

# 스플라인을 사용한 韓國 利率期間構造의 模型化<sup>(1)</sup>

崔 秉 善 · 崔 高

본 연구에서는 B-스플라인을 사용해서 한국의 국고채 기준수익률의 기간구조를 추정하였다. 좀 더 실용적으로 사용할 수 있는 이자율기간구조를 얻기 위해서, 기존의 국고채데이터에 콜1일물의 이자율데이터를 추가하였다. 이자율기간구조 전체의 추정 오차를 작게 하는 동시에 만기가 작은 점에서 발생하는 추정오차의 일부분을 만기가 큰 점의 추정오차로 이동시키기 위해서, 확률적 가중값을 사용하는 최소제곱추정법을 시도하였다. 또한, 이자율기간구조의 회귀계수추정량들이 내포하고 있는 정보를 충분히 반영하기 위해서, 단변량자기회귀모형이 아닌 벡터자기회귀모형을 사용해서 이자율기간구조의 표본 외 예측을 하였다. 확률적 가중값을 준 회귀모형을 사용해서 이자율기간구조를 추정하면, 전반적인 추정력이나 예측력을 감소시키지 않으면서 작은 만기에서 추정오차를 작게 만든다는 결과를 얻었다. 즉, 회귀모형으로 표현된 이자율기간구조를 추정할 때 확률적 가중값을 부여하는 가중최소제곱추정법을 적용하면, 경제예측, 투자전략 그리고 신용관리에 신뢰성과 더불어 실용성이 높은 이자율기간구조의 추정모형을 얻을 수 있다.

## 1. 序 論

채권은 발행주체에 따라 정부가 발행하는 국고채, 국민주택채권 등 국채, 한국은행이 발행하는 통화안정증권, 지방자치단체가 발행하는 지하철공채, 지역개발공채 등 지방채, 회사가 발행하는 회사채, 금융회사가 발행하는 금융채, 한국전력공사, 한국토지공사, 예금보험공사 등 특수법인이 발행하는 특수채 등으로 구분할 수 있다. 보통 국채, 지방채 그리고 특수채를 국공채라 부른다. 우리나라의 채권발행잔액은 1995~1997년 중에 연간 20~30조 원씩 증가하였으나, 외환위기 직후인 1998년에는 약 110조 원 증가하였다. 이는 공공부문에서 구조조정 추진을 위한 수요가 커지고, 기업의 신용위험 증가에 따른 은행들의 대출기피로 회사채의 발행이 증가되었고, 외환시장의 안정을 위해 통화안정증권의 발행이 증가했기 때문이다. 국채로는 국고채, 재정증권, 국민주택채권 그리고 보상채권 등이 있는데, 1998년 42조로서 전체 채권발행잔액의 14%이었던 국채의 발행잔액이 크게 늘어서 2009년 3월에는 299조로서 전체 채권발행잔액의 32.5% 수준에 이르렀다. 본 연구

(1) 이 논문은 2008년도 省谷學術文化財團의 연구비 지원을 받아 이루어졌음.

의 대상이 되는 국고채는 국채의 발행과 상환업무를 종합적으로 관리하기 위해 만들어진 공공자금관리기금의 부담으로 발행하는 국채로서, 6개월마다 이자가 지급되는 利票債(coupon bond)이다. 국고채의 발행만기는 3년, 5년, 10년과 20년이다. 또한 오랫동안 3년 만기 회사채의 수익률이 지표금리로 사용되다, 최근에는 3년 만기 국고채의 수익률이 지표금리로 사용되고 있다.<sup>(2)</sup>

收益率曲線(yield curve)은 원리금 상환가능성에 대한 신용도가 같은 발행주체들이 발행하는 동질의 채권들을 대상으로 만기별 이자율을 만기에 대해 연결한 곡선이다. 어떤 금융상품의 미래 현금흐름을 현재시점의 가치로 표현하기 위해서는 적절한 할인율로 할인해야 하고, 이 할인율을 계산하는 과정에 수익률곡선이 사용된다. 수익률곡선은 무이표채(zero-coupon bond)의 만기수익률을 나타내므로, 수익률곡선을 현물이자율곡선(spot interest rate curve)이라고도 부른다. 만기의 차이에 따른 이자율구조를 통칭하여 利率期間構造(term structure of interest rate)라고 한다.

이자율은 금융상품의 가격결정에 직접 또는 간접으로 영향을 끼친다. 따라서 금융상품 가치를 적절하게 평가하기 위해서는 이자율기간구조를 모형화하는 것이 필수적이다. 이자율기간구조의 모형화가 필요한 이유를 좀 더 세분화하면 다음과 같다. 첫째, 금융상품 가치를 합리적으로 평가하기 위해서는 이자율기간구조의 모형화가 필요하다. 각 금융상품의 기초가치결정식(fundamental valuation equation)에는 確率割引要因(stochastic discount factor: SDF)이 포함된다. 이 확률할인요인을 명시하기 위해서는 이자율기간구조의 모형화가 필요하다. 즉, 금융상품들 사이에서 상대가치를 파악하거나 차익거래 가능성 여부를 조사하기 위해서는 이자율기간구조를 알고 있어야 한다. 둘째, 장외파생상품시장을 활성화하기 위해서는 신뢰할 수 있는 이자율기간구조를 얻는 것이 선행되어야 한다. 우리나라 장내파생상품시장인 주가지수선물시장과 국채선물시장은 양적으로 뿐 아니라 질적으로 매우 빠르게 성장하고 있다. 자본시장 개방 이후 이자율의 변동성이 확대되면서 금융기관의 헤지수요가 큰 폭으로 증가하였고, 이에 따라 층(cap), 플로어(floor), 스왑(swap), 채권옵션(bond option), 스왑선(swaption)과 같은 이자율파생상품이 장외에서 활발하게 거래되고 있다. 이렇게 우리나라 장외파생상품시장이 급속하게 성장함에도 불구하고, 우리나라 장외파생상품의 가격을 고시하는 우리나라 금융기관이 나타나지 않고 있다. 이는 향후 우리나라 통화에 관련된 장외파생상품시장을 외국계 금융기관이 주도하는 상황을

(2) 우리나라의 채권시장에 대해서는 한국은행(2007)이 발행한 『우리나라의 금융시장』의 제3장 제2절을 참조하라. 또한 최근 채권데이터에 관한 내용은 한국거래소(KoRea eXchange: KRX)에서 매일 발행하는 증권시장지를 참조하라.

야기할 가능성이 있음을 보여준다. 우리나라 금융기관이 능동적으로 우리나라 장외파생상품시장을 이끌어가기 위해서는 우선 이자율과 채권의 평가에 대한 연구가 활발하게 이루어져야 한다. 셋째, 금융기관이나 기업이 효율적으로 자산부채위험관리를 하기 위해서는 이자율기간구조의 모형화가 필요하다. 이자율에 민감한 부채의 위험을 효율적으로 관리하기 위해서는 이자율기간구조의 모형화를 필요로 한다. 예를 들어, VaR를 사용해서 위험관리를 하기 위해서는 신용스프레드를 추계할 필요가 있고, 신용스프레드를 추계하기 위해서는 이자율기간구조를 필요로 한다. 넷째, 정부가 효율적인 통화정책을 세우기 위해서는 신뢰할 수 있는 이자율기간구조식을 필요로 한다. 서브프라임모기지사태에서 유발된 금융위기에서 보았듯이, 한국은행, 미연방준비은행(FRB), 유럽중앙은행(ECB) 등은 단기이자율을 조정해서 경제상태에 변화를 유도하고자 한다. 반면에 개인이 집을 매입하거나 기업이나 공공기관이 장기 프로젝트를 시행할 때는 장기이자율이 중요한 변수이다. 따라서 단기이자율이 장기이자율에 어떠한 영향을 미치는지를 파악하는 것은 매우 중요하다. 이자율기간구조는 이러한 단기이자율과 장기이자율 사이의 관계를 설명하는데 도움을 준다. 그 외에도 이자율기간구조는 펀드나 자산운용자의 성과를 측정하는데 필요한 정보를 제공한다. 또한, 신Basel 협약에서 요구하는 은행의 소요자기자본 추정을 위해서도 신뢰할 수 있는 이자율기간구조식이 필요하다.

시장에서 거래되는 채권의 殘餘期間(tenor)들은 유한하다. 즉, 현재시점  $t$ 에서 거래되는 채권들의 만기시점들을  $T_1, T_2, \dots, T_T$ 로 나타낼 수 있다. 만기까지 잔여기간  $\tau$ 를 연속형 변수로 가정하고 이자율기간구조를 모형화하기 위해서는 통계적 접근법이나 확률해석적(stochastically analytic) 접근법을 적용한다.

통계적 접근법은 수익률곡선, 할인곡선, 또는 선도이자율곡선(forward interest rate curve) 등 이자율기간구조를 나타내는 어떤 특정한 함수형태의 함수군을 가정하고, 이 함수군 안에서 채권시장에서 수집된 데이터를 가장 잘 반영하는 함수를 구하는 것이다. 통계적 접근법에서 주로 이용되는 함수로는 계단함수, 멱함수, 스플라인, 지수함수 등이 있다. 통계적 접근법은 이론적인 제약이 없이 어떤 특수한 형태의 함수들 중에서 주어진 이자율기간구조를 가장 잘 설명하는 함수를 추정하는 회귀모형방법이기 때문에, 실제시장에서 관찰되는 수익률 또는 할인채가격의 변화를 대부분 설명할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 경제학적 이론을 바탕으로 하는 모형을 추정하는 것이 아니기 때문에, 추정된 이자율기간구조를 재무학적으로 일관성 있게 설명하는 것이 어렵다. 이러한 통계적 접근법으로는 McCulloch(1975), Vasicek and Fong(1982), Nelson and Siegel(1987), Adams and van Deventer(1994), Svensson(1994), Bliss(1997), Ferguson and Raymar(1998), 이준행(2004) 등이 있다.

확률해석적 접근법은 이론적 접근법이라 불리지만, 본 저자의 생각으로는 이론적이라는 단어는 너무 광의적이다. 이 접근법은 할인채가치에 영향을 미치는 요인, 예를 들어 현물 이자율의 動的構造(dynamics structure)를 확률미분방정식으로 나타낸 다음, 이를 바탕으로 이자율기간구조를 추정한다. 따라서 이 접근법을 확률해석적 접근법이라 부르는 것이 자연스러운 표현이다. 확률해석적 접근법은 이론적으로 어렵고 수학적으로 흥미를 주나, 추정된 이자율기간구조가 얼마나 현실 데이터와 잘 부합되느냐는 선택한 확률미분방정식이 시장을 얼마나 잘 반영하느냐에 달려있다. 즉, 확률해석적 접근법에서는 시장에서 측정되는 관찰값에 대한 설명력이 떨어지는 경우가 발생한다. 반면에 확률해석적 접근법은 현물이자율 또는 선물이자율에 대한 동적모형을 바탕으로 이자율기간구조를 추정하기 때문에, 추정된 이자율기간구조를 재무학적으로 일관성 있게 설명하는 것이 가능하다. 이러한 확률해석적 접근법에는 Vasicek(1977), Cox, Ingersoll and Ross(1985), Heath, Jarrow and Morton(1992), Hull and White(1993), Brace, Gatarek and Musiela(1997), 오규택·김명직·장국현(2000), 엄영호·이준희·지현준(2007) 등이 있다.

본 연구에서는 B-스플라인을 사용해서 한국의 국고채 기준수익률의 기간구조를 추정한다. 즉, B-스플라인을 사용하는 통계적 접근법을 적용한다. 보다 실용적인 이자율기간구조를 추정하기 위해서, 국고채데이터에 쿨1일물의 이자율데이터를 추가하였다. 또한, 이자율기간구조 전체의 추정오차를 작게 하는 동시에 만기가 작은 점에서 발생하는 추정오차를 감소시키기 위해서, 확률적 가중값을 사용하는 최소제곱추정법을 시도하였다. 제2장에서는 이자율기간구조의 최소제곱추정에 가중값을 부과해야 하는 이유를 논의한다. 제3장에서는 B-스플라인을 소개하고, 확률적 가중값을 갖는 최소제곱추정법을 소개한다. 또한 이자율기간구조의 추정에서 확률적 가중값 도입의 필요성에 대해 논의한다. 제4장에서는 B-스플라인을 설명변수로 하고 확률적 가중값을 갖는 최소제곱추정법을 적용해서 국고채의 이자율기간구조를 추정한다. 제5장에서는 벡터자기회귀모형을 사용해서 이자율기간구조의 표본외예측(out-of-sample forecasting)을 한다. 제6장에서는 결론을 도출하고, 향후 과제에 대해서 논의한다.

## 2. 加重回歸分析

다음 식들을 만족하는 함수  $w$ 를 구간  $[a, b]$ 에서 가중함수라고 한다.

$$(2.1) \quad w(x) \geq 0, (x \in [a, b]), \int_a^b w(x)dx < \infty$$

주어진 가중함수  $w$ 에 대한 내적과 노름을 각각 다음과 같이 정의하자.

$$(2.2) \quad \langle f, g \rangle_w = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx$$

$$(2.3) \quad \|f\|_w = \sqrt{\langle f, f \rangle_w}$$

만일 다음 식이 성립하면, 멱함수열  $\{\varphi_n | n = 0, 1, 2, \dots\}$ 이 가중함수  $w$ 에 대해서 직교라고 한다.

$$(2.4) \quad \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = 0, \quad (m \neq n)$$

만일 다음 식들이 성립하면, 멱함수열  $\{\varphi_n | n = 0, 1, 2, \dots\}$ 가 가중함수  $w$ 에 대해서 정규직교라고 한다.

$$(2.5) \quad \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = \delta_{m,n}$$

여기서  $\delta_{m,n}$ 은 Kronecker의 델타함수이다. 다양한 가중함수들에 대한 직교멱함수열들이 존재한다. 가장 널리 사용되는 직교멱함수로는 Legendre함수, Chebyshev함수, Laguerre함수, Hermite함수 등이 있다.

제 $n$ 차 Chebyshev함수  $T_n(x)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$(2.6) \quad T_n(x) = \cos(ncos^{-1}x)$$

Chebyshev함수열  $\{T_n(x)\}$ 가 다음 식들을 만족함을 증명할 수 있다.

$$(2.7) \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x)T_n(x)dx = \begin{cases} 0, & (m \neq n) \\ \frac{\pi}{2}, & (m = n \neq 0) \\ \pi, & (m = n = 0) \end{cases}$$

$$(2.8) \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad (n = 1, 2, \dots)$$

식 (2.7)에서 알 수 있듯이, Chebyshev함수열  $\{T_n(x)\}$ 는 가중함수가 다음과 같은 직교역 함수열이다.

$$(2.9) \quad w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (x \in [-1, 1])$$

식 (2.6)과 (2.8)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

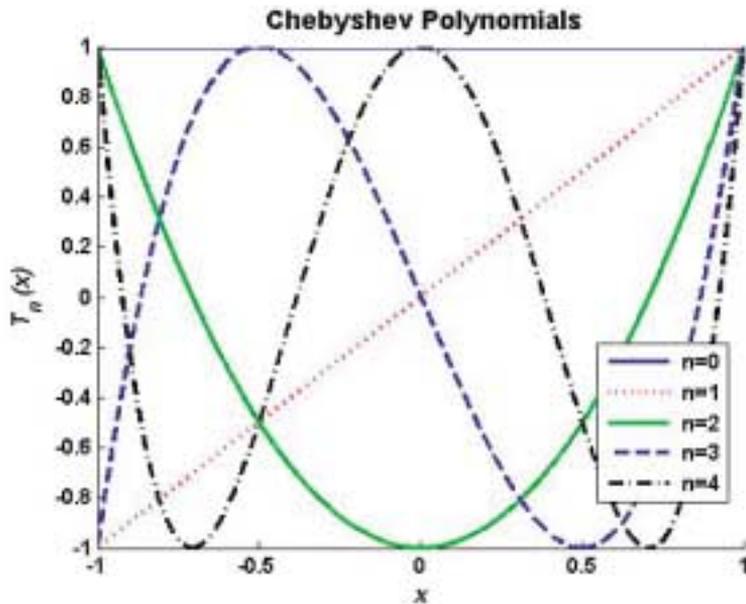
$$(2.10) \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$(2.11) \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$(2.12) \quad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \quad T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

〈그림 2.1〉에 Chebyshev함수열  $\{T_n(x)\}$ 가 그려져 있다.

구간  $[a, b]$ 에서 함수  $f(x)$ 를 근사하는 차수가  $n$  이하인 멱함수  $p(x)$ 를 구하기로 하자. 이러한 근사식을 구하기 위해서, 다음과 같이 가중제곱합을 최소로 하는 가중최소제곱근



〈그림 2.1〉 Chebyshev 함수열  $\{T_n(x)\}$

사법을 적용하기로 하자.

$$(2.13) \quad \min_p \int_a^b w(x)[f(x) - p(x)]^2 dx$$

가중함수  $w$ 에 대한 직교함수열을  $\{\varphi_n | n = 0, 1, 2, \dots\}$ 이라 하고, 다음 오차제곱합  $S$ 를 최소화하는 회귀계수들  $\{c_k\}$ 를 구해보자.

$$(2.14) \quad S = \int_a^b w(x) \left[ f(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) \right]^2 dx$$

이 가중최소제곱근사법의 정규방정식들은 다음과 같다.

$$(2.15) \quad \frac{\partial S}{\partial c_k} = -2 \int_a^b w(x) \left[ f(x) - \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x) \right] \varphi_k(x) dx = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

식 (2.15)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$(2.16) \quad \int_a^b w(x) f(x) \varphi_k(x) dx = \sum_{i=0}^n c_i \int_a^b w(x) \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx$$

식 (2.16)과 직교성에 의해서, 다음 식들이 성립한다.

$$(2.17) \quad c_k = \frac{\langle f, \varphi_k \rangle_w}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle_w}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

따라서 이에 해당하는 함수  $f(x)$ 의 근사식  $p_n(x)$ 는 다음과 같다.

$$(2.18) \quad p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, \varphi_k \rangle_w}{\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle_w} \varphi_k(x)$$

만일 함수  $f(x)$ 가 적당한 기술적 조건을 만족하면, 이 근사식  $p_n(x)$ 에 의한 오차  $e_n \doteq f(x) - p_n(x)$ 는 다음 식을 만족한다.

$$(2.19) \quad e_n = O(\varphi_{n+1}(x))$$

최소제곱근사법은 공간  $L^2[a, b]$ 에서 함수  $f(x)$ 를 멱함수  $p_n(x)$ 로 근사시키는 것이다. 그

러나  $L^2$ -수렴, 즉 평균제곱수렴은 각 점  $x$ 에서 수렴에 대해 정보를 제공하지는 않는다. 따라서 다음 식을 만족하는 멱함수열  $\{p_n | n = 0, 1, \dots\}$ 을 구하기로 하자.

$$(2.20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| = 0$$

식 (2.20)을 만족하는  $p_n$ 을  $f$ 의 일양근사함수라 한다. 최소제곱근사법에 의해 구한 근사함수는 구간  $[a, b]$ 의 총오차를 최소화한다. 반면에 일양근사법의 목적은 각 점  $x (\in [a, b])$ 에서  $p_n(x)$ 가  $f(x)$ 의 좋은 근사가 되는 함수를 찾는 것이다. 일양근사법은 최소제곱근사법보다 더 까다로운 조건을 필요로 하고, 이러한 조건이 만족되면 일양근사법은 최소제곱근사법보다 더 좋은 점별근사(pointwise approximation)를 제공한다. 함수  $f$ 에 일양근사하는 멱함수를 찾기 위해서 미니맥스근사법(minimax approximation)을 사용할 수도 있으나, 실제로 미니맥스근사법을 적용하는 것은 어려운 작업이다. 따라서 본 연구에서는 미니맥스근사법을 대체하는 방법을 살펴본다.

만일 함수  $q(x)$ 가  $m$ 차 멱함수이면, 함수  $q(x)$ 를 다음과 같이 Chebyshev함수로 나타낼 수 있다.

$$(2.21) \quad q(x) = \sum_{k=0}^m c_k T_k(x)$$

식 (2.17)에서 알 수 있듯이, Chebyshev계수는 다음과 같다.

$$(2.22) \quad c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x) q(x) dx, \quad (k = 0, 1, \dots, m)$$

함수  $q(x)$ 가 멱함수이므로 이 Chebyshev표현을 쉽게 구할 수 있다. 함수  $q(x)$ 의  $n$ 차 최소제곱근사식은 다음과 같다.

$$(2.23) \quad C_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x)$$

이  $C_n(x)$ 를 함수  $q(x)$ 의  $n$ 차 Chebyshev절약(Chebyshev economization)이라 부른다. 이  $C_n(x)$ 는 함수  $q(x)$ 의  $n$ 차 미니맥스근사식이다. 이러한 과정을 거쳐서 높은 차수의 멱함수를 낮은 차수의 멱함수로 근사시킬 수 있다. 예를 들어, 구간  $[-1, 1]$ 에서 함수  $f(x) = \sin x$ 를 3차 멱함수로 근사시켜보자. 우선 함수  $f(x)$ 의 점  $x = 0$ 에서 Taylor근사식을 구하

면, 다음과 같다.

$$(2.24) \quad f(x) \approx f_3(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

함수  $f_3(x)$ 를 Chebyshev함수들로 표기하면, 다음과 같다.

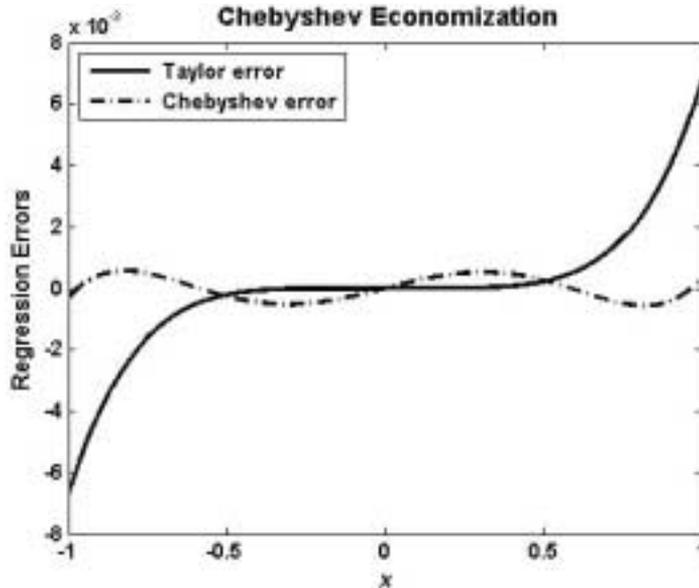
$$(2.25) \quad \begin{aligned} f_3(x) &= T_1(x) - \frac{1}{24}[3T_1(x) + T_3(x)] + \frac{1}{1920}[10T_1(x) + 5T_3(x) + T_5(x)] \\ &= \frac{169}{192}T_1(x) - \frac{5}{128}T_3(x) + \frac{1}{1920}T_5(x) \end{aligned}$$

따라서 함수  $f(x)$ 의 3차 Chebyshev절약은 다음과 같다.

$$(2.26) \quad f_3(x) \approx C_3(x) = \frac{169}{192}T_1(x) - \frac{5}{128}T_3(x) \approx 0.9974x - 0.1562x^3$$

<그림 2.2>에는 Taylor근사식에 의한 오차와 Chebyshev근사식에 의한 오차가 그려져 있다. <그림 2.2>에서 알 수 있듯이, Taylor 근사식에 의한 오차는 점  $x = 0$ 에서 오차가 아주 작고 이 점에서 멀어질수록 오차의 절대값은 크다. 반면에, Chebyshev절약에 의한 오차는 등진동성(equi-oscillation)을 보인다.

최소제곱근사법을 바탕으로 하는 Chebyshev근사식은 미니맥스근사법에 의한 근사식과 거의 비슷하다. 즉,  $L^2$  공간에서 오차를 최소화하는 Chebyshev근사식은  $L^\infty$ 공간에서 오차를 최소화하는 미니맥스근사식과 비슷하다. 더구나 Chebyshev근사식은 선형연산을 사용해서 쉽게 구할 수 있다. 따라서 미니맥스근사식 대신에 Chebyshev근사식을 사용하는 것이 실용적이다. 또한 Chebyshev근사식은 일양오차를 갖는다. 반면에 다른 직교함수를 사용하는 근사식은 오차가 일양이 아니다. 예를 들어, 구간  $[-1, 1]$ 에서 정의되는 함수  $f(x)$ 의 가중값을 부여하지 않는 최소제곱근사식인  $n$ 차 Legendre근사식  $L_n(x)$ 를 살펴보자. 이  $L_n(x)$ 는  $x$ 가 끝점인  $+1$ 이나  $-1$ 에 가까이 가면, 오차가 커진다. 그 이유는 자명하다. 점  $x = 0$ 에서 좋은 근사식이 되기 위해서는 점  $x = 0$ 의 좌측과 우측의 가까운 점들에서도 좋은 근사식이 되어야 한다. 반면에 점  $x = 1$ 에서 좋은 근사식이 되기 위해서는 점  $x = 1$ 의 좌측의 가까운 점들에서만 좋은 근사식이 되면 된다. 따라서, 오차제곱합을 최소화한다는 것은 양 끝점들에서 정확도를 희생해서 가운데 점들의 정확도를 높인다는 것을 의미한다. 반면에 Chebyshev근사에서는 양 끝점에 가까울수록 오차에 더 큰 벌칙값(penalty



〈그림 2.2〉 Chebyshev節約에 의한 誤差

score)을 부여해서, 양 끝점에서 오차가 커지는 것을 방지하기 때문에 일양오차를 갖는다.

이자율기간구조모형을 할인채의 잔여기간을 설명변수로 하는 회귀분석을 할 때에 가중값을 부여하지 않는 것이 일반적이다. 이러한 이자율기간구조모형을 최소제곱추정하면, 양 끝점들에서의 정확도를 희생해서 가운데 점들의 정확도를 높인다. 즉, 아주 짧거나 아주 긴 만기에 대한 추정오차가 크고 중간크기의 만기에 대해서 추정오차가 아주 작다. 즉, 이자율기간구조모형의 추정오차가 〈그림 2.2〉의 Taylor오차와 같은 형태를 보일 것이다. 그러나 우리가 이자율기간구조모형을 추정하는 보편적인 목적은 대상 만기 전체에 걸쳐서 오차가 골고루 분산되게 하는 것이다. 즉, 〈그림 2.2〉의 Chebyshev오차와 비슷하게 오차가 등진동성을 갖도록 하는 것이다. Chebyshev근사를 적용하기 위해서는 아주 작은 만기나 아주 긴 만기에 대해서 아주 큰 가중값을 부여해야 한다. 그러나 실제로 추정된 이자율기간구조모형을 바탕으로 의사결정을 할 때에 만기가 20년이나 30년 등 아주 긴 경우보다는 짧은 만기에 대해 추정오차를 작게 할 필요가 있다고 생각한다. 만기가 아주 긴 채권에 대해서는 만기시점 이전에 경제상황이 자주 바뀔 수 있고 또한 의사결정을 수정할 수 있는 기회가 많기 때문이다. 따라서 본 연구에서는 짧은 만기에 대해서 높은 가중값을 부여하고 긴 만기에 대해서 낮은 가중값을 부여하는 加重回歸分析을 사용해서 이자율기간구조모형을 추정하고자 한다.

앞에서 다룬 최소제곱근사법의 오차와 지금부터 다루고자 하는 최소제곱추정법의 오차에는 차이가 있다. 식 (2.19)에서 최소제곱근사법의 오차를 나타내는  $e_n$ 은 결정적 변수이지만, 최소제곱추정법에서는  $e_n$ 은 확률변수이다. 이 경우에 다음 식들이 성립한다.

$$(2.27) \quad E(e_n) = O(\varphi_{n+1}(x))$$

$$(2.28) \quad \text{Var}(e_n) = O(\varphi_{n+1}^2(x))$$

최소제곱추정법, 즉 통계적 추정에 의한 오차에는 편의와 분산이 있다. 최소제곱근사법의 오차는 최소제곱추정법의 편이에 해당한다. 이자율기간구조모형을 추정할 때 사용되는 만기시점들은 10여 개에 불과하다. 즉, 회귀모형을 분석하는데 주어진 관찰점이 10여 개에 불과하다. 이러한 데이터에 Chebyshev함수와 같은 결정적 가중함수를 부여하면, 몇 개의 관찰점들이 회귀식에 미치는 영향이 지나치게 커진다. 이러한 단점을 극복하기 위해서, 본 연구에서는 관찰점들의 개수를 증가시키면서 확률적으로 가중값을 주고자 한다. 이렇게 확률적으로 가중값을 줌으로써 추정값의 분산은 약간 증가되지만, 편의는 감소될 것이다. 또한, 관찰점들 개수의 증가하므로 다른 만기에서 계수추정값의 분산이 감소될 것이다.

### 3. B-스플라인법

다음과 같이 정의되는 구간 $(-\infty, \infty)$ 의 분할  $\Pi_\infty$ 를 살펴보자.

$$(3.1) \quad \Pi_\infty = \{\dots < \tau_n < \dots < \tau_1 < \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots\}$$

여기서  $\tau_i$ 는 마디점이다. 즉, 마디점들이 무한히 많으며, 식  $\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i = \infty$ 와 식  $\lim_{i \rightarrow -\infty} \tau_i = -\infty$ 가 성립한다고 하자. De Boor(1978, p. 108)의 정의에 의하면, 마디점들  $\tau_i, \tau_{i+1}, \dots, \tau_{i+k}$ 를 연결하는  $[k - 1]$ 차 B-스플라인  $B_i^{k-1}(\tau)$ 는 다음과 같다.

$$(3.2) \quad B_i^{k-1}(\tau) = [\tau_{i+k} - \tau_i] \sum_{l=i}^{i+k} \left\{ \prod_{j=i, j \neq l}^{i+k} \frac{1}{\tau_j - \tau_l} \right\} [\tau - \tau_l]_+^{k-1}, \quad (\tau \in \mathbb{R})$$

여기서  $A_+ = \max\{A, 0\}$ 이다. 각  $i$ 에 대해서 다음 식들이 성립한다.

$$(3.3) \quad B_i^0(\tau) = 1_{[\tau_i, \tau_{i+1})}(\tau)$$

$$(3.4) \quad B_i^1(\tau) = \frac{\tau - \tau_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} 1_{[\tau_i, \tau_{i+1})} + \frac{\tau_{i+2} - \tau}{\tau_{i+2} - \tau_{i+1}} 1_{[\tau_{i+1}, \tau_{i+2})}$$

또한 각 정수  $i$ 와 각 자연수  $k$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$(3.5) \quad B_i^k(\tau) = \frac{\tau - \tau_i}{\tau_{i+k} - \tau_i} B_i^{k-1}(\tau) + \frac{\tau_{i+k+1} - \tau}{\tau_{i+k+1} - \tau_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(\tau)$$

<그림 3.1>에는 마디점들이 0, 1, 3, 7, 13인 3차 B-스플라인이 그려져 있다. 식 (3.5)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

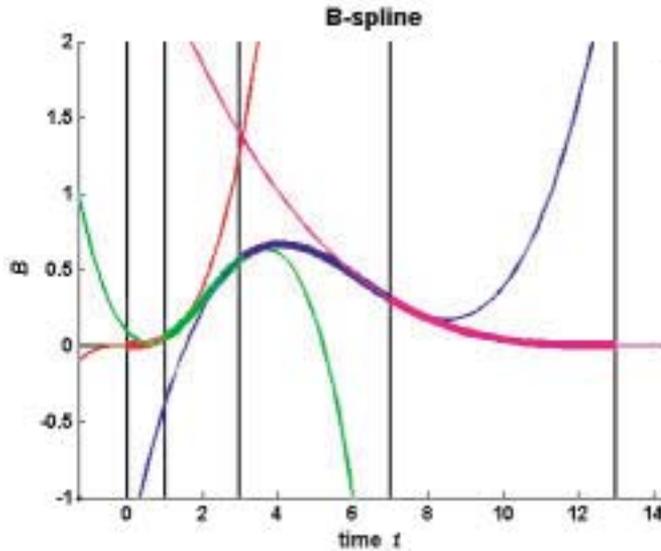
$$(3.6) \quad B_i^k(\tau) = 0, \quad (\tau \notin [\tau_i, \tau_{i+k+1}))$$

또한 식 (3.5)와 식 (3.6)에서 알 수 있듯이,  $k$ 차 스플라인들  $\{B_j^k(\tau) | j \in Z\}$ 는 서로 독립이다. 따라서 구간  $[\tau_a, \tau_b]$ 에서 함수를 B-스플라인으로 추정하기 위해서는 서로 독립인 B-스플라인들  $B_{a-k}^k(\tau), B_{a-k+1}^k(\tau), \dots, B_{b-2}^k(\tau), B_{b-1}^k(\tau)$ 를 기저로 사용한다.

시간구간  $[0, \bar{T}-t]$ 의 분할  $\Pi = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{l-1} < \tau_l = \bar{T} - t\}$ 에서 할인곡선을 추정하기 위해서는, 즉 B-스플라인을 사용해서 구간  $[\tau_0, \tau_l]$ 에서 차수가  $k$ 인 할인곡선을 추정하기 위해서는 다음과 같이 B-스플라인들  $B_k^k(\tau), B_{k+1}^k(\tau), \dots, B_{l-2}^k(\tau), B_{l-1}^k(\tau)$ 의 선형결합으로 할인곡선을 나타낸다.

$$(3.7) \quad B(t, T) = \sum_{i=k}^{l-1} \beta_i B_i^k(\tau), \quad (\tau \in [\tau_0, \tau_l])$$

여기서 B-스플라인들이 서로 독립이므로 식 (3.7)의 회귀계수들  $\{\beta_i\}$ 는 일의적으로 결정된다. 구간  $[\tau_0, \tau_l]$ 의 마디점들이  $[l + 1]$ 개인데 반해서, 식 (3.7)에서는  $[l + k]$ 개 계수들이 추정되어야 한다. 따라서, 다음과 같이 회귀식 (3.7)에서 설명변수인 B-스플라인의 개수를 줄일 필요가 있다.



〈그림 3.1〉 B-스플라인

$$(3.8) \quad B(t, t + \tau_j) = \sum_{l=1}^L \beta_l B_l^k(\tau_j) + \varepsilon_j, \quad (j = 0, 1, L, I)$$

여기서  $\{\varepsilon_j\}$ 는 정규분포  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ 를 따르는 왜신항들이다. 또한  $l$ 은  $\tau_j$ 이 분할  $\Pi$ 에 속하는 자연수이고  $L$ 은  $I$ 보다 충분히 작아야 한다. 최소제곱추정량은 불편추정량이라고 알려져 있다. 엄격히 말하면 이 성질이 성립하는 것은 아니다. 이 성질은 회귀분석을 하기 전에 선형회귀모형의 차수  $L$ 을 알고 있다는 전제 하에 성립하는 것이다. 우리는 최소제곱추정법을 적용하기 전에 차수  $L$ 을 선택해야 한다. 만일 이 회귀모형의 차수  $L$ 이  $[I + k]$ 보다 작고 또한  $L$  대신에 추정량  $\hat{L}$ 를 사용한다면, 이  $\hat{L}$ 를 바탕으로 추정된 회귀모형에서 회귀계수의 최소제곱추정량은 편의를 갖는다. 또한 추정량  $\hat{L}$ 가 커질수록 이 최소제곱추정량의 편의는 작아지나 분산은 커진다. 따라서 우리는 적당한 크기의 추정량  $\hat{L}$ 를 선택해야 회귀계수의 좋은 추정량을 얻을 수 있다.

회귀모형 (3.8)을 다음과 같은 표준적 형태로 표기하기로 하자.

$$(3.9) \quad y = X\beta + \varepsilon$$

여기서  $y = [y_1, y_2, \dots, y_{I+1}]'$ 는  $[I + 1]$ 차원 열벡터, 행렬  $X$ 는  $[I + 1] \times L$  행렬,  $\beta$ 는  $L$ 차원

열벡터 그리고  $\varepsilon$ 은 서로 독립이며 동일하고 평균이 0이고 분산이  $\sigma_\varepsilon^2$ 인 확률분포를 따르는 확률변수들로 구성된  $[I + 1]$ 차원 열벡터이다. 회귀식 (3.9)의 최소제곱추정량은 다음과 같다.

$$(3.10) \quad \beta = [X'X]^{-1}X'y$$

다음과 같이 帽子行列(hat matrix)을 정의하자.

$$(3.11) \quad H = X [X'X]^{-1} X'$$

행렬  $H$ 의  $(i, j)$  원소를  $h_{ij}$ 라고 하자. 최병선(1997, p. 617)에서 알 수 있듯이, 회귀모형 (3.9)에 최소제곱추정법을 적용해서 얻은  $y_j$ 의 적합값  $\hat{y}_j$ , 오차  $\hat{\varepsilon}_j$  그리고 적합값  $\hat{y}_j$ 의 분산은 각각 다음과 같다.

$$(3.12) \quad \hat{y}_j = h_{jj}y_j + \sum_{k \neq j} h_{jk}y_k$$

$$(3.13) \quad \hat{\varepsilon}_j = [1 - h_{jj}]y_j - \sum_{k \neq j} h_{jk}y_k$$

$$(3.14) \quad \text{Var}(\hat{y}_j) = \sigma_\varepsilon^2 h_{jj}$$

추정오차를 줄이고자 하는 마디점을  $\tau_s$ 라고 하자. 확률적으로 가중값을 주기 위해서 다음과 같은 유사관찰값(pseudo-observation)들  $z_1, z_2, \dots, z_m$ 을 발생시키자.

$$(3.15) \quad z_i = B(t, t + \tau_s) + v_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

여기서  $\{v_i\}$ 는 정규분포  $N(0, \sigma_v^2)$ 에서 발생시킨 정규난수열이고,  $\{\varepsilon_i\}$ 와  $\{v_i\}$ 는 서로 독립이라고 가정하자. 즉,  $z_i$ 의 오차항은  $\varepsilon_i + v_i$ 로서 다음 확률분포를 따른다.

$$(3.16) \quad \varepsilon_i + v_i \stackrel{d}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_v^2)$$

관찰점들을 다음과 같이 나열한 열벡터를 살펴보자.

$$(3.17) \quad \tilde{y} = [y_0, \dots, y_s, z_1, \dots, z_m, y_{s+1}, \dots, y_{t+1}]'$$

이 관찰점들을 사용하는 선형회귀식을 다음과 같이 표기하자.

$$(3.18) \quad \tilde{y} = \tilde{X}\tilde{\beta} + \tilde{\varepsilon}$$

여기서  $\tilde{y} = [\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_{t+1}]'$ 는  $[I + m + 1]$ 차원 열벡터, 행렬  $\tilde{X}$ 는  $[I + m + 1] \times L$ 행렬,  $\tilde{\beta}$ 는  $L$ 차원 열벡터 그리고  $\tilde{\varepsilon}$ 는  $[I + m + 1]$ 차원 열벡터이다. 회귀식 (3.16)의 최소제곱추정량은 다음과 같다.

$$(3.19) \quad \check{\beta} = [\tilde{X}'\tilde{X}]^{-1}\tilde{X}'\tilde{y}$$

또한 모자행렬은 다음과 같다.

$$(3.20) \quad \tilde{H} = \tilde{X}[\tilde{X}'\tilde{X}]^{-1}\tilde{X}'$$

행렬  $\tilde{H}$ 의  $(i, j)$  원소를  $\tilde{h}_{ij}$ 라고 하자. 회귀모형 (3.15)에 최소제곱추정법을 적용해서 얻은  $\tilde{y}_j$ 의 적합값  $\check{y}_j$ , 오차  $\check{\varepsilon}_j$  그리고 적합값  $\check{y}_j$ 의 분산은 각각 다음과 같다.

$$(3.21) \quad \check{y}_j = \tilde{h}_{jj}\tilde{y}_j + \sum_{k \neq j} \tilde{h}_{jk}\tilde{y}_k$$

$$(3.22) \quad \check{\varepsilon}_j = [1 - \tilde{h}_{jj}]\tilde{y}_j - \sum_{k \neq j} \tilde{h}_{jk}\tilde{y}_k$$

$$(3.23) \quad \text{Var}(\check{y}_j) = [\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_v^2]\tilde{h}_{jj}$$

식 (3.11)과 식 (3.20)에서 다음 식을 유도할 수 있다.

$$(3.24) \quad h_{jj} < \tilde{h}_{jj}$$

식 (3.13), 식 (3.22) 그리고 식 (3.24)에서 알 수 있듯이, 적합값  $\check{y}_t$ 의 편이가 적합값  $\hat{y}_t$ 의 편이보다 작다. 즉, 확률적으로 가중값을 부과하는 최소제곱추정법에 의한 편이가 그렇지 않은 경우에 비해서 작다. 식 (3.14), 식 (3.23) 그리고 식 (3.24)에서 알 수 있듯이, 적합값  $\check{y}_t$ 의 분산이 적합값  $\hat{y}_t$ 의 분산보다 크다. 이자율기간구조모형을 추정하는 목적은 각 만기에서 신뢰구간을 구하는 것보다는 적합값 또는 예측값을 구하는 경우가 많다. 이러한 목적을 달성하기 위해서는 추정오차에서 분산을 약간 늘리더라도 편이를 감소시키는 것이 더 타당할 것이다. 즉, 확률적으로 가중값을 주는 가중최소제곱추정법을 사용하는 것이 더 실용적일 것이다.

#### 4. 實證分析

본 연구에서 사용한 데이터는 2006년 1월 24일부터 2008년 8월 14일까지 국고채 기준 수익률이다.<sup>(3)</sup> 국고채는 이표채이나, 2006년 3월부터 5년물 이상의 국고채를 대상으로 원금·이자분리제도(STRIPS)가 시행되었고, 한국증권선물거래소에서 채권지수를 개발하여 발표하였다. 또한, 채권시가평가회사들도 국고채 기준수익률을 산출해서 제공하고 있다. 본 연구에 사용되는 국고채 기준수익률은 KIS-net에서 제공되는 것으로서, 잔여기간 즉 만기는 3개월, 6개월, 9개월, 1년, 1년 반, 2년, 2년 반, 3년, 5년, 7년, 10년, 15년 그리고 20년이다.

이 데이터만을 사용해서 이자율기간구조를 추정한다면, 3개월 미만의 만기에 대해서는 外插(extrapolation)해야하는 문제가 발생한다. 외삽에 의한 오차는 內插(interpolation)에 의한 오차에 비해서 크다. 외삽을 해야하는 시점이 주어진 시간구간에서 멀어질수록 이 오차는 커진다. 데이터분석에서는 이 현상을 심각하게 다루어야 한다. 예를 들어, 이준행(2004)은 Nelson-Siegel모형을 사용해서 이자율기간구조를 추정하고, 1개월 이내의 단기 예측에서는 Nelson-Siegel모형이 確率步行模型(random walk model)에 비해서 우수한 성과를 보이지 못한다는 결론을 얻었다. 반면에 예측기간이 길어진 3개월 후, 6개월 후의 예측에서는 우월한 예측력을 보이며 또한 만기가 긴 장기이자율의 예측에 상대적으로 더 좋은 예측성과를 보인다는 결론을 내렸다. 본 저자는 이러한 결과가 Nelson-Siegel모형을 사용해서 나타나는 현상이 아니라, 외삽을 사용했기 때문에 발생했으리라 생각한다. 즉,

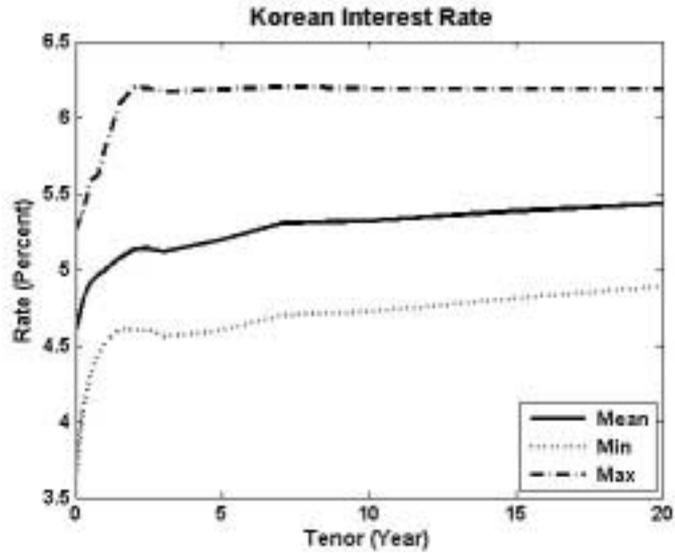
(3) 채권의 기준수익률을 KIS-net에서 다운받을 수 있다. 우선 KIS-net에서 시계열데이터정보를 제공하는 YTM매트릭스 화면에 들어가서, 금리선택박스에서 국고채를 클릭한다. 다음으로 기준일박스에서 연고자하는 기간을 설정하면, 국고채의 기준수익률을 다운받을 수 있다.

다른 어떤 회귀모형을 사용했어도 같은 현상을 보였으리라 생각한다. 따라서 데이터분석에서는 가능하면 외삽을 피해야만 한다. 먼 시점에 대한 경제정책을 수립하거나 만기까진 채권만을 포함하는 포트폴리오를 구성하는 경우에는, 그 시점에 도달하기 전에 경제상황이 크게 변할 수 있고 또한 이미 내린 결정을 조정할 기회가 자주 있다. 그러나 단기적 경제정책을 수립하거나 만기가 짧은 채권을 포함하는 포트폴리오를 구성하는 경우에는 이러한 조정의 기회가 적다. 따라서 이자율기간구조를 추정하는 목적에서 잔여기간이 1일부터 3개월 미만인 할인채가치를 잘 추정하는 것은 매우 중요하다. 즉, 잔여기간이 1일부터 3개월 미만인 할인채가치를 외삽을 하는 것은 이자율기간구조를 추정하는 목적과 잘 부합되지 않는다. 만기가 1일인 콜1일물의 이자율은 초단기 現物利子率(spot rate)로서 디폴트위험이 없다고 할 수 있다. 따라서 시장에 재정기회가 존재하지 않는다면, 이 이자율을 무위험이자율이라 할 수 있다. 본 연구에서는 앞에서 언급된 기준수익률 이외에도 콜1일물의 이자율을 데이터에 추가해서, 이자율기간구조를 추정하고자 한다.<sup>(4)</sup> 이렇게 합해진 데이터를 요약한 것이 <그림 4.1>에 그려져 있다. <그림 4.1>에서 알 수 있듯이, 만기가 증가함에 따라 기준수익률도 증가하는 경향을 보인다. <그림 4.2>에는 기준수익률의 표준편차가 그려져 있다. 표준편차는 만기가 9개월인 경우에 최소가 되며, 만기가 2년반인 경우 최대가 되었다가 서서히 감소한다.

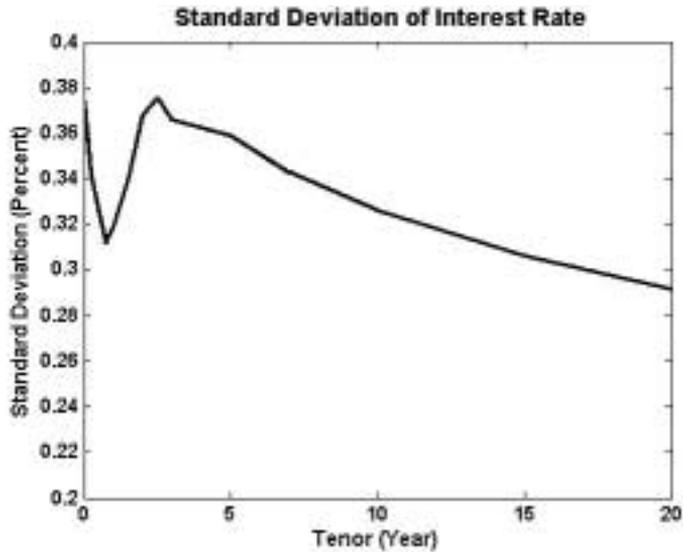
채권시가평가회사들에서는 국고채의 수익률기간구조를 구하기 위해서, 유통수익률에 Nelson-Siegel모형이나 3차 스플라인(cubic spline)과 같은 통계적 접근법을 사용하고 있다.<sup>(5)</sup> 그러나 본 연구에서는 3차 B-스플라인을 사용해서, 이자율기간구조를 추정하고자 한다. 이자율기간구조를 추정하는데 처음으로 B-스플라인을 적용한 것은 Steeley(1991)로 알려져 있다. Steeley는 1986년 3월 6일부터 1987년 10월 15일까지 데이터를 바탕으로 B-스플라인을 사용해서 영국의 우량증권인 길트(gilt)의 수익률기간구조를 추정하였다. 또한, Lin(2002)은 B-스플라인을 사용해서 타이완국채의 수익률기간구조를 추정하였다.

(4) 한국은행에서 제공하는 콜1일물(또는 콜익일물) 이자율에는 전체거래의 이자율과 중개회사거래의 이자율이 있다. 중개회사거래는 한국자금중개(주), 서울외국환중개(주), KIDB자금중개(주) 등 자금중개회사가 성사시키는 거래이다. 직거래는 은행 등 금융회사들이 자금중개회사를 통하지 않고 직접 거래를 하는 것이다. 본 연구에서 사용되는 콜1일물 이자율은 중개회사거래와 직거래를 합한 전체거래에 대한 것이다. 한국은행은 직거래에 의한 콜금리와 더불어 세 자금중개회사들을 통해서 거래되는 콜1일물에 대해 거래금액으로 가중평균한 지표금리를 산출해서 공표한다. 한국은행은 콜금리를 360일 기준으로 고시한다. 이 콜금리데이터를 한국은행 경제통계시스템(ecos.bok.or.kr)에서 다운받을 수 있다.

(5) 오규택·김명직·장국현(2000)을 참조하라.



〈그림 4.1〉 國庫債 基準收益率과 콜1일물 利子率



〈그림 4.2〉 基準收益率의 標準偏差

주어진 데이터에 대한 매듭점들은  $\tau_{1/360} = \frac{1}{360}$ ,  $\tau_{1/4} = \frac{1}{4}$ ,  $\tau_{2/4} = \frac{1}{2}$ ,  $\tau_{3/4} = \frac{3}{4}$ ,  $\tau_1 = 1$ ,  $\tau_{3/2} = \frac{3}{2}$ ,  $\tau_2 = 2$ ,  $\tau_{5/2} = \frac{5}{2}$ ,  $\tau_3 = 3$ ,  $\tau_5 = 5$ ,  $\tau_7 = 7$ ,  $\tau_{10} = 10$ ,  $\tau_{15} = 15$ ,  $\tau_{20} = 20$ 이다. 매듭점들 1/360과 20에 해당하는 B-스플라인을 생성하기 위해서는 시점이 1/360작거나 20보다 큰 점을 매듭점으로 하는 B-스플라인도 생성해야 한다. 이러한 매듭점들을  $\tau_{-3/4} = -\frac{3}{4}$ ,  $\tau_{-2/4} = -\frac{2}{4}$ .

$\tau_{-1/4} = -\frac{1}{4}$  과  $\tau_{30} = 30$ ,  $\tau_{40} = 40$ ,  $\tau_{50} = 50$ 이라 하자. 매듭점들을  $\tau_{-3/4}$ ,  $\tau_{-2/4}$ ,  $\tau_{-1/4}$ ,  $\tau_{1/360}$ ,  $\tau_{1/4}$ 로 하는 B-스플라인  $B_{-3/4}(\tau)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 B_{-3/4}(\tau) &= \sum_{j=0}^3 b_{-3/4;j}(\tau) \\
 b_{-3/4;0}(\tau) &= 10.62731 [\tau - \tau_{-3/4}]^3 I(\tau_{-3/4} \leq \tau < \tau_{-2/4}) \\
 b_{-3/4;1}(\tau) &= \{-31.80363 [\tau - \tau_{-2/4}]^3 + 7.97048 [\tau - \tau_{-2/4}]^2 + 1.99262 [\tau - \tau_{-2/4}] \\
 (4.1) \quad &\quad + 0.16605\} I(\tau_{-2/4} \leq \tau < \tau_{-1/4}) \\
 b_{-3/4;2}(\tau) &= \{31.49307 [\tau - \tau_{-1/4}]^3 + 0.66543 [\tau - \tau_{-1/4}]^2 + 0.01468 [\tau - \tau_{-1/4}] \\
 &\quad + 0.16760\} I(\tau_{-1/4} \leq \tau < \tau_{1/360}) \\
 b_{-3/4;3}(\tau) &= \{-10.78652 [\tau - \tau_{1/360}]^3 + 8.00000 [\tau - \tau_{1/360}]^2 - 1.97778 [\tau - \tau_{1/360}] \\
 &\quad + 0.16298\} I(\tau_{1/360} \leq \tau < \tau_{1/4})
 \end{aligned}$$

매듭점들을  $\tau_{-2/4}$ ,  $\tau_{-1/4}$ ,  $\tau_{1/360}$ ,  $\tau_{1/4}$ ,  $\tau_{2/4}$ 로 하는 B-스플라인  $B_{-2/4}(\tau)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 B_{-2/4}(\tau) &= \sum_{j=0}^3 b_{-2/4;j}(\tau) \\
 b_{-2/4;0}(\tau) &= 10.60773 [\tau - \tau_{-2/4}]^3 I(\tau_{-2/4} \leq \tau < \tau_{-1/4}) \\
 b_{-2/4;1}(\tau) &= \{-31.59007 [\tau - \tau_{-1/4}]^3 + 7.95580 [\tau - \tau_{-1/4}]^2 + 1.98895 [\tau - \tau_{-1/4}] \\
 (4.2) \quad &\quad + 0.16575\} I(\tau_{-1/4} \leq \tau < \tau_{1/360}) \\
 b_{-2/4;2}(\tau) &= \{32.41981 [\tau - \tau_{1/360}]^3 - 16.00000 [\tau - \tau_{1/360}]^2 - 0.04444 [\tau - \tau_{1/360}] \\
 &\quad + 0.16754\} I(\tau_{1/360} \leq \tau < \tau_{1/4}) \\
 b_{-2/4;3}(\tau) &= \{-10.72626 [\tau - \tau_{1/4}]^3 + 8.04469 [\tau - \tau_{1/4}]^2 - 2.01117 [\tau - \tau_{1/4}] \\
 &\quad + 0.16760\} I(\tau_{1/4} \leq \tau < \tau_{2/4})
 \end{aligned}$$

매듭점들을  $\tau_{-1/4}$ ,  $\tau_{1/360}$ ,  $\tau_{1/4}$ ,  $\tau_{2/4}$ ,  $\tau_{3/4}$ 로 하는 B-스플라인  $B_{-1/4}(\tau)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 B_{-1/4}(\tau) &= \sum_{j=0}^3 b_{-1/4;j}(\tau) \\
 b_{-1/4;0}(\tau) &= 10.54945 [\tau - \tau_{-1/4}]^3 I(\tau_{-1/4} \leq \tau < \tau_{1/360}) \\
 b_{-1/4;1}(\tau) &= \{-32.52039 [\tau - \tau_{1/360}]^3 + 8.00000 [\tau - \tau_{1/360}]^2 + 2.02222 [\tau - \tau_{1/360}] \\
 (4.3) \quad &\quad + 0.17039\} I(\tau_{1/360} \leq \tau < \tau_{1/4}) \\
 b_{-1/4;2}(\tau) &= \{32.19870 [\tau - \tau_{1/4}]^3 - 16.11929 [\tau - \tau_{1/4}]^2 + 0.01495 [\tau - \tau_{1/4}] \\
 &\quad + 0.66790\} I(\tau_{1/4} \leq \tau < \tau_{2/4})
 \end{aligned}$$

$$b_{-1/4;4}(\tau) = \{-10.70632 [\tau - \tau_{2/4}]^3 + 8.02974 [\tau - \tau_{2/4}]^2 - 2.00743 [\tau - \tau_{2/4}] + 0.16729\}1(\tau_{2/4} \leq \tau < \tau_{3/4})$$

매듭점들을  $\tau_{1/360}$ ,  $\tau_{1/4}$ ,  $\tau_{2/4}$ ,  $\tau_{3/4}$ ,  $\tau_1$ 로 하는 B-스플라인  $B_{1/360}(\tau)$ 는 다음과 같다.

$$B_{1/360}(\tau) = \sum_{j=0}^3 b_{1/360;j}(\tau)$$

$$b_{1/360;0}(\tau) = 10.88710 [\tau - \tau_{1/360}]^3 1(\tau_{1/360} \leq \tau < \tau_{1/4})$$

$$b_{1/360;1}(\tau) = \{-32.13912 [\tau - \tau_{1/4}]^3 + 8.07460 [\tau - \tau_{1/4}]^2 + 1.99622 [\tau - \tau_{1/4}] + 0.16450\}1(\tau_{1/4} \leq \tau < \tau_{2/4})$$

$$b_{1/360;2}(\tau) = \{32.03965 [\tau - \tau_{2/4}]^3 - 16.02974 [\tau - \tau_{2/4}]^2 + 0.00743 [\tau - \tau_{2/4}] + 0.66605\}1(\tau_{2/4} \leq \tau < \tau_{3/4})$$

$$b_{1/360;3}(\tau) = \{-10.66667 [\tau - \tau_{3/4}]^3 - 8.00000 [\tau - \tau_{3/4}]^2 - 2.00000 [\tau - \tau_{3/4}] + 0.16667\}1(\tau_{3/4} \leq \tau < \tau_1)$$

매듭점들을  $\tau_{1/4}$ ,  $\tau_{2/4}$ ,  $\tau_{3/4}$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_{3/2}$ 로 하는 B-스플라인  $B_{1/4}(\tau)$ 는 다음과 같다.

$$B_{1/4}(\tau) = \sum_{j=0}^3 b_{1/4;j}(\tau)$$

$$b_{1/4;0}(\tau) = \frac{32}{3} [\tau - \tau_{1/4}]^3 1(\tau_{1/4} \leq \tau < \tau_{2/4})$$

$$b_{1/4;1}(\tau) = \left\{ -\frac{88}{3} [\tau - \tau_{2/4}]^3 + 8[\tau - \tau_{2/4}]^2 + 2[\tau - \tau_{2/4}] + \frac{1}{6} \right\} 1(\tau_{2/4} \leq \tau < \tau_{3/4})$$

$$b_{1/4;2}(\tau) = \left\{ 24[\tau - \tau_{3/4}]^3 - 14[\tau - \tau_{3/4}]^2 + \frac{1}{2} [\tau - \tau_{3/4}] + \frac{17}{24} \right\} 1(\tau_{3/4} \leq \tau < \tau_1)$$

$$b_{1/4;3}(\tau) = \left\{ -\frac{8}{3} [\tau - \tau_1]^3 + 4[\tau - \tau_1]^2 - 2[\tau - \tau_1] + \frac{1}{3} \right\} 1(\tau_1 \leq \tau < \tau_{3/2})$$

매듭점들을  $\tau_{2/4}$ ,  $\tau_{3/4}$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_{3/2}$ ,  $\tau_2$ 로 하는 B-스플라인  $B_{2/4}(\tau)$ 는 다음과 같다.

$$B_{2/4}(\tau) = \sum_{j=0}^3 b_{2/4;j}(\tau)$$

$$b_{2/4;0}(\tau) = 8[\tau - \tau_{2/4}]^3 1(\tau_{2/4} \leq \tau < \tau_{3/4})$$

$$b_{2/4;1}(\tau) = \left\{ -\frac{88}{5} [\tau - \tau_{3/4}]^3 + 6[\tau - \tau_{3/4}]^2 + \frac{3}{2} [\tau - \tau_{3/4}] + \frac{1}{8} \right\} 1(\tau_{3/4} \leq \tau < \tau_1)$$

$$b_{2/4;2}(\tau) = \left\{ \frac{32}{5} [\tau - \tau_1]^3 - \frac{36}{5} [\tau - \tau_1]^2 + \frac{6}{5} [\tau - \tau_1] + \frac{3}{5} \right\} 1(\tau_1 \leq \tau < \tau_{3/2})$$

$$b_{2/4;3}(\tau) = \left\{ -\frac{8}{5} [\tau - \tau_{3/2}]^3 + \frac{12}{5} [\tau - \tau_{3/2}]^2 - \frac{6}{5} [\tau - \tau_{3/2}] + \frac{1}{5} \right\} 1(\tau_{3/2} \leq \tau < \tau_2)$$

매듭점들을  $\tau_{3/4}$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_{3/2}$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_{5/2}$ 로 하는 B-스플라인  $B_{3/4}(\tau)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} B_{3/4}(\tau) &= \sum_{j=0}^3 b_{3/4;j}(\tau) \\ b_{3/4;0}(\tau) &= \frac{64}{15} [\tau - \tau_{3/4}]^3 1(\tau_{3/4} \leq \tau < \tau_1) \\ (4.7) \quad b_{3/4;1}(\tau) &= \left\{ -\frac{76}{15} [\tau - \tau_1]^3 + \frac{16}{5} [\tau - \tau_1]^2 + \frac{4}{5} [\tau - \tau_1] + \frac{1}{15} \right\} 1(\tau_1 \leq \tau < \tau_{3/2}) \\ b_{3/4;2}(\tau) &= \left\{ \frac{64}{15} [\tau - \tau_{3/2}]^3 - \frac{22}{5} [\tau - \tau_{3/2}]^2 + \frac{1}{5} [\tau - \tau_{3/2}] + \frac{19}{30} \right\} 1(\tau_{3/2} \leq \tau < \tau_2) \\ b_{3/4;3}(\tau) &= \left\{ -\frac{4}{3} [\tau - \tau_2]^3 + 2[\tau - \tau_2]^2 - 1[\tau - \tau_2] + \frac{1}{6} \right\} 1(\tau_2 \leq \tau < \tau_{5/2}) \end{aligned}$$

매듭점들을  $\tau_1$ ,  $\tau_{3/2}$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_{5/2}$ ,  $\tau_3$ 로 하는 B-스플라인  $B_1(\tau)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} B_1(\tau) &= \sum_{j=0}^3 b_{1;j}(\tau) \\ b_{1;0}(\tau) &= \frac{4}{3} [\tau - \tau_1]^3 1(\tau_1 \leq \tau < \tau_{3/2}) \\ (4.8) \quad b_{1;1}(\tau) &= \left\{ -4[\tau - \tau_{3/2}]^3 + 2[\tau - \tau_{3/2}]^2 + 1[\tau - \tau_{3/2}] + \frac{1}{6} \right\} 1(\tau_{3/2} \leq \tau < \tau_2) \\ b_{1;2}(\tau) &= \left\{ 4[\tau - \tau_2]^3 - 4[\tau - \tau_2]^2 + 0[\tau - \tau_2] + \frac{2}{3} \right\} 1(\tau_2 \leq \tau < \tau_{5/2}) \\ b_{1;3}(\tau) &= \left\{ -\frac{4}{3} [\tau - \tau_{5/2}]^3 + 2[\tau - \tau_{5/2}]^2 - 1[\tau - \tau_{5/2}] + \frac{1}{6} \right\} 1(\tau_{5/2} \leq \tau < \tau_3) \end{aligned}$$

매듭점들을  $\tau_{3/2}$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_{5/2}$ ,  $\tau_3$ ,  $\tau_5$ 로 하는 B-스플라인  $B_{3/2}(\tau)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} B_{3/2}(\tau) &= \sum_{j=0}^3 b_{3/2;j}(\tau) \\ b_{3/2;0}(\tau) &= \frac{4}{3} [\tau - \tau_{3/2}]^3 1(\tau_{3/2} \leq \tau < \tau_2) \\ (4.9) \quad b_{3/2;1}(\tau) &= \left\{ -\frac{4}{3} [\tau - \tau_2]^3 + 2[\tau - \tau_2]^2 + 1[\tau - \tau_2] + \frac{1}{6} \right\} 1(\tau_2 \leq \tau < \tau_{5/2}) \\ b_{3/2;2}(\tau) &= \left\{ \frac{34}{15} [\tau - \tau_{5/2}]^3 - 3[\tau - \tau_{5/2}]^2 + \frac{1}{2} [\tau - \tau_{5/2}] + \frac{3}{4} \right\} 1(\tau_{5/2} \leq \tau < \tau_3) \\ b_{3/2;3}(\tau) &= \left\{ -\frac{1}{15} [\tau - \tau_3]^3 + \frac{2}{5} [\tau - \tau_3]^2 - \frac{4}{5} [\tau - \tau_3] + \frac{8}{15} \right\} 1(\tau_3 \leq \tau < \tau_5) \end{aligned}$$

매듭점들을  $\tau_2, \tau_{5/2}, \tau_3, \tau_5, \tau_7$ 로 하는 B-스플라인  $B_2(\tau)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 B_2(\tau) &= \sum_{j=0}^3 b_{2;j}(\tau) \\
 b_{2;0}(\tau) &= \frac{2}{3} [\tau - \tau_2]^3 I(\tau_2 \leq \tau < \tau_{5/2}) \\
 (4.10) \quad b_{2;1}(\tau) &= \left\{ -\frac{10}{9} [\tau - \tau_{5/2}]^3 + I[\tau - \tau_{5/2}]^2 + \frac{1}{2}[\tau - \tau_{5/2}] + \frac{1}{12} \right\} I(\tau_{5/2} \leq \tau < \tau_3) \\
 b_{2;2}(\tau) &= \left\{ \frac{83}{600} [\tau - \tau_3]^3 - \frac{2}{3} [\tau - \tau_3]^2 + \frac{2}{3} [\tau - \tau_3] + \frac{4}{9} \right\} I(\tau_3 \leq \tau < \tau_5) \\
 b_{2;3}(\tau) &= \left\{ -\frac{1}{36} [\tau - \tau_5]^3 + \frac{1}{6} [\tau - \tau_5]^2 - \frac{1}{3} [\tau - \tau_5] + \frac{2}{9} \right\} I(\tau_5 \leq \tau < \tau_7)
 \end{aligned}$$

매듭점들을  $\tau_{5/2}, \tau_3, \tau_5, \tau_7, \tau_{10}$ 로 하는 B-스플라인  $B_{5/2}(\tau)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 B_{5/2}(\tau) &= \sum_{j=0}^3 b_{5/2;j}(\tau) \\
 b_{5/2;0}(\tau) &= 0.17778 [\tau - \tau_{5/2}]^3 I(\tau_{5/2} \leq \tau < \tau_3) \\
 (4.11) \quad b_{5/2;1}(\tau) &= \{-0.09008 [\tau - \tau_3]^3 + 0.26667 [\tau - \tau_3]^2 + 0.13333 [\tau - \tau_3] \\
 &\quad + 0.02222\} I(\tau_3 \leq \tau < \tau_5) \\
 b_{5/2;2}(\tau) &= \{0.05992 [\tau - \tau_5]^3 - 0.27381 [\tau - \tau_5]^2 + 0.11905 [\tau - \tau_5] \\
 &\quad + 0.63492\} I(\tau_5 \leq \tau < \tau_7) \\
 b_{5/2;3}(\tau) &= \{-0.00952 [\tau - \tau_7]^3 + 0.08571 [\tau - \tau_7]^2 - 0.25714 [\tau - \tau_7] \\
 &\quad + 0.25714\} I(\tau_7 \leq \tau < \tau_{10})
 \end{aligned}$$

매듭점들을  $\tau_3, \tau_5, \tau_7, \tau_{10}, \tau_{15}$ 로 하는 B-스플라인  $B_3(\tau)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 B_3(\tau) &= \sum_{j=0}^3 b_{3;j}(\tau) \\
 b_{3;0}(\tau) &= 0.17857 [\tau - \tau_3]^3 I(\tau_3 \leq \tau < \tau_5) \\
 (4.12) \quad b_{3;1}(\tau) &= \{-0.04214 [\tau - \tau_5]^3 + 0.10714 [\tau - \tau_5]^2 + 0.21429 [\tau - \tau_5] \\
 &\quad + 0.14286\} I(\tau_5 \leq \tau < \tau_7) \\
 b_{3;2}(\tau) &= \{0.02036 [\tau - \tau_7]^3 - 0.14571 [\tau - \tau_7]^2 + 0.13714 [\tau - \tau_7] \\
 &\quad + 0.14286\} I(\tau_7 \leq \tau < \tau_{10}) \\
 b_{3;3}(\tau) &= \{-0.00250 [\tau - \tau_{10}]^3 + 0.03750 [\tau - \tau_{10}]^2 - 0.18750 [\tau - \tau_{10}] \\
 &\quad + 0.31250\} I(\tau_{10} \leq \tau < \tau_{15})
 \end{aligned}$$

매듭점들을  $\tau_5, \tau_7, \tau_{10}, \tau_{15}, \tau_{20}$ 로 하는 B-스플라인  $B_5(\tau)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
(4.13) \quad B_5(\tau) &= \sum_{j=0}^3 b_{5;j}(\tau) \\
b_{5;0}(\tau) &= 0.01000[\tau - \tau_5]^3 1(\tau_5 \leq \tau < \tau_7) \\
b_{5;1}(\tau) &= \{-0.01404[\tau - \tau_7]^3 + 0.06000[\tau - \tau_7]^2 + 0.12000[\tau - \tau_7] \\
&\quad + 0.08000\} 1(\tau_7 \leq \tau < \tau_{10}) \\
b_{5;2}(\tau) &= \{0.00596[\tau - \tau_{10}]^3 - 0.06635[\tau - \tau_{10}]^2 + 0.10096[\tau - \tau_{10}] \\
&\quad + 0.60096\} 1(\tau_{10} \leq \tau < \tau_{15}) \\
b_{5;3}(\tau) &= \{-0.00154[\tau - \tau_{15}]^3 + 0.02308[\tau - \tau_{15}]^2 - 0.11538[\tau - \tau_{15}] \\
&\quad + 0.19231\} 1(\tau_{15} \leq \tau < \tau_{20})
\end{aligned}$$

매듭점들을  $\tau_7, \tau_{10}, \tau_{15}, \tau_{20}, \tau_{30}$ 로 하는 B-스플라인  $B_7(\tau)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
(4.14) \quad B_7(\tau) &= \sum_{j=0}^3 b_{7;j}(\tau) \\
b_{7;0}(\tau) &= 0.00321[\tau - \tau_7]^3 1(\tau_7 \leq \tau < \tau_{10}) \\
b_{7;1}(\tau) &= \{-0.00446[\tau - \tau_{10}]^3 + 0.02885[\tau - \tau_{10}]^2 + 0.08653[\tau - \tau_{10}] \\
&\quad + 0.08654\} 1(\tau_{10} \leq \tau < \tau_{15}) \\
b_{7;2}(\tau) &= \{0.00321[\tau - \tau_{15}]^3 - 0.03808[\tau - \tau_{15}]^2 + 0.04038[\tau - \tau_{15}] \\
&\quad + 0.68269\} 1(\tau_{15} \leq \tau < \tau_{20}) \\
b_{7;3}(\tau) &= \{-0.00033[\tau - \tau_{20}]^3 + 0.01000[\tau - \tau_{20}]^2 - 0.10000[\tau - \tau_{20}] \\
&\quad + 0.33333\} 1(\tau_{20} \leq \tau < \tau_{30})
\end{aligned}$$

매듭점들을  $\tau_{10}, \tau_{15}, \tau_{20}, \tau_{30}, \tau_{40}$ 로 하는 B-스플라인  $B_{10}(\tau)$ 는 다음과 같다.

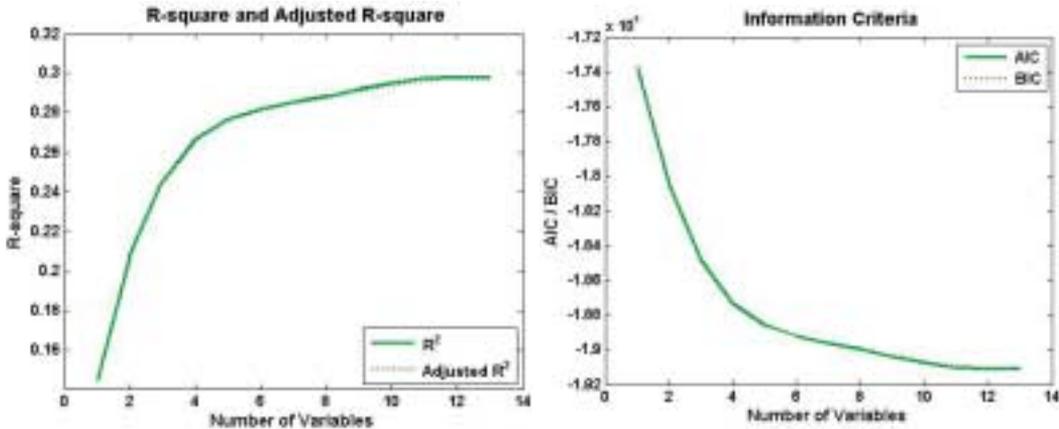
$$\begin{aligned}
(4.15) \quad B_{10}(\tau) &= \sum_{j=0}^3 b_{10;j}(\tau) \\
b_{10;0}(\tau) &= 0.00100[\tau - \tau_{10}]^3 1(\tau_{10} \leq \tau < \tau_{15}) \\
b_{10;1}(\tau) &= \{-0.00220[\tau - \tau_{15}]^3 + 0.01500[\tau - \tau_{15}]^2 + 0.07500[\tau - \tau_{15}] \\
&\quad + 0.12500\} 1(\tau_{15} \leq \tau < \tau_{20}) \\
b_{10;2}(\tau) &= \{0.00080[\tau - \tau_{20}]^3 - 0.01800[\tau - \tau_{20}]^2 + 0.06000[\tau - \tau_{20}] \\
&\quad + 0.60000\} 1(\tau_{20} \leq \tau < \tau_{30}) \\
b_{10;3}(\tau) &= \{-0.00020[\tau - \tau_{30}]^3 + 0.00600[\tau - \tau_{30}]^2 - 0.06000[\tau - \tau_{30}] \\
&\quad + 0.20000\} 1(\tau_{30} \leq \tau < \tau_{40})
\end{aligned}$$

매듭점들을  $\tau_{15}, \tau_{20}, \tau_{30}, \tau_{40}, \tau_{50}$ 로 하는 B-스플라인  $B_{15}(\tau)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 B_{15}(\tau) &= \sum_{j=0}^3 b_{15;j}(\tau) \\
 b_{15;0}(\tau) &= 0.00053[\tau - \tau_{15}]^3 1(\tau_{15} \leq \tau < \tau_{20}) \\
 b_{15;1}(\tau) &= \{-0.00063[\tau - \tau_{20}]^3 + 0.00800[\tau - \tau_{20}]^2 + 0.04000[\tau - \tau_{20}] \\
 &\quad + 0.06667\} 1(\tau_{20} \leq \tau < \tau_{30}) \\
 b_{15;3}(\tau) &= \{0.00053[\tau - \tau_{30}]^3 - 0.01100[\tau - \tau_{30}]^2 + 0.01000[\tau - \tau_{30}] \\
 &\quad + 0.63333\} 1(\tau_{30} \leq \tau < \tau_{40}) \\
 b_{15;4}(\tau) &= \{-0.00017[\tau - \tau_{40}]^3 + 0.00500[\tau - \tau_{40}]^2 - 0.05000[\tau - \tau_{20}] \\
 &\quad + 0.16667\} 1(\tau_{40} \leq \tau < \tau_{50})
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

기준수익률의 기간구조를 구하기 위해서, 종속변수를 기준수익률로 설명변수들을  $B_{-2/4}(\tau)$ ,  $B_{-1/4}(\tau)$ ,  $B_{1/360}(\tau)$ ,  $B_{1/4}(\tau)$ ,  $B_{2/4}(\tau)$ ,  $B_{3/4}(\tau)$ ,  $B_1(\tau)$ ,  $B_{3/2}(\tau)$ ,  $B_2(\tau)$ ,  $B_{5/2}(\tau)$ ,  $B_3(\tau)$ ,  $B_5(\tau)$ ,  $B_7(\tau)$ ,  $B_{10}(\tau)$ ,  $B_{15}(\tau)$ 로 하는 선형회귀모형들 중에서 최적의 모형을 선택하기로 하자. 이 경우에 선택한 모형은 전체 데이터에 적합한 것이어야 한다. 따라서 633개 관찰점들 모두를 반영하는 선형회귀모형, 즉 수익률기간구조모형을 선택해야 한다. 설명변수들  $B_{10}(\tau)$ 과  $B_{15}(\tau)$ 는 다른 설명변수들의 선형결합으로 나타낼 수 있다. 즉, 가능한 설명변수들을 모두 사용하는 선형회귀모형에는 심각한 다중공선성문제가 발생한다. 따라서,  $B_{10}(\tau)$ 과  $B_{15}(\tau)$ 를 가능한 설명변수군에서 제외하고,  $B_{-2/4}(\tau)$ ,  $B_{-1/4}(\tau)$ ,  $B_{1/360}(\tau)$ ,  $B_{1/4}(\tau)$ ,  $B_{2/4}(\tau)$ ,  $B_{3/4}(\tau)$ ,  $B_1(\tau)$ ,  $B_{3/2}(\tau)$ ,  $B_2(\tau)$ ,  $B_{5/2}(\tau)$ ,  $B_3(\tau)$ ,  $B_5(\tau)$ ,  $B_7(\tau)$  중에서 종속변수인 기준수익률을 잘 반영하는 설명변수들을 선택하기로 하자. 통계적으로 적합한 회귀식을 구한다는 것은 平滑性(smoothness)을 적절하게 유지하기 위해서 분산을 작게 하는 동시에 適合度(goodness of fit)를 충분히 유지하기 위해서 편의를 작게 해야한다. 그러나 분산과 편의는 서로 반대로 가는 Grenander현상을 보인다. 따라서 평활성과 적합도 사이에서 적당한 타협을 하는 선형회귀모형을 선택해야 한다. 이러한 선택의 문제는 어떤 설명변수들, 즉 B-스플라인들을 선택하느냐로 귀결된다. 가능한 선형회귀모형들의 결정계수  $R^2$ , 수정결정계수  $R_a^2$ , Akaike판단기준  $AIC$ 와 베이지안판단기준  $BIC$ 가 <그림 4.3>에 그려져 있다. <그림 4.3>에서 알 수 있듯이, 결정계수와 수정결정계수는 설명변수들의 개수가 6 이상이면 평활해진다. Akaike판단기준이나 베이지안판단기준은 설명변수들의 개수가 4보다 커지면 평활해진다. 원래 Akaike판단기준이나 베이지안판단기준은 첫 번째 극소값을 갖는 설명변수들을 선택해야한다.<sup>(6)</sup> 그러나, 분석대상이 되는 만기시점들의 개수가 14개

(6) 회귀모형의 설명변수 선택에 관해서는 Choi(1992)와 최병선(1997, 제5장)을 참조하라.



〈그림 4.3〉 설명변수 選擇의 判斷基準들

에 불과하므로, 설명변수들의 개수가 그 반인 7개를 초과하는 선형회귀모형은 다중공선성 문제(multicollinearity problem)를 일으키며 또한 회귀계수추정량의 분산을 크게 한다. 또한, 이는 母數節約原則(principle of parsimony)에 어긋난다. 따라서, 우리는 이 회귀분석에서 설명변수들을 7개 이하로 제한하기로 하자.

주어진 8,862(= 633×14)개의 관찰점들에 대해 종속변수를 기준수익률로 하고 설명변수들을 7개로 하는 선형회귀모형 중에서 결정계수를 가장 크게 하는 모형을 추정할 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 (4.17) \quad y_t(\tau) = & 5.1564 - 0.74119 B_{-2/4}(\tau) - 0.27346 B_{-1/4}(\tau) \\
 & - 0.25833 B_{1/360}(\tau) - 0.16322 B_{1/4}(\tau) - 0.18854 B_{2/4}(\tau) \\
 & + 0.26345 B_3(\tau) + 0.44191 B_7(\tau) + \xi_t(\tau)
 \end{aligned}$$

이 추정모형의 결정계수는  $R^2 = 0.2855$ 이고  $F$ 값은 505.42이고, 각 추정된 회귀계수는 유의적으로 0과 다르다. 회귀모형 (4.17)은 설명변수들  $B_{-2/4}(\tau)$ ,  $B_{-1/4}(\tau)$ ,  $B_{1/360}(\tau)$ ,  $B_{1/4}(\tau)$ ,  $B_{2/4}(\tau)$ ,  $B_3(\tau)$ ,  $B_7(\tau)$ 에서 타당한 변수들을 선택하기 위한 과정에서 출력되는 부산물이지만, 추정식 (4.17) 자체는 큰 의미가 없다.

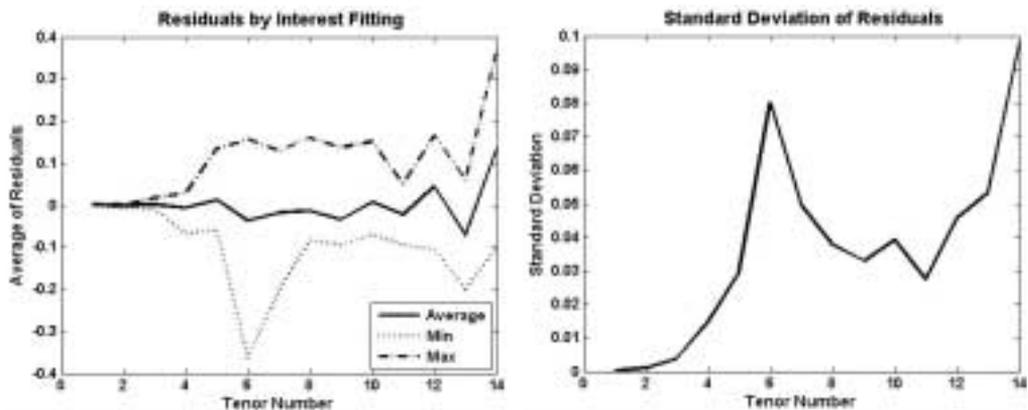
기준수익률의 기간구조를 추정하기 위해서는 각 시점  $t(= 1, 2, \dots, 633)$ 에서 기준수익률을 종속변수로 하고  $B_{-2/4}(\tau)$ ,  $B_{-1/4}(\tau)$ ,  $B_{1/360}(\tau)$ ,  $B_{1/4}(\tau)$ ,  $B_{2/4}(\tau)$ ,  $B_3(\tau)$ ,  $B_7(\tau)$ 를 설명변수로 하는 선형회귀분석을 한다. 각 시점에는 관찰점들이 14개 있다. 시점  $t$ 의 기준수익

를  $y_t(\tau)$ 에서 선형회귀모형의 적합값  $\hat{y}_t(\tau)$ 을 뺀 잔차를  $\hat{\epsilon}_t(\tau)$ 라 하자. 잔차들  $\{\hat{\epsilon}_t(\tau) | t = 1, 2, \dots, 633\}$ 를 요약한 것이 <그림 4.4>에 그려져 있다. 잔차의 형태를 쉽게 파악하기 위해서, <그림 4.4>에는 X축으로 만기가 아닌 만기의 순서로 나타냈음을 유의하라. <그림 4.4>에서 알 수 있듯이, 만기가 커질수록 잔차들의 평균과 표준편차가 커진다. 이러한 현상이 나타나는 이유는 만기가 작은 부분에 관찰점들이 모여 있고 만기가 큰 부분에 관찰점들이 성기게 있기 때문이다. <그림 4.4>에서 알 수 있듯이, 만기 1년 반인 기준수익률에 異狀點(outlier)이 있다. 만기가 1/360와 1/4인 잔차들의 표본평균과 표본표준편차는 각각 다음과 같다.

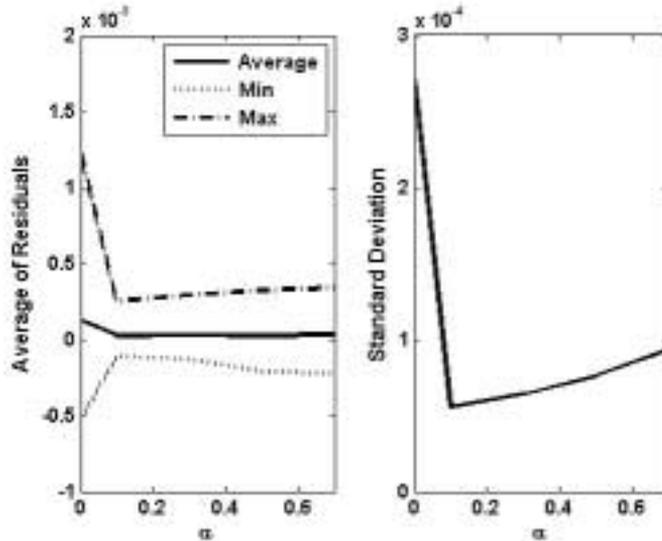
$$(4.18) \quad \text{mean}(\hat{\epsilon}_t(1/360)) = 0.000125, \quad \text{SD}(\hat{\epsilon}_t(1/360)) = 0.000271$$

$$(4.19) \quad \text{mean}(\hat{\epsilon}_t(1/4)) = -0.000495, \quad \text{SD}(\hat{\epsilon}_t(1/4)) = 0.001076$$

가중값을 부여하지 않는 최소제곱추정법을 적용하면, 만기가 아주 작거나 아주 큰 경우에 추정오차가 커진다. 그러나 본 연구의 목적을 달성하기 위해서는 만기가 작은 경우에 추정오차를 작게 하는 것이 더 합리적이다. 따라서 앞에서 도입한 확률적 가중값을 부여하는 최소제곱추정법을 적용해서, 이자율기간구조를 추정하자. 이러한 목적을 달성하기 위한 첫 번째 단계로, 만기 1일인 콜금리를 평균으로 하고 표준편차가  $\alpha \text{SD}(\hat{\epsilon}_t(1/360))$ 인 정규난수들 4개와 만기 3개월인 기준수익률을 평균으로 하고 표준편차가  $\alpha \text{SD}(\hat{\epsilon}_t(1/4))$ 인 정규난수들 2개를 생성한다. 이 관찰점들을 원래 기준수익률데이터에 추가한다. 여기

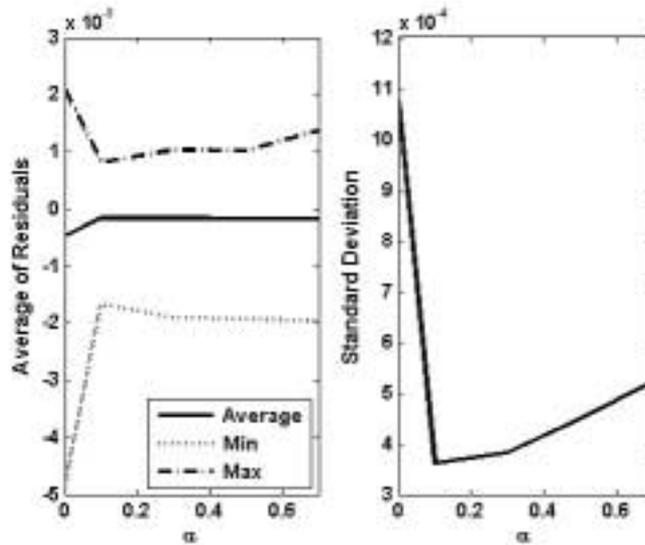


<그림 4.4> 推定된 期間構造의 殘差들



〈그림 4.5〉 만기가 1/360인 殘差 대 加重값

서는  $\alpha$ 값으로  $\alpha_1 = 0.1$ ,  $\alpha_2 = 0.3$ ,  $\alpha_3 = 0.5$ ,  $\alpha_4 = 0.7$ 을 사용하고, 편의상 관찰점들을 추가하지 않은 원래 데이터에 해당하는  $\alpha$ 값을  $\alpha_0 = 0$ 라고 하자. 두 번째 단계로, 각  $\alpha$ 값에 대해서 기준수익률의 기간구조를 추정하기 위해서는 각 시점에서 관찰값이 20개인 기준수익률을 종속변수로 하고  $B_{-2/4}(\tau)$ ,  $B_{-1/4}(\tau)$ ,  $B_{1/360}(\tau)$ ,  $B_{1/4}(\tau)$ ,  $B_{2/4}(\tau)$ ,  $B_3(\tau)$ ,  $B_7(\tau)$ 를 설명변수로 하는 선형회귀분석을 한다. 앞에서와 마찬가지로, 시점  $t$ 에서 기준수익률  $y_t(\tau)$ 에서 선형회귀모형의 적합값  $\hat{y}_t(\tau)$ 을 뺀 잔차를  $\hat{\epsilon}_t(\tau)$ 라 하자. 각  $\alpha$ 값에 대해서 만기가 1/360인 잔차들의 표본평균과 표본표준편차를 그린 것이 〈그림 4.5〉이다. 〈그림 4.5〉에서 알 수 있듯이, 확률적 가중값을 부여한 가중최소제곱추정법에 의한 만기가 1/360인 잔차들의 표본평균의 절대값은 가중값을 사용하지 않은 경우에 비해서 약간 작으나, 표준편차는 많이 작다. 특히,  $\alpha$ 값이  $\alpha_1 = 0.1$ 인 경우에 만기가 1/360인 잔차들의 표본평균의 절대값과 표본표준편차가 가장 작다. 〈그림 4.6〉에는 각  $\alpha$ 값에 대해서 만기가 1/4인 잔차들의 표본평균과 표본표준편차가 그려져 있다. 〈그림 4.6〉에서 알 수 있듯이, 확률적 가중값을 부여한 가중최소제곱추정법에 의한 만기가 1/4인 잔차들의 표본평균의 절대값은 가중값을 사용하지 않은 경우에 비해서 약간 작으나, 표준편차는 많이 작다. 특히,  $\alpha$ 값이  $\alpha_1 = 0.1$ 인 경우에 만기가 1/4인 잔차들의 표본평균과 표본표준편차가 가장 작다. 따라서,  $\alpha$ 값이  $\alpha_1 = 0.1$ 인 확률적 가중값을 사용하면 작은 만기에서 추정오차를 작게 만든다는 것을 알 수 있다. 이 경우에, 만기가 1/360와 1/4인 잔차들의 표본평균과 표본표준편



〈그림 4.6〉 滿期가 1/4인 殘差 대 加重값

차는 각각 다음과 같다.

$$(4.20) \quad \text{mean}(\hat{\epsilon}_t(1/360)) = 0.000056, \quad \text{SD}(\hat{\epsilon}_t(1/360)) = 0.000113$$

$$(4.21) \quad \text{mean}(\hat{\epsilon}_t(1/4)) = -0.000165, \quad \text{SD}(\hat{\epsilon}_t(1/4)) = 0.000362$$

## 5. 標本外豫測

미래에 대한 경제정책의 선택, 포트폴리오관리, 금융파생상품의 가치평가 그리고 위험 관리를 위해서는 이자율기간구조 자체를 예측할 필요가 있다. Duffee(2002)가 지적했듯이, 이자율기간구조의 아핀형모형(affine model)을 사용해서 표본외예측(out-of-sample forecast)을 하면 좋은 결과를 얻지 못한다. 즉, 이자율기간구조의 예측에는 확률해석적 모형보다는 統計的 模型이 더 적당하다. Diebold and Li(2003)은 Nelson-Siegel모형을 사용해서 이자율기간구조를 추정한 다음, 主成分分析(principle component analysis)의 결과에서와 마찬가지로 세 회귀계수들을 水準(level), 기울기(slope) 그리고 曲律(curvature)로 해석하였다. 또한 각 회귀계수를 시간의 함수로 본 시계열데이터를 차수가 1인 자기회귀모형, 즉 AR(1)에 적용해서 회귀계수를 예측하고, 이 예측값을 사용해서 이자율기간구조의 표

본외예측을 하였다. 현재로서는 Diebold-Li방법이 이자율기간구조를 예측하는 가장 보편적인 방법이다. 그러나 Dahl and Bauer(2007)는 Diebold and Li(2003)이 제시한 실험을 다시 하였으나 원래 논문에서 언급된 만큼 좋은 결과를 얻지 못했음을 보고하였다. 또한 관찰시점들을 확장해서 Diebold-Li방법을 적용한 결과, 더 좋지 않은 결과를 얻었다고 보고하였다. 이자율기간구조의 표본외예측에 관해서는 Berardi and Torous(2002), De Pooter, Ravazzolo and Van Dijk(2007), Koivu, Nyholm and Stromberg(2007)을 참조하라. 이준행(2004)은 Diebold-Li방법을 적용해서 우리나라 이자율기간구조의 표본외예측을 하였다.

우리나라에서도 채권시가평가제도가 실시되고 채권시가평가회사들이 설립되고 발전함에 따라, 이자율의 예측이나 이자율기간구조의 추정에 많은 연구가 이루어지고 있다. 그러나 아직 국내에서는 이자율기간구조 자체의 예측에 대한 연구가 활발하게 이루어지고 있지는 않다.<sup>(7)</sup> 그러나 경제정책의 설립, 효율적인 포트폴리오의 운용이나 위험관리를 위해서는 이자율기간구조의 예측이 반드시 필요하다. 이자율기간구조를 예측한다는 것은 미래시점의 이자율을 나타내는 함수를 예측한다는 것이다. 만기에 대해 연속인 함수를 예측한다는 것은 미래의 한 시점에서 무수히 많은 만기에 대해 예측을 한다는 것이다. 직접적으로 이러한 예측함수를 구하는 것은 불가능하므로 유한개의 모수들만을 예측하는 방법으로 이자율기간구조를 예측하는 것이 현실적이다. 이 절에서는 B-스플라인을 핵(kernel)으로 해서 이자율기간구조를 예측하기로 하자.

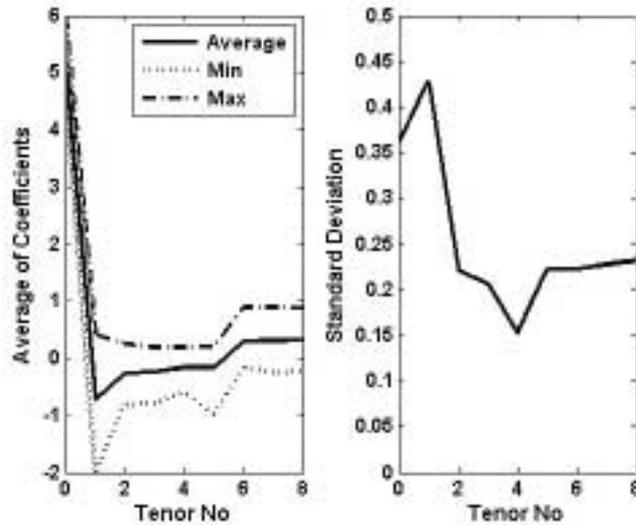
설명변수들을  $B_{-2/4}(\tau)$ ,  $B_{-1/4}(\tau)$ ,  $B_{1/360}(\tau)$ ,  $B_{1/4}(\tau)$ ,  $B_{2/4}(\tau)$ ,  $B_3(\tau)$ ,  $B_7(\tau)$ 로 하는 선형회귀모형을 다음과 같이 표기하자.

$$(5.1) \quad y_t(\tau) = \beta_{t,0} + \beta_{t,1}B_{-2/4}(\tau) + \beta_{t,2}B_{-1/4}(\tau) + \beta_{t,3}B_{1/360}(\tau) + \beta_{t,4}B_{1/4}(\tau) \\ + \beta_{t,5}B_{2/4}(\tau) + \beta_{t,6}B_3(\tau) + \beta_{t,7}B_7(\tau) + \varepsilon_t(\tau)$$

여기서  $\beta_{t,i}$ 를 제*i*번째 설명변수의 회귀계수라고 하자.

가중계수  $\alpha$ 를  $\alpha_1=0.1$ 로 하는 633개 선형회귀식들의 회귀계수추정값들의 표본평균, 최소값, 최대값 그리고 표본표준편차가 <그림 5.1>에 요약되어 있다.

(7) 이준행(2004) 등 참조.



〈그림 5.1〉 回歸係數推定값의 要約統計量

이 회귀계수추정값들  $\hat{\beta}_{t,0}, \hat{\beta}_{t,1}, \hat{\beta}_{t,2}, \hat{\beta}_{t,3}, \hat{\beta}_{t,4}, \hat{\beta}_{t,5}, \hat{\beta}_{t,6}, \hat{\beta}_{t,7}$ 의 상관계수행렬  $P$ 는 다음과 같다.

$$(5.2) \quad P = \begin{bmatrix} 1.00000 & -0.37836 & -0.37545 & -0.40633 & -0.52878 & -0.38979 & -0.31929 & -0.50055 \\ -0.37836 & 1.00000 & 0.74511 & 0.81919 & 0.73638 & 0.61897 & -0.38568 & -0.34199 \\ -0.37545 & 0.74511 & 1.00000 & 0.90258 & 0.93301 & 0.74716 & -0.49805 & -0.40589 \\ -0.40633 & 0.81919 & 0.90258 & 1.00000 & 0.91066 & 0.89866 & -0.58041 & -0.45513 \\ -0.52878 & 0.73638 & 0.93301 & 0.91066 & 1.00000 & 0.77872 & -0.41280 & -0.27628 \\ -0.38979 & 0.61897 & 0.74716 & 0.89866 & 0.77872 & 1.00000 & -0.58451 & -0.42859 \\ -0.31929 & -0.38568 & -0.49805 & -0.58041 & -0.41280 & -0.58451 & 1.00000 & 0.95919 \\ -0.50055 & -0.34199 & -0.40589 & -0.45513 & -0.27628 & -0.42859 & 0.95919 & 1.00000 \end{bmatrix}$$

식 (5.2)의 상관계수행렬에서 알 수 있듯이, 회귀계수추정값들  $\hat{\beta}_{t,0}, \hat{\beta}_{t,1}, \hat{\beta}_{t,2}, \hat{\beta}_{t,3}, \hat{\beta}_{t,4}, \hat{\beta}_{t,5}, \hat{\beta}_{t,6}, \hat{\beta}_{t,7}$  사이에는 강한 相關關係가 있다. 따라서 이 상관성을 반영하는 회귀계수벡터  $\hat{\beta}_t = [\hat{\beta}_{t,0}, \hat{\beta}_{t,1}, \hat{\beta}_{t,2}, \hat{\beta}_{t,3}, \hat{\beta}_{t,4}, \hat{\beta}_{t,5}, \hat{\beta}_{t,6}, \hat{\beta}_{t,7}]'$ 의 모형을 선택해야 한다. 〈그림 5.1〉에서 알 수 있듯이, 이 회귀계수추정값들의 표준편차들은 작다. 이는 각 회귀계수추정값이 넓은 의미에서 정상성(stationarity)을 갖음을 의미한다. 따라서, 이 절에서는 벡터자기회귀모형(vector autoregressive model: VAR model)를 사용해서 회귀계수벡터의 시계열  $\{\hat{\beta}_t\}$ 를 모형화하기로 하자.<sup>(8)</sup> 만일 VAR모형의 차수를  $p$ 로 하면, 추정해야 할 모수들의 개수  $N$ 은 다음과 같다.

$$(5.3) \quad N = 64 * p + \frac{8[8+1]}{2}$$

관찰점의 개수가 633개인 것을 감안하면, VAR모형의 차수  $p$ 를 1로 하는 것이 타당하다. 즉, 다음과 같은 VAR모형을 회귀계수벡터의 시계열  $\{\hat{\beta}_t\}$ 에 적합시키기로 하자.

$$(5.4) \quad \hat{\beta}_t = \phi_0 + \Phi_1 \hat{\beta}_{t-1} + v_t, \quad (t = 2, 3, \dots, 633)$$

여기서 刷新項(innovation)들  $\{v_t\}$ 는 서로 독립이고 동일하고 평균이 0이고 분산공분산행렬이  $\Sigma_v$ 인 결합확률분포를 따른다. 최소제곱추정법을 사용해서 VAR모형 (5.4)를 추정하면, 계수벡터  $\phi_0$ 의 추정벡터  $\hat{\phi}_0$ , 자기회귀계수행렬  $\Phi_1$ 의 추정행렬  $\hat{\Phi}_1$ 과 왜신항의 분산공분산추정행렬  $\hat{\Sigma}_v$ 는 각각 다음과 같다.

$$(5.5) \quad \hat{\phi}_0 = [-0.00784 \ 0.28872 \ -0.07435 \ 0.02434 \ -0.00976 \ 0.01400 \ 0.08468 \ 0.09515]^T$$

$$(5.6) \quad \hat{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} 1.00400 & 0.03281 & -0.01008 & -0.00759 & -0.01328 & -0.03558 & -0.09320 & 0.08954 \\ -0.06346 & 0.85510 & 0.24975 & 0.03870 & -0.16239 & 0.03060 & 0.28161 & -0.30646 \\ 0.01382 & 0.00266 & 0.88179 & 0.02946 & 0.10744 & 0.00923 & -0.00105 & 0.00143 \\ -0.00663 & -0.01844 & 0.00201 & 0.94167 & 0.03320 & 0.03207 & 0.01058 & -0.03015 \\ 0.00060 & -0.01107 & 0.00602 & -0.01495 & 0.98719 & 0.02496 & 0.00377 & -0.00730 \\ -0.00393 & -0.01423 & -0.01649 & 0.02622 & -0.00295 & 0.97757 & -0.05834 & 0.03647 \\ -0.01595 & -0.00854 & 0.01813 & -0.00754 & -0.02254 & 0.02012 & 1.07687 & -0.09636 \\ -0.01839 & -0.01358 & 0.01078 & 0.01279 & -0.01783 & 0.01581 & 0.11102 & 0.87474 \end{bmatrix}$$

(8) AR모형의 추정에 관해서는 최병선(1992)을 그리고 VAR모형의 추정에 관해서는 최병선(1995)을 참조하라.

$$(5.7) \hat{\Sigma}_v = \begin{bmatrix} 0.00201 & -0.00300 & -0.00121 & -0.00147 & -0.00109 & -0.00102 & -0.00007 & -0.00017 \\ -0.00300 & 0.01437 & -0.00069 & 0.00296 & 0.00148 & 0.00161 & 0.00003 & 0.00019 \\ -0.00121 & -0.00069 & 0.00171 & 0.00081 & 0.00081 & 0.00070 & 0.00002 & 0.00008 \\ -0.00147 & 0.00296 & 0.00081 & 0.00137 & 0.00088 & 0.00088 & -0.00001 & 0.00008 \\ -0.00109 & 0.00148 & 0.00081 & 0.00088 & 0.00077 & 0.00059 & -0.00001 & 0.00005 \\ -0.00102 & 0.00161 & 0.00070 & 0.00088 & 0.00059 & 0.00100 & -0.00017 & -0.00007 \\ -0.00007 & 0.00003 & 0.00002 & -0.00001 & -0.00001 & -0.00017 & 0.00077 & 0.00064 \\ -0.00017 & 0.00019 & 0.00008 & 0.00008 & 0.00005 & -0.00007 & 0.00064 & 0.00062 \end{bmatrix}$$

이 VAR모형의 자기계수들의 행렬  $\Phi = [\phi_0, \phi_1]$ 의 유의성을 다음과 같은 행렬  $\hat{\Phi}_s$ 로 요약할 수 있다.

$$(5.8) \hat{\Phi}_s = \begin{bmatrix} 0 & + & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & + & 0 & 0 & 0 & + & - \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - & 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ + & - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & - \\ + & - & - & 0 & 0 & 0 & 0 & + & + \end{bmatrix}$$

행렬  $\hat{\Phi}_s$ 에서 기호 +는 해당 자기계수추정값이 표준오차의 2배보다 큰 경우를, 기호 -는 해당 자기계수추정값이 표준오차의 (-2)배보다 작은 경우를, 그리고 기호 0는 해당 자기계수추정값의 절대값이 표준오차의 2배보다 작은 경우를 나타낸다. 이 기호 0에 해당하는 자기회귀계수를 0으로 지정하고 나머지 자기회귀계수들만을 추정하는 부분벡터자기회귀모형(partial VAR model)을 적용하면, 좀 더 모수절약원칙에 충실한 모형화가 된다. 그러나 추정 자체가 아닌 예측이 목적인 경우에는 좀 더 많은 모수들을 사용하는 것이 일반적이다. 그 이유는 좀 더 많은 모수들을 사용함으로써 약간의 精密度(precision)를 희생하는 대신 편의를 많이 줄일 수 있기 때문이다. 우리의 목적은 이자율기간구조의 예측이므로, 부분벡터자기회귀모형이 아닌 벡터자기회귀모형을 사용하기로 하자. 추정된 VAR 모형의 퍼트맨토우통계값(portmanteau statistic)이 <表 5.1>에 실려있다. <表 5.1>에서 알

〈表 5-1〉 퍼트맨토우통계값

시차	자유도	퍼트맨토우통계값	p값
2	64	306.80	<.0001
3	128	396.08	<.0001
4	192	482.57	<.0001
5	256	579.17	<.0001
6	320	674.19	<.0001
7	384	758.11	<.0001
8	448	820.18	<.0001
9	512	887.47	<.0001
10	576	995.00	<.0001
11	640	1066.73	<.0001
12	704	1157.34	<.0001

〈表 5-2〉 殘差들의 統計量

변수	DW	정규성검정		ARCH	
		카이제곱통계값	p값	F값	p값
$\beta_0$	1.99583	704.93	<.0001	5.20	0.0229
$\beta_1$	1.78502	4817.75	<.0001	0.52	0.4724
$\beta_2$	1.86555	445.55	<.0001	7.76	0.0055
$\beta_3$	1.99833	906.93	<.0001	16.30	<.0001
$\beta_4$	2.07256	704.04	<.0001	42.62	<.0001
$\beta_5$	1.86728	688.91	<.0001	0.59	0.4424
$\beta_6$	1.49356	1993.33	<.0001	3.08	0.0799
$\beta_7$	1.48363	2779.21	<.0001	2.54	0.1117

수 있듯이, 이 추정모형은 檢診段階(diagnostic step)를 통과하고 따라서 통계적으로 적절한 모형임을 알 수 있다.

이 VAR모형을 구성하는 성분인 각 AR모형에 대한 결정계수는 0.92에서 0.99 사이이고 F값은 920에서 6,500 사이를 움직인다. 따라서 각 AR모형은 유의적이며 해당 회귀계수를 충분히 잘 나타내고 있다고 할 수 있다. 각 AR모형에 의한 잔차들의 Dubin-Watson 통계값, 정규성검정통계값 그리고 ARCH검정통계값이 〈表 5.2〉에 수록되어 있다. 〈表 5.2〉에서 알 수 있듯이, 각 Dubin-Watson통계값은 2에 가까우므로 잔차들 사이에 유의적인 계열상관은 없다고 결론지을 수 있다. 각 정규성검정통계값에서 알 수 있듯이, 잔차들은 정규성을 갖는다고 결론지을 수 있다. 또한,  $\beta_3$ 과  $\beta_4$ 의 ARCH검정통계값들은 유의적으

로 0과 다르다. 즉, 잔차들에 이분산성이 있음을 알 수 있다. 이는 회귀계수벡터의 시계열  $\{\beta_t\}$ 를 모형화하는데 이 시계열들 사이의 상관성을 고려하지 않는 복수의 단변량AR모형들을 사용하는 것은 타당하지 않고, 상관성을 고려하는 다변량AR모형인 VAR모형을 사용하는 것이 타당함을 의미한다.

모형의 적합성을 검증하기 위해서 交叉妥當性(cross-validation)을 조사해보자. 우선 가중계수  $\alpha$ 를  $\alpha_1 = 0.1$ 로 하는 첫 623개 선형회귀식들의 회귀계수추정값들로 이루어진 시계열  $\{\hat{\beta}_t\}$ 의 분산공분산행렬  $\Gamma$ 는 다음과 같다.

$$(5.9) \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0.125 & -0.058 & -0.030 & -0.029 & -0.028 & -0.028 & -0.025 & -0.040 \\ -0.058 & 0.186 & 0.072 & 0.073 & 0.049 & 0.059 & -0.037 & -0.034 \\ -0.030 & 0.072 & 0.050 & 0.042 & 0.032 & 0.037 & -0.025 & -0.021 \\ -0.029 & 0.073 & 0.042 & 0.043 & 0.029 & 0.041 & -0.027 & -0.022 \\ -0.028 & 0.049 & 0.032 & 0.029 & 0.023 & 0.026 & -0.014 & -0.010 \\ -0.028 & 0.059 & 0.037 & 0.041 & 0.026 & 0.048 & -0.030 & -0.023 \\ -0.025 & -0.037 & -0.025 & -0.027 & -0.014 & -0.030 & 0.050 & 0.049 \\ -0.040 & -0.034 & -0.021 & -0.022 & -0.010 & -0.023 & 0.049 & 0.052 \end{bmatrix}$$

다음과 같은 VAR모형을 회귀계수벡터의 시계열  $\{\hat{\beta}_t\}$ 에 적합시키기로 하자.

$$(5.10) \quad \hat{\beta}_t = \phi_0 + \Phi_1 \hat{\beta}_{t-1} + v_t^e \quad (t = 2, 3, \dots, 623)$$

여기서 왜신항들  $\{v_t^e\}$ 는 서로 독립이고 동일하며 평균이 0이고 분산공분산행렬이  $\Sigma^e$ 인 결합확률분포를 따른다. 이 VAR모형 (5.10)을 최소제곱추정법으로 추정하고, 이를 바탕으로 회귀계수벡터들  $\{\hat{\beta}_t | t = 624, 625, \dots, 633\}$ 의 예측벡터들  $\{\hat{\beta}_t | t = 624, 625, \dots, 633\}$ 를 구하면, 다음과 같다.

$$(5.11) \quad \begin{bmatrix} \check{\beta}_{624} \\ \check{\beta}_{625} \\ \check{\beta}_{626} \\ \check{\beta}_{627} \\ \check{\beta}_{628} \\ \check{\beta}_{629} \\ \check{\beta}_{630} \\ \check{\beta}_{631} \\ \check{\beta}_{632} \\ \check{\beta}_{633} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.83515 & -0.78718 & -0.38078 & -0.46047 & -0.29615 & -0.51009 & 0.31595 & 0.17682 \\ 5.84060 & -0.80037 & -0.38172 & -0.46242 & -0.29813 & -0.51328 & 0.31449 & 0.17549 \\ 5.84583 & -0.81209 & -0.38282 & -0.46419 & -0.29998 & -0.51621 & 0.31306 & 0.17419 \\ 5.85086 & -0.82257 & -0.38402 & -0.46581 & -0.30173 & -0.51893 & 0.31163 & 0.17292 \\ 5.85572 & -0.83203 & -0.38530 & -0.46730 & -0.30338 & -0.52143 & 0.31020 & 0.17164 \\ 5.86046 & -0.84062 & -0.38663 & -0.46867 & -0.30495 & -0.52374 & 0.30877 & 0.17037 \\ 5.86507 & -0.84848 & -0.38799 & -0.46994 & -0.30644 & -0.52586 & 0.30731 & 0.16908 \\ 5.86959 & -0.85573 & -0.38936 & -0.47112 & -0.30786 & -0.52782 & 0.30584 & 0.16778 \\ 5.87402 & -0.86244 & -0.39074 & -0.47222 & -0.30922 & -0.52961 & 0.30435 & 0.16646 \\ 5.87837 & -0.86870 & -0.39210 & -0.47324 & -0.31051 & -0.53124 & 0.30284 & 0.16511 \end{bmatrix}$$

다음으로 가중계수  $\alpha$ 를  $\alpha_0=0$ 로 하는, 즉 가중값을 사용하지 않는 최소제곱추정법을 적용해서, 첫 623개 선형회귀식들의 회귀계수추정벡터들  $\{\check{\beta}_t\}$ 를 구한다. 이 시계열  $\{\check{\beta}_t\}$ 에 다음과 같은 VAR모형을 적합시키자.

$$(5.12) \quad \check{\beta}_t = \phi_0^c + \Phi_1^c \check{\beta}_{t-1} + v_t^c \quad (t = 2, 3, \dots, 623)$$

여기서 왜신항들  $\{v_t^c\}$ 는 서로 독립이고 동일하며 평균이 0이고 분산공분산행렬이  $\Sigma_v^c$ 인 결합확률분포를 따른다. 이 VAR모형 (5.12)을 최소제곱추정법으로 추정하고, 이를 바탕으로 회귀계수벡터들  $\{\check{\beta}_t | t = 624, 625, \dots, 633\}$ 의 예측벡터들  $\{\check{\beta}_t | t = 624, 625, \dots, 633\}$ 를 구하면, 다음과 같다.

$$(5.13) \quad \begin{bmatrix} \check{\beta}_{624} \\ \check{\beta}_{625} \\ \check{\beta}_{626} \\ \check{\beta}_{627} \\ \check{\beta}_{628} \\ \check{\beta}_{629} \\ \check{\beta}_{630} \\ \check{\beta}_{631} \\ \check{\beta}_{632} \\ \check{\beta}_{633} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.84139 & -0.79996 & -0.38202 & -0.46711 & -0.29918 & -0.51749 & 0.30291 & 0.21401 \\ 5.84800 & -0.81732 & -0.38274 & -0.46911 & -0.30105 & -0.51961 & 0.30028 & 0.20961 \\ 5.85419 & -0.83241 & -0.38364 & -0.47079 & -0.30273 & -0.52147 & 0.29779 & 0.20543 \\ 5.86003 & -0.84559 & -0.38467 & -0.47221 & -0.30424 & -0.52308 & 0.29539 & 0.20145 \\ 5.86556 & -0.85718 & -0.38579 & -0.47339 & -0.30561 & -0.52446 & 0.29308 & 0.19762 \\ 5.87083 & -0.86744 & -0.38695 & -0.47436 & -0.30685 & -0.52565 & 0.29083 & 0.19393 \\ 5.87587 & -0.87657 & -0.38812 & -0.47516 & -0.30798 & -0.52664 & 0.28864 & 0.19035 \\ 5.88071 & -0.88475 & -0.38928 & -0.47580 & -0.30901 & -0.52746 & 0.28650 & 0.18686 \\ 5.88536 & -0.89210 & -0.39042 & -0.47630 & -0.30995 & -0.52811 & 0.28440 & 0.18346 \\ 5.88986 & -0.89875 & -0.39151 & -0.47668 & -0.31080 & -0.52861 & 0.28233 & 0.18013 \end{bmatrix}$$

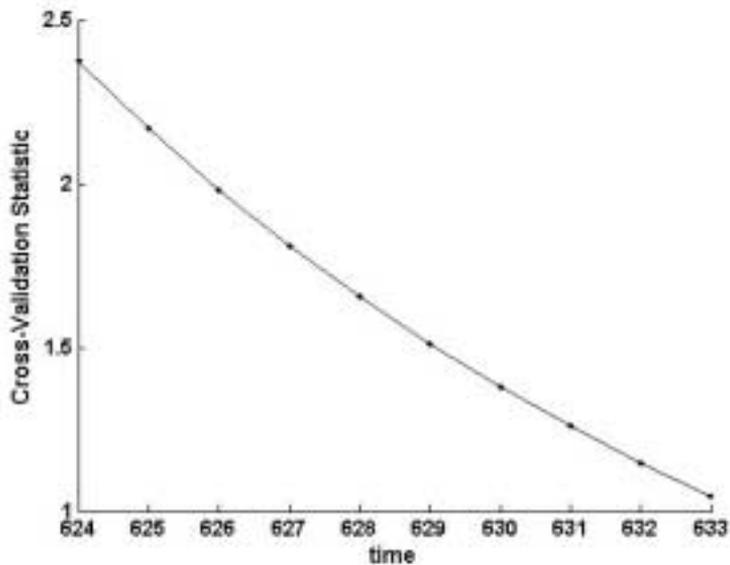
예측벡터들  $\{\tilde{\beta}_t | t = 624, 625, \dots, 633\}$ 과 예측벡터들  $\{\check{\beta}_t | t = 624, 625, \dots, 633\}$ 를 비교하기 위해서, 예측벡터들  $\{\check{\beta}_t | t = 624, 625, \dots, 633\}$ 가 주어진 것으로 가정하고, 다음 가설들을 검정하기로 하자.

$$(5.14) \quad H_t^0: \hat{\beta}_t = \check{\beta}_t \quad \text{vs.} \quad H_t^a: \hat{\beta}_t \neq \check{\beta}_t$$

각  $t (= 624, 625, \dots, 633)$ 에 대해서 다음 교차타당성통계량을 생각해보자.

$$(5.15) \quad CVS_t = [\tilde{\beta}_t - \check{\beta}_t]' T^{-1} [\tilde{\beta}_t - \check{\beta}_t]$$

귀무가설  $H_t^0$  하에서  $CVS_t$ 는 자유도가 8인 카이제곱분포를 따른다. <그림 5.2>에 시점  $t$ 대 교차타당성통계값  $CVS_t$ 의 그림이 그려져 있다. 자유도가 8인 카이제곱통계량의 유의수준 10%에서 임계값이 13.4임을 고려하면, <그림 5.2>에서 알 수 있듯이 각  $t (= 624, 625, \dots, 633)$ 에서 귀무가설  $H_t^0$ 가 기각되지 않는다. 즉, 예측의 관점에서 보면 확률적 가중값을 주는 최소제곱추정에 의해 추정된 이자율기간구조와 가중값을 주지 않는 최소제곱추정법에 의해 추정된 이자율기간구조는 유의적인 차이가 없다. <그림 5.2>에서 시점  $t$ 가 커짐에 따라 교차타당성통계값  $CVS_t$ 가 작아지는 것은 확률적 가중값을 부여한 결과 시점  $t$ 가 작



<그림 5.2> 交叉妥當性統計量

은 경우에 발생하는  $\hat{\beta}_1$ 와  $\check{\beta}_1$ 의 차이가 크기 때문인 것으로 판단된다. 또한 상수항추정값이 다른 회귀계수추정값보다 훨씬 큰 영향을 받는다고 판단된다.

## 6. 結 論

본 연구에서는 B-스플라인을 사용해서 우리나라 국고채의 수익률기간구조를 추정하였다. 이러한 과정에서 가중값을 부여하지 않는 최소제곱추정법을 적용하면, 만기가 작은 경우나 만기가 큰 경우 추정오차가 커진다. 또한 국고채는 3개월물부터 고시되므로 만기가 1일부터 3개월 미만인 경우에는 내삽이 아닌 외삽을 해야한다. 통계적으로 보아 외삽은 내삽보다 더 큰 오차를 유발하므로, 만기가 1일부터 3개월 미만인 경우 보편적인 최소제곱추정법을 적용하면 이자율기간구조의 좋은 추정식을 얻을 수 없다. 그러나 이러한 작은 만기에서 이자율이 포트폴리오의 구성, 경제정책을 결정 그리고 신용위험을 관리하는 데 차지하는 비중이 크기 때문에, 이자율기간구조의 좋은 추정식을 구할 수 있는 대안이 필요하다. 본 연구에서는 이러한 목적을 달성하기 위해서 두 가지 새로운 기법들을 도입해서 이자율기간구조를 추정하였다. 첫째, 외삽을 피하기 위해서 콜1일물의 이자율을 국고채수익률데이터에 추가하였다. 둘째, 확률적 가중값을 부과한 최소제곱추정법을 적용함으로써 작은 만기에서 추정오차를 작게 만들었다. 이러한 기법들을 도입해서 구한 이자율기간구조추정량은 이자율기간구조 전체의 오차를 작게 할 뿐 아니라 작은 만기에서 추정오차를 큰 만기의 추정오차로 이동시키는 효과를 보였다. 또한, 본 연구에서는 B-스플라인을 사용해서 이자율기간구조의 표본외예측을 시도하였다. 각 시점에서 이자율기간구조를 나타내는 B-스플라인들의 회귀계수추정량들이 서로 높게 상관되어 있으므로, 이상관성을 반영하는 VAR모형을 적용해서 이자율기간구조를 예측하였다. 만일 이 상관성을 반영하지 않는 단변량 AR모형들을 사용하면, 잔차들은 ARCH성, 즉 자기상관적인 이분산성을 보인다. 이는 VAR모형을 사용해야 하는 다른 정당성을 보여준다. 확률적 가중값을 주어 구한 회귀계수추정값들의 예측값들과 그렇지 않은 회귀계수추정값들의 예측값들의 교차타당성을 검진한 결과, 두 기법들이 예측에서 유의적 차이가 없음을 알 수 있다. 결론적으로 확률적 가중값을 주어 이자율기간구조를 추정하면, 전반적인 추정력이나 예측력을 감소시키지 않으면서 작은 만기에서 추정오차를 작게 만든다. 따라서 B-스플라인을 사용한 회귀모형으로 이자율기간구조를 구할 때는 확률적 가중값을 부여하는 가중 최소제곱추정법을 적용하는 것이 좋다는 결론을 지을 수 있다. 이자율기간구조를 추정하는 다른 통계적 접근법에서도 이 확률적 가중값을 부여하는 최소제곱추정법을 적용하면,

비슷한 결론을 얻을 수 있으리라 추측한다. 이에 대한 실증분석은 향후 과제로 남겨둔다.

서울대학교 經濟學部 教授

151-746 서울특별시 관악구 관악로 599

전화: (02)880-6394

팩스: (02)886-4231

E-mail: bschoi12@snu.ac.kr

韓國投資證券 DS部 社員

150-745 서울특별시 영등포구 여의도동 27-1

전화: (02)3276-5702

팩스: (02)3276-5751

E-mail: ckbest1@naver.com

## 參 考 文 獻

- 엄영호 · 이준희 · 지현준(2007): “한국의 이자율 기간구조와 통화정책,” 『금융학회지』, **12**, 120-166.
- 오규택 · 김명직 · 장국현(2000): “국고채 이자율 기간구조: 유통자료를 이용한 실증분석,” 『한국경제의 분석』, **6**, 1-55.
- 이준행(2004): “Nelson-Siegel모형을 이용한 이자율기간구조의 추정 및 예측,” 『선물연구』, **12**, 101-126.
- 최병선(1992): 『단변량시계열분석』, 세경사, 서울.
- \_\_\_\_\_(1995): 『다변량시계열분석』, 세경사, 서울.
- \_\_\_\_\_(1997): 『회귀분석(상)』, 세경사, 서울.
- Adams, K. J., and D. R. Van Deventer(1994): “Fitting Yield Curves and Forward Rate Curves with Maximum Smoothness,” *Journal of Fixed Income*, June, 52-62.
- Berardi, A., and W. Torous(2002): “Does the Term Structure Forecast,” Paper 8-02, Finance, Anderson Graduate School of Management, UCLA, Available at <http://repositories.cdlib.org/anderson/fin/8-02>.

- Bliss, R. R.(1997): "Testing Term Structure Estimation Methods," *Advances in Futures and Options Research*, **9**, 197-231.
- Brace, A., D. Gatarek, and M. Musiela(1997): "The Market Model of Interest Rate Dynamics," *Mathematical Finance*, **7**, 127-155.
- Choi, B. S.(1992): *ARMA Model Identification*, Springer-Verlag.
- Cox, J., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross(1985): "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, **53**, 385-408.
- Dahl, G., and M. D. Bauer(2007): "Forecasting the Term Structure Using Nelson-Siegel Factors and Combined Forecasts," Working Paper, Dept. of Economics, UCSD, Available at <http://econ.ucsd.edu/~mbauer/papers/220F.pdf>.
- De Boor, C.(1978): *A Practical Guide to Splines*, Springer-Verlag.
- De Pooter, M., F. Ravazzolo, and D. J. C. Van Dijk(2007): "Predicting the Term Structure of Interest Rates: Incorporating Parameter Uncertainty, Model Uncertainty and Macroeconomic Information," Working Paper Series, Available at <http://ssrn.com/abstract=967914>.
- Diebold, F. X., and C. Li(2003): "Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields," NBER Working Paper No. **W10048**.
- Diebold, F. X., C. Li, and V. Z. Yue(2007): "Global Yield Curve Dynamics and Interactions: A Dynamic Nelson-Siegel Approach," NBER Working Paper No. **W13588**.
- Duffee, G. R.(2002): "Term Premia and Interest Forecasts in Affine Models," *Journal of Finance*, **57**, 405-443.
- Ferguson, R., and S. Raymar(1998): "A Comparative Analysis of Several Popular Term Structure Estimation Models," *Journal of Fixed Income*, March, 17-33.
- Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton(1992): "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology," *Econometrica*, **60**, 77-105.
- Hull, J. C., and A. White(1993): "Bond Option Pricing Based on a Model for the Evolution of Bond Prices," *Advances in Futures and Options Research*, **6**, 1-13.
- Koivu, M., K. Nyholm, and J. Stromberg(2007): "Joint Modelling of International Yield Curves," Paris December 2007 Finance International Meeting AFFI-EUROFIDAI Paper, Available at [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1071667](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1071667).
- Lin, B. H.(2002): "Fitting Term Structure of Interest Rates Using B-splines: The Case of Taiwanese Government Bonds," *Applied Financial Economics*, **12**, 57-75.

- McCulloch, J. H.(1975): “The Tax-Adjusted Yield Curve,” *Journal of Finance*, **30**, 811-829.
- Nelson, C. R., and A. F. Siegel(1987): “Parsimonious Modeling of Yield Curves,” *Journal of Business*, **60**, 473-489.
- Steeley, J. M.(1991): “Estimating the Gilt-Edged Term Structure: Basis Splines and Confidence Intervals,” *Journal of Business Finance and Accounting*, **18**, 513-529.
- Svensson, L. E. O.(1994): “Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992~1994,” NBER Working Paper No. **W4871**.
- Vasicek, O. A.(1977): “An Equilibrium Characterization of the Term Structure,” *Journal of Financial Economics*, **5**, 177-188.
- Vasicek, O. A., and H. G. Fong(1982): “Term Structure Modeling Using Exponential Splines,” *Journal of Finance*, **37**, 339-356.