $D = \{d_1, d_2, d_3\}$이며 각 학과의 정원은 $Q_D = (q_{d_1}, q_{d_2}, q_{d_3}) = (1, 1, 1)$이다. 각 학과들의 우선선발요건의 적용정도는 $I_{d_j} = (I^A_{d_1}, I^1_{d_2}, I^0_{d_3})$이며 모든 학생들의 선호 순서 $P_s = (P_{s_1}, P_{s_2}, P_{s_3})$와 평점평균 $f = (f^{s_1}, f^{s_2}, f^{s_3})$은 다음과 같이 주어져 있다.

$$\begin{array}{ll} d_1\ P_{s_1}\ d_2\ P_{s_1}\ d_3 & f = (f^{s_1}, f^{s_2}, f^{s_3}) \\ d_1\ P_{s_2}\ d_2\ P_{s_2}\ d_3 & \quad = (3.3,\ 3.0,\ 3.1) \\ d_3\ P_{s_3}\ d_2\ P_{s_3}\ d_1 & \end{array}$$

학생들의 학과들의 우선선발요건의 만족여부는 다음과 같다.

---

(8) *학과 정원 단조성*은 *자원 단조성*을 학과 배정 과정에 적용한 것이다. *자원 단조성*이란 추가적으로 이용 가능한 자원이 있을 때, 사람들이(약하게) 모두 이득을 얻거나(약하게) 모두 손해를 보아야 한다는 것을 의미하며〔Chun and Thomson(1988)〕, *자원 단조성*에 효율성(efficiency)을 결합한 *자원 단조성*〔Ehlers and Klaus(2003)〕은 자원의 변화가 있을 시 모두(약하게) 이득을 보는 경우만을 상정한다.

$$d^{p}_{\{1,2,3\}}(s_1) = (1\ 1\ 1)$$
$$d^{p}_{\{1,2,3\}}(s_2) = (1\ 0\ 1)$$
$$d^{p}_{\{1,2,3\}}(s_3) = (0\ 0\ 1)$$

학과 배정의 결과는 $\mu^2 = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ (s_1) & (s_2) & (s_3) \end{pmatrix}$로 두 번째 단계에서 완료된다. 이 경우에 학생 $s_2$가 학과 $d_2$에 배정될 수 있었던 것은 학과 $d_2$가 우선선발요건을 첫 번째 단계에서만 요구했기 때문이다. 학과들의 정원이 $q = (q_{d_1}, q_{d_2}, q_{d_3}) = (1, 1, 2)$로 늘어난 경우의 학과 배정 결과를 살펴보도록 하자. 학과 배정의 결과는 $\mu^1 = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ (s_1) & (-) & (s_2, s_3) \end{pmatrix}$로 첫 번째 단계에 완료된다. 학생 $s_2$는 학과 정원 증가로 인하여 두 번째 단계로 넘어가지 못하고 이전에 배정받은 학과 $d_2$보다 선호도가 더 낮은 학과 $d_3$에 배정된다. 우선선발요건을 첫 번째 단계에서만 요구하는 학과로 인하여 두 번째 단계의 학과 배정 과정에서 이득을 보는 학생이 존재할 수 있기 때문에 *학과 정원 단조성*이 충족되기 위해서는 학과 배정이 첫 번째 단계에서 완료되어야 한다.

학과 배정 규칙의 또 다른 문제점은 효율적인 배정 결과를 초래하지 않는다는 것이다. 학과 배정 과정이 단계별로 시행되며 각 단계마다 적용되는 선발요건이 다르기 때문에 배정 대상들이 진실한 선호를 표출한 경우에도 학과 배정 규칙은 파레토 효율성을 만족하지 않는다.

### 3.3. 公正性(Fairness)

매칭의 결과가 공정하지 않다면 당사자들은 그 결과를 수용하지 않으려 할 것이므로 *공정성*(fairness)〔Balinski and Sönmez(1999)〕은 매칭 규칙이 만족해야 할 가장 기본적인 성질이라고 할 수 있다. 본 연구에서 *공정성*이란 더 높은 $g$-평점을 가지고 있는 학생이 그렇지 않은 학생보다 더 나은 학과에 배정될 수 있어야 한다는 것을 의미한다. 우선선발요건은 학과 배정 신청을 받기 전에 이미 공지가 되기 때문에 일종의 공통 지식(common knowledge)으로 간주될 수 있으므로, 평점평균이 다른 학생에 비해 높은 학생일지라도 우선선발요건을 만족하지 않았다면 그것을 요구하는 학과에 배정받을 수 없는 것이 합당하다. 학생 $s_i$의 $g$-평점이 $g^i$이고 모든 학생들의 $g$-평점 목록을 $G = [g^1\ g^2\ \cdots\ g^n]$라고 하자. $\mu(s_j) = d_j$이라고 할 때, 모든 $s_i, s_j \in S$에 대하여,

$$d_j\ P_{s_i}\ \mu(s_i) \Leftrightarrow g^{sj}_{dj} > g^{si}_{dj}$$

이면 매칭 규칙은 *공정성*을 충족한다.

학과 배정 규칙은 학생들을 ‘완전 배정’하기 때문에 학과 배정 과정에서 높은 $g$–평점을 가진 학생의 순서가 오기 전에 지망 학과의 정원이 모두 채워졌다면, 정원의 일부가 더 낮은 $g$–평점의 학생들로 채워졌을지라도 높은 $g$–평점의 학생은 이미 선발된 학생들의 배정을 박탈할 수 없다. 따라서 학과 배정 규칙은 *공정성*을 충족하지 못한다. 이것을 예 (3.3)을 통하여 살펴보도록 하겠다.

예제 (3.3) $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$, $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$이고 각 학과의 정원은 $Q_D = (q_{d_1}, q_{d_2}, q_{d_3}, q_{d_4}) = (2, 1, 1, 1)$이다. 각 학과의 우선선발요건의 적용정도는 $I_{d_j} = (I^A_{d_1}, I^1_{d_2}, I^1_{d_3}, I^1_{d_4})$이다. 학생들의 선호 순서 $P_s = (P_{s_1}, P_{s_2}, P_{s_3}, P_{s_4}, P_{s_5})$와 평점평균 $f = (f^{s_1}, f^{s_2}, f^{s_3}, f^{s_4}, f^{s_5})$은 다음과 같이 주어져 있다.

$$
\begin{array}{ll}
- \; d_1 \; P_{s_1} \; d_3 \; P_{s_1} \; d_2 \; P_{s_1} \; d_4 & f = (f^{s_1}, f^{s_2}, f^{s_3}, f^{s_4}, f^{s_5}) \\
- \; d_2 \; P_{s_2} \; d_1 \; P_{s_2} \; d_4 \; P_{s_2} \; d_3 & \quad = (3.7, 3.1, 3.0, 3.3, 3.5) \\
- \; d_2 \; P_{s_3} \; d_3 \; P_{s_3} \; d_1 \; P_{s_3} \; d_4 & \\
- \; d_1 \; P_{s_4} \; d_2 \; P_{s_4} \; d_3 \; P_{s_4} \; d_4 & \\
- \; d_1 \; P_{s_5} \; d_3 \; P_{s_5} \; d_2 \; P_{s_5} \; d_4 &
\end{array}
$$

$d^p_{\{j\}}(s_i)$는 학생 $s_i$의 학과들의 우선선발요건의 만족여부를 나타낸다고 할 때, 모든 학과들에 대한 만족여부는 다음과 같다.

$$
\begin{array}{ll}
d^p_{\{1,2,3,4\}}(s_1) = (1\ 0\ 1\ 0) & d^p_{\{1,2,3,4\}}(s_4) = (1\ 1\ 0\ 0) \\
d^p_{\{1,2,3,4\}}(s_2) = (1\ 1\ 0\ 0) & d^p_{\{1,2,3,4\}}(s_5) = (1\ 0\ 0\ 0) \\
d^p_{\{1,2,3,4\}}(s_3) = (0\ 1\ 1\ 0) &
\end{array}
$$

학생 $s_i$의 학과 $d_j$에서의 $g$–평점을 $g^i_{d_j}$라고 할 때, 모든 학생들의 $g$–평점들을 $G$–matrix로 표현할 수 있는데 이것을 통하여 학과 배정 규칙의 *공정성*을 살펴볼 수 있다. 학생 $s_i$의 모든 학과들에 대한 $g$–평점이 $g^i$이고, $G = [g^1 \ g^2 \cdots g^5]'$일 때, 모든 학생들의 $g$–평점들은 다음과 같으며,

$$G=\begin{bmatrix} g^1 \\ g^2 \\ g^3 \\ g^4 \\ g^5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g^1_{d_1} & g^1_{d_2} & g^1_{d_3} & g^1_{d_4} \\ g^2_{d_1} & g^2_{d_2} & g^2_{d_3} & g^2_{d_4} \\ g^3_{d_1} & g^3_{d_2} & g^3_{d_3} & g^3_{d_4} \\ g^4_{d_1} & g^4_{d_2} & g^4_{d_3} & g^4_{d_4} \\ g^5_{d_1} & g^5_{d_2} & g^5_{d_3} & g^5_{d_4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3.7 & 0 & 3.7 & 0 \\ 3.1 & 3.1 & 0 & 0 \\ 0 & 3.0 & 3.0 & 0 \\ 3.3 & 3.3 & 0 & 0 \\ 3.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$G$–matrix와 학생들의 선호 순서에 의한 학과 배정 결과는 다음과 같다.

$$\mu^2=\begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ (s_1, s_5) & (s_2) & (s_3) & (s_4) \end{pmatrix}$$

학생 $s_4$는 학과 $d_2$에서 학생 $s_2$보다 높은 $g$–평점(i.e, $g^4_{d_2}=3.3>3.1=g^2_{d_2}$)을 가지고 있지만 학생 $s_4$의 순서가 오기 전에 이미 학과 $d_2$의 정원이 전부 채워졌기 때문에 학과 $d_2$에 배정받지 못하였다. 학생 $s_4$는 더 높은 $g$–평점에도 불구하고 학생 $s_2$의 배정을 박탈할 수 없기 때문에 학과 배정 규칙은 *공정성*을 충족하지 못한다.

### 3.4. 選拔 要件의 尊重

공정성을 다른 측면에서 살펴보도록 하자. 두 번째 단계에서도 미배정인 학생들은 세 번째 단계에서 미충원된 학과들 중 선발요건과 상관없이 하나의 학과를 선택할 수 있다. 이것은 이전 단계에서 학과 $d_j$에서 배제되었던 학생이 어떤 상황에서는 학과 $d_j$에 배정될 수 있다는 것을 의미한다. 학생 $s_i$가 현재 학과 배정 과정의 세 번째 단계에 있다고 가정해 보자. 그의 선호 순서 $P_{s_i}$와 평점평균 $f^{s_i}$ 및 우선선발요건의 만족여부가 다음과 같이 주어져 있을 때,

- $P_{s_i}$ : $d_k \ P_{s_i} \cdots P_{s_i} \ d_w$
- $f^{s_i} < f^{s_j}$ 모든 $s_j \in S \setminus s_i$에 대하여
- $d^p_j(s_i)=0$ 모든 $d_j \in D$에 대하여
- $|\mu^{-1}(d_k)| = q_{d_k}-1$

학과 배정 결과는 $\mu^3(s_i)=d_k$이다.

학과 배정의 세 번째 단계에서 학생 $s_i$의 첫 번째 지망 학과 $d_k$가 미충원 상태이므로 우선선발요건을 만족하지 않았거나 평점평균이 낮기 때문에 이전 단계에서 계속 배제되었던 학생 $s_i$는 세 번째 단계의 학과 배정 규칙으로 인하여 그의 첫 번째 지망 학과에 배정받게 된다. 따라서 학과 배정 규칙은 학과의 선발요건을 존중하지 않는다는 것을 알 수 있으며 이러한 측면은 공정한 학과 배정이 이루어지는 것을 방해할 수 있다.

## 4. 學科配定規則의 改善 方向

학과 배정 규칙은 학생들을 '완전 배정'하기 때문에 높은 $g$-평점을 가진 학생에게 지망 학과에 배정될 기회를 주지 않으며 학과 배정 과정이 첫 번째 단계에서 완료되지 않는다면 선발요건을 균일하게 적용하지 못하고 *학과 정원 단조성*을 만족하지 못한다. 이러한 문제점을 해결하기 위하여 *봉쇄*(*blockade*) *조건*과 *크기*(*size*) *조건* 또는 *순환*(*Cycle*) *조건*을 해결 방안으로 제시하였다.

### 4.1. 封鎖(Blockade) 條件

*봉쇄*(*Blockade*) *조건*은 낮은 $g$-평점을 가진 학생 $s_k$가 학과 $d_j$에 이미 배정받았더라도 높은 $g$-평점을 가진 학생 $s_i$가 학생 $s_k$의 배정을 박탈할 수 있게 한다. 이러한 조건이 없는 상황에서는 높은 $g$-평점을 가진 학생의 순서가 오기 전에 지망 학과의 정원이 모두 채워졌다면 그 정원의 일부가 더 낮은 $g$-평점을 가졌다 할지라도 높은 $g$-평점의 학생은 지망 학과에 배정받을 수 없다. 따라서 *봉쇄 조건*은 학과 배정 규칙이 학생들을 '완전 배정'하지 않도록 하며 학과 배정 과정에서 낮은 $g$-평점의 학생들이 선점을 이유로 혜택을 누릴 수 없도록 하는 조건이다.

***封鎖*(*Blockade*)** *조건*: 학과 $d_j$에서 학생 $s_i$와 학생 $s_k$의 $g$-평점이 $g^i_{d_j} > g^k_{d_j}$ 일 때, 모든 $s_i$, $s_k \in S$와 모든 $d_j \in D$에 대하여, 배정($s_i$, $d_j$)는 이미 존재했던 배정($s_k$, $d_j$)을 밀어낸다.

### 4.2. 크기 條件(Size condition)과 循環 條件(Cycle condition)

학과 배정 과정에서 모든 학생들에게 동일한 선발요건이 적용되고 학과 배정 규칙이 *학과 정원 단조성*을 만족하기 위해서는 학과 배정 과정이 첫 번째 단계에서 완료되어야 한다. 이를 위하여 각 학과는 *크기*(*size*) *조건*이나 *순환*(*cycle*) *조건* 중 한 가지를 만족해야 한다.

- *크기 條件*: 학과 $d_j$에 수용 가능한 학생들의 집합을 $S_{d_j} = \{s_i \in S | g^i_{d_j} > 0\}$라고 할 때, 집합 $S_{d_j}$의 크기는 충분히 커야 한다.

- *循環 條件*: 학과가 배정 대상에게 부여한 우선순위는 주기(cycle)(9)를 형성해야 하며, 주기들의 수는 충분히 많아야 한다.

학과 $d_j$에 다수의 수용 가능한 학생들이 있어서 *크기 조건*을 만족한다면 학과 $d_j$는 우선순위구조의 형태와는 무관하게 첫 번째 단계에서 정원을 모두 채울 수 있으며, 수용 가능한 학생들의 수가 적은 학과의 경우(10) 우선순위구조의 형태가 주기(cycle)를 형성하면서 그 수가 충분히 많아 *순환 조건*을 만족한다면 첫 번째 단계에서 학과 배정 과정을 완료할 수 있다. 인기학과의 경우, 다수의 학생들이 우선선발요건을 만족할 것이기 때문에 수용 가능한 학생들이 충분히 많아져 *크기 조건*을 만족하므로 우선순위의 형태와는 상관없이 첫 번째 단계에서 학과 배정이 완료된다. 비인기학과의 경우, 학생들이 학과에서 요구하는 우선선발요건을 만족하지 않거나 지원 자체를 하지 않을 것이기 때문에 *크기 조건*을 만족하기 어려우므로 첫 번째 단계에서 학생 선발을 완료하기 위해 *순환 조건*을 만족해야 한다.(11) 이것을 다음의 예 (3.4)를 통하여 살펴보도록 하겠다.

예 (3.4)　$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$, $D = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$이며 각 학과의 정원은 $Q_D = (q_{d_1}, q_{d_2}, q_{d_3}, q_{d_4}) = (2, 1, 1, 1)$이다. 학생들의 선호 순서와 학과들에서 학생들의 우선순위는 다음과 같다.

---

(9) 다음과 같은 조건이 만족되면 우선순위는 주기(cycle)를 형성한다〔Kesten(2006)〕.
 (1) Loop condition: There are $i, j, k \in N$ and $x, y \in X$ such that $f_x(i) < f_x(j) < f_x(k)$ and $f_y(k) < f_y(i), f_x(j)$.
 (2) Scarcity condition: There are (possibly empty) disjoint sets $N_x, N_y \subset \mathrm{N} \setminus \{i, j, k\}$ such that $N_x \subset U^f_x(i) \cup (U^f_x(j) \setminus U^f_y(k))$ and $|N_x| = s_x - 1$ where $f_x$ is the priority order and $\mathrm{U}^f_x(i) \equiv \{j \in N | f_x(j) < f_x(i)\}$.

(10) 하지만 수용 가능한 학생들의 수는 적어도 그 학과의 정원만큼은 존재해야 한다. 정원보다 적은 학생들이 수용 가능한 경우 순환 조건을 만족해도 선발된 학생의 수는 항상 정원보다 적기 때문에 학과 배정 과정은 첫 번째 단계에서 완료될 수 없다.

(11) 학과의 우선순위형태가 주기(cycle)를 갖지 않을 때 비주기적(acyclic)이라 하며, 우선순위형태가 비주기적이라는 것은 학과의 우선순위형태에 일정부분 상관관계가 있음을 의미한다〔Kesten(2006)〕. 따라서 비인기학과의 경우 수용 가능한 학생들이 적은 상태에서 다른 학과들과 비주기적인 우선순위형태를 갖는다면 첫 번째 단계에서 정원을 채우지 못하게 된다.

$$\begin{cases} d_1 \ P_{s_1} \ d_4 \ P_{s_1} \ d_2 \ P_{s_1} \ d_3 \\ d_2 \ P_{s_2} \ d_1 \ P_{s_2} \ d_3 \, P_{s_2} \ d_4 \\ d_2 \ P_{s_3} \ d_3 \ P_{s_3} \ d_1 \ P_{s_3} \ d_4 \\ d_1 \ P_{s_4} \ d_2 \ P_{s_4} \ d_4 \ P_{s_4} \ d_3 \\ d_1 \ P_{s_5} \ d_3 \ P_{s_5} \ d_2 \ P_{s_5} \ d_4 \end{cases}$$

| $g_{d_1}$ | $g_{d_2}$ | $g_{d_3}$ | $g_{d_4}$ |
|---|---|---|---|
| $s_1$ | $s_4$ | $s_5$ | $s_1$ |
| $s_4$ | $s_2$ | $s_2$ | $s_4$ |
| $s_5$ | $s_3$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $s_2$ | $\emptyset$ | $s_1, s_3, s_4$ | $s_2, s_3, s_5$ |
| $s_3$ | $s_1, s_5$ | – | – |
| $\emptyset$ | – | – | – |

첫 번째 단계에서의 학과 배정 결과는 $\mu^1 = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ (s_1, s_4) & (s_2) & (s_5) & (-) \end{pmatrix}$와 $\mu^1(s_3) = d_0$으로 학생 $s_3$은 어떠한 학과에도 배정받지 못하였으며 학과 $d_4$는 미충원 되었다. 학과들의 우선순위가 갖는 주기(cycle)의 수는 다음과 같다.(12)

---

(12)

| 학과 | Loop condition | Scarcity condition | 주기/비주기 |
|---|---|---|---|
| $d_1$, $d_2$ | $g^1_{d_1} > g^5_{d_1} > g^3_{d_1}$, $g^3_{d_2} > g^1_{d_2}$, $g^5_{d_2}$ | $s_2$ | 주기 |
| $d_1$, $d_3$ | $g^1_{d_1} > g^4_{d_1} > g^2_{d_1}$, $g^2_{d_3} > g^1_{d_3}$, $g^4_{d_3}$ | $s_5$ | 주기 |
| $d_1$, $d_4$ | – | – | 비주기 |
| $d_2$, $d_1$ | $g^4_{d_2} > g^2_{d_2} > g^1_{d_2}$, $g^1_{d_1} > g^4_{d_1}$, $g^2_{d_1}$ | $\emptyset$ | 주기 |
| $d_2$, $d_3$ | $g^4_{d_2} > g^2_{d_2} > g^5_{d_2}$, $g^5_{d_3} > g^2_{d_3}$, $g^4_{d_3}$ | $\emptyset$ | 주기 |
| $d_2$, $d_4$ | $g^2_{d_2} > g^3_{d_2} > g^1_{d_2}$, $g^1_{d_4} > g^2_{d_4}$, $g^3_{d_4}$ | $s_4$ | 비주기 |
| $d_3$, $d_1$ | $g^5_{d_3} > g^2_{d_3} > g^1_{d_3}$, $g^1_{d_1} > g^5_{d_1}$, $g^2_{d_1}$ | $\emptyset$ | 주기 |
| $d_3$, $d_2$ | $g^5_{d_3} > g^2_{d_3} > g^4_{d_3}$, $g^4_{d_2} > g^2_{d_2}$, $g^5_{d_2}$ | $\emptyset$ | 주기 |
| $d_3$, $d_4$ | $g^5_{d_3} > g^2_{d_3} > g^1_{d_3}$ , $g^1_{d_4} > g^2_{d_4}$, $g^5_{d_4}$ | $\emptyset$ | 주기 |
| $d_4$, $d_1$ | – | – | 비주기 |
| $d_4$, $d_2$ | – | – | 비주기 |
| $d_4$, $d_3$ | $g^1_{d_4} > g^4_{d_4} > g^5_{d_4}$, $g^5_{d_3} > g^1_{d_3}$, $g^4_{d_3}$ | $\emptyset$ | 주기 |

$$\begin{cases}(d_1,\ d_2):\ \text{cycle}\\(d_1,\ d_3):\ \text{cycle}\\(d_1,\ d_4)\ \ \text{acycle}\end{cases}\qquad\begin{cases}(d_2,\ d_1):\ \text{cycle}\\(d_2,\ d_3):\ \text{cycle}\\(d_2,\ d_4):\ \text{acycle}\end{cases}$$

$$\begin{cases}(d_3,\ d_1):\ \text{cycle}\\(d_3,\ d_2):\ \text{cycle}\\(d_3,\ d_4):\ \text{cycle}\end{cases}\qquad\begin{cases}(d_4,\ d_1):\ \text{acycle}\\(d_4,\ d_2):\ \text{acycle}\\(d_4,\ d_3):\ \text{cycle}\end{cases}$$

학과 $d_1$의 경우, 수용 가능한 학생들이 충분히 많기 때문에 *크기 조건*을 만족하므로 우선순위구조의 형태와 상관없이 첫 번째 단계에서 주어진 정원을 모두 채운다. 학과 $d_3$과 학과 $d_4$의 경우 수용 가능한 학생들의 수는 두 명으로 동일하지만, 학과 $d_3$은 우선순위구조가 주기를 형성하면서 그 수가 충분히 많기 때문에 첫 번째 단계에서 정원을 모두 채우는 반면 학과 $d_4$는 *크기 조건*이나 *순환 조건* 중 어떠한 것도 만족하지 못하였기 때문에 첫 번째 단계에서 학과 배정이 완료되지 못하고 두 번째 단계로 넘어가게 된다. 하지만 학과의 수와 수용 가능한 학생들의 수가 증가할수록 *순환 조건*은 충족되기 어려우므로 수용 가능한 학생이 적은 학과는 학과 배정을 첫 번째 단계에서 완료시키기 위해서 순환조건보다는 *크기 조건*을 만족해야 할 것이다. 비인기학과는 *크기 조건*을 만족하기 위하여 우선선발요건을 요구하지 않음으로써 모든 배정 대상들을 수용 가능한 학생들로 간주할 수 있다.

하지만, 모든 경우에서 비인기학과가 우선선발요건을 요구하지 않음으로써 *크기 조건*을 만족할 수 있는 것은 아니다. 학생들이 특정 학과를 기피하여 처음부터 선호 순서에 올리지 않으면, 지망자 자체가 정원에 미치지 못하기 때문에 우선선발요건을 요구하지 않아도 수용 가능한 학생들이 정원보다 적게 되므로 학과 배정 과정은 첫 번째 단계에서 완료되지 못한다. 다음 절에서는 이러한 문제점을 해결하기 위하여 다른 학과 배정방식을 살펴보기로 한다.

### 4.3. 學科 配定 暫定的 許可 方式

*학과 배정 잠정적 허가 방식*은 *잠정적 허가 방식*(*Deferred acceptance mechanism*)〔Gale and Shapley(1962)〕을 학과 배정 과정에 적용한 것으로 가중치 $\delta_T$로 인한 *선호의 제약* 때문에 배정 대상들은 사회과학대학 내의 모든 학과들을 수용 가능한 학과들[13]로 간주한

(13) 수용 가능한 학과들이란 모든 $s_i \in S$와 모든 $d_j \in D$에 대하여 $d_j\ P_{s_i}\ d_0$을 의미한다.

다. 따라서 학생들은 하나의 학과에 배정될 때까지 배정 신청을 해야 하므로 모든 학과들을 선호 순서 목록에 올리게 된다.

*學科 配定 暫定的 許可 方式*

• 1 단계

학생들은 수용 가능한 학과들 중 제일 선호하는 학과를 행정실에 제출한다. 행정실은 $g$–평점에 의거하여 정원 $q_{d_j}$만큼의 학생을 각 학과에 잠정적으로 배정하고 나머지 학생은 배제한다.

• 단계 $i$, $2 \leq i$

단계 $i$–1에서 배정받지 못한 학생들은 배제당한 학과를 제외한 나머지 학과들 중에서 그 다음으로 선호하는 학과를 행정실에 제출한다. 행정실은 단계 $i$–1에서 잠정적으로 배정된 학생들과 단계 $i$에서 새로 지망한 학생들을 모두 배정 대상으로 하여 $g$–평점의 순으로 $q_{d_j}$만큼 학생들을 학과에 잠정적으로 배정하고 나머지 학생들은 배제한다.

• 모든 학생들이 잠정적으로 배정받았거나 수용 가능한 모든 학과들로부터 배제받았다면 학과 배정 과정을 완료하고, 이 때의 잠정적 배정을 최종 배정으로 한다. 모든 지망 학과들로부터 배제된 학생이나 수용 가능한 학생들로부터 어떠한 지망도 받지 않는 학과들은 그대로 남는다.

*학과 배정 잠정적 허가 방식*은 학과 배정 규칙과는 달리 배정이 완료된 후에 미배정된 학생들에 대하여 어떠한 조치도 취하지 않기 때문에 이러한 학생들은 다음 년도에 학과 배정을 신청하게 되는데, 가중치 $\delta_T$로 인하여 또다시 미배정된다. 따라서 모든 배정 대상들이 당해 연도에 하나의 학과에 배정받기 위해서 학과들은 *크기 조건*이나 *순환 조건*을 만족시켜야 한다.[(14)] 하지만 *학생–제안 잠정적 허가 방식*은 *순환 조건*으로 인하여 우선순위구조의 형태가 주기를 형성할 때 비효율적인 매칭 결과를 도출할 수 있으므로[(15)] 학

(14) *학과 배정 잠정적 허가 방식*은 *봉쇄 조건*이 결합된 학과 배정 규칙하에서 학생들이(사회과학계열인 경우) 제1지망부터 제7지망까지의 선호 순서를 제출하는 경우로 생각할 수 있다. 따라서 학과가 *크기 조건*이나 *순환 조건*을 만족하면 학과 배정 과정을 첫 번째 단계에서 완료시킬 수 있으므로, 모든 학생들을 배정할 수 있다.

과들은 *크기 조건*을 통하여 학생들을 모두 배정해야 한다. 예를 들어, $S = \{s_1, s_2, s_3\}$, $D = \{d_1, d_2, d_3\}$이고 각 학과의 정원이 $Q_D = (q_{d_1}, q_{d_2}, q_{d_3}) = (1, 1, 1)$ 일 때 학생들의 선호 및 학과들의 우선순위와 학과 배정 결과는 다음과 같다.

| $g_{d_1}$ | $g_{d_2}$ | $g_{d_3}$ |
|---|---|---|
| $s_3$ | $s_2$ | $s_1$ |
| $s_2$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $s_1$ | $s_1$, $s_3$ | $s_2, s_3$ |
| $\emptyset$ | − | − |

| $P_{s_1}$ | $P_{s_2}$ | $P_{s_3}$ |
|---|---|---|
| $d_1$ | $d_1$ | $d_3$ |
| $d_3$ | $d_3$ | $d_1$ |
| $d_2$ | $d_2$ | $d_2$ |

$$\mu = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ (s_3) & (s_2) & (s_1) \end{pmatrix}$$

학과의 우선순위구조의 주기는 다음과 같다. 학과 $d_1$은 크기 조건을 충족하므로 우선순위구조의 형태와 상관없이 첫 번째 단계에서 정원을 모두 채우며 학과 $d_2$와 학과 $d_3$은 *순환 조건*을 만족하므로 모든 학생들은 하나의 학과에 배정된다.

$$\begin{cases} (d_1,\ d_2):\ \text{cycle} \\ (d_1,\ d_3):\ \text{cycle} \end{cases} \quad \begin{cases} (d_2,\ d_1):\ \text{cycle} \\ (d_2,\ d_3):\ \text{cycle} \end{cases} \quad \begin{cases} (d_3,\ d_1):\ \text{cycle} \\ (d_3,\ d_2):\ \text{cycle} \end{cases}$$

배정 결과를 살펴보면 학생 $s_3$은 학생 $s_1$과 학생 $s_2$ 사이에 그들의 첫 번째 지망 학과가 배정되는 것을 방해하는데 학생 $s_1$과 학생 $s_3$에게 배정된 학과가 서로 바뀐다면 파레토 개선이 되는 것을 통하여 비효율성이 발생하였음을 알 수 있다. 이러한 비효율성을 제거하기 위해서는 우선순위가 비주기적(acyclic)이어야 하므로, 모든 학생들을 하나의 학과에 배정하면서 주기(cycle)를 제거하기 위해서는 *크기 조건*을 만족해야 한다. *크기 조건*을

(15) Ergin(2002)은 우선순위가 비주기적이면, 잠정적 허가 방식이 파레토 효율적(pareto－efficiency)이고, 그룹 전략적 무용성(group strategy-proof)과 일정성(consistency)을 만족함을 보였다. Kesten(2006)는 약하게 비주기적(weakly acyclic), 주기적(acyclic) 그리고 강하게 비주기적(strongly acyclic)인 순위구조를 제시하였으며, 주기(cycle)를 제거한 후 잠정적 허가 방식을 시행하는 *Efficiency adjusted deferred acceptance mechanism*을 제시하기도 하였다〔Kesten(2004)〕.

만족하기 위해 우선선발요건을 요구하지 않으면 평점평균만이 선발요건이므로 우선순위 구조의 형태는 비주기적이 되며 그 때의 학과 배정은 $\mu' = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ (s_2) & (s_1) & (s_3) \end{pmatrix}$으로 파레토 효율적이다.

## 5. 結 論

서울대학교 사회과학대학의 학과 배정 규칙은 매칭 규칙이 갖추어야 할 바람직한 많은 성질들을 충족시키지 못하므로 개선이 요구된다. 먼저, 미배정된 학생들을 위하여 점차 완화되는 선발요건을 적용하기 때문에 발생되는 문제점을 차단하기 위하여 학과 배정 과정을 첫 번째 단계에서 완료시켜야 하므로 학과들은 *크기 조건* 또는 *순환 조건* 중 하나를 충족시켜야 한다. 인기학과는 배정 대상들의 높은 선호도로 인하여 자연스럽게 *크기 조건*을 만족하지만 비인기학과는 *순환 조건*을 만족하거나 우선선발요건을 요구하지 않음으로써 *크기 조건*을 충족시킬 수 있도록 해야 한다. 또한 낮은 $g$-평점의 학생들이 선점을 이유로 학과 배정의 혜택을 누리는 것을 방지하기 위해서는 학과 배정방식이 *봉쇄 조건*을 만족해야 한다.

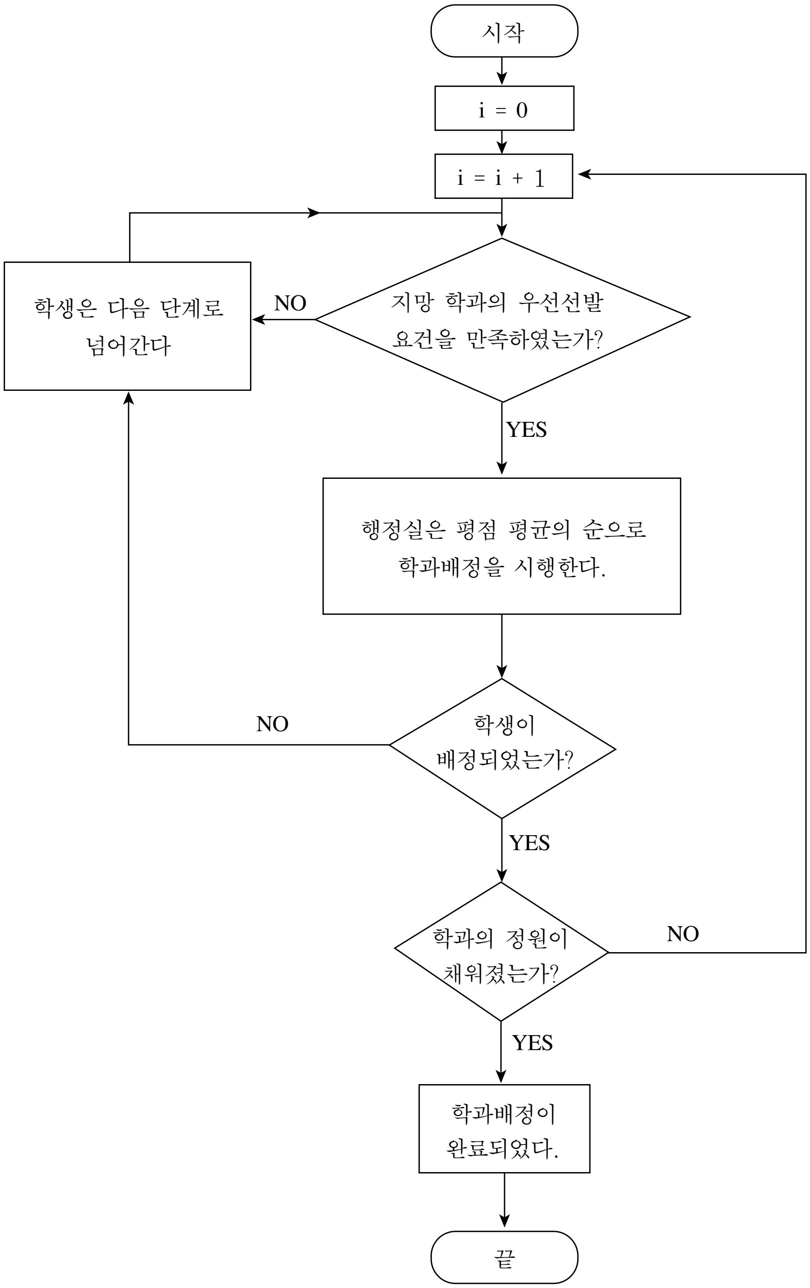
특정 학과에 대한 기피도가 존재하는 경우에 학과가 *순환 조건*을 만족하여도 학과 배정 과정을 첫 번째 단계에서 완료시키지 못하는 경우가 발생하는데 이러한 문제를 해결하기 위하여 *학과 배정 잠정적 허가 방식*을 제시하였다. *학과 배정 잠정적 허가 방식*은 가중치 $\delta_T$로 인한 '선호의 제약' 때문에 배정 대상들이 사회과학대학 내의 모든 학과들을 수용 가능한 학과들로 간주하므로 지망자 자체의 부족에서 오는 문제는 해결된다. 하지만 *학과 배정 잠정적 허가 방식*은 미배정된 학생들을 위하여 어떠한 조치도 취하지 않기 때문에 모든 배정 대상들을 하나의 학과에 배정하기 위해서 학과는 *크기 조건*을 만족해야 한다. 이것은 수용 가능한 학생의 수가 적은 학과가 순환 조건을 충족시켰을 경우 형성된 주기(cycle)로 인하여 비효율적인 배정 결과가 도출될 수 있기 때문이다. 따라서 비인기학과가 우선선발요건을 요구하지 않음으로써 모든 배정 대상들을 수용 가능한 학생들로 간주하게 되면 *학과 배정 잠정적 허가 방식*하에서 모든 배정 대상들은 하나의 학과에 배정될 수 있으며 효율적인 학과 배정 결과를 얻을 수 있다.

사회과학대학에 입학한 학생들은 특정 학과에 배정된 이후에 그와 관련된 전공 지식을 선호 여부와 관계없이 대학 기간 동안 습득해야 하며 결정된 전공은 차후 학생들의 진로나 직업 선택에 크게 영향을 미칠 수 있다. 따라서 본 연구는 현재 시행되는 학과 배정 방식이 학생들의 선호를 잘 반영하면서 공정하게 학생들을 배정하는지에 대하여 초점을

맞추었으며, 더 나은 학과 배정을 위하여 논의 과정에서 제안된 조건들을 통하여 학과 배정 규칙이 개선되기를 바란다.

科學技術政策研究院 研究員
156-849 서울특별시 동작구 보라매길 44 전문건설회관 26층
전화: (02)3284-1822
팩스: (02)3284-1869
E-mail: kciel99@snu.ac.kr

〈附錄〉學科配定規則의 알고리즘(Algorithm)




〈그림 1〉學科配定規則의 알고리즘

# 参 考 文 獻


조명환, 전영섭(2004) : "평준화지역 고등학교학생 배정 문제에 관한 게임이론적 고찰," 『경제논집』, **43**, **4**.

Abdulkadiroğlu, A., and T. Sönmez(2003): "School Choice: A Mechanism Design Approach," *The American Economic Review*, **93**, **3**, 729-747.

Balinski, M., and T. Sönmez(1999): "A Tale of Two Mechanisms; Student Placement," *Journal of Economic Theory*, **84**, 73-94.

Ehlers, L., and B. Klaus(2003): "Resource-monotonicity for House Allocation Problems," *International Journal of Game Theory*, **32**, 545-560.

Ergin, H.(2002): "Efficient Resource Allocation on the Basis of Priorities," *Econometrica*, **70**, **6**, 2489-2497.

Ergin, H., and T. Sönmez(2006): "Games of School Choice under the Boston Mechanism," *Journal of Public Economics*, **90**, 215-237.

Gale, D., and L. S. Shapley(1962): "College Admissions and the Stability of Marriage," *The American Mathematical Monthly*, **69**, **1**, 9-15.

Kesten, O.(2004): "Student Placement to Public Schools in US: Two New Solutions," Job market paper.

______(2006): "On Two Competing Mechanisms for Priority-based Allocation Problems," *Journal of Economic Theory*, **127**, 155-171.

Chun, Y., and W. Thomson(1998): "Monotonicity Properties of Bargaining Solution when Applied to Economics," *Mathematical Social Sciences*, **15**, 11-27.