「구드윈」의 循環的 成長模型

邊　　衡　　尹

「구드윈」의 模型은 「힉스」의 模型과 마찬가지로 乘數—加速度係數 結合型이지만 非線形 要素를 巧妙하게 模型 中에 「빌트 인」하고 있는 點에서 注目할만한 價値가 있다.

그의 模型은 다음과 같다.

$$Y=C+I+A \tag{1}$$

$$C=cY \tag{2}$$

$$\bar{K}=vY+at \tag{3}$$

$$\left.\begin{matrix} K<\bar{K} \\ K=\bar{K} \\ K>\bar{K} \end{matrix}\right\} \text{일때} \qquad I=\begin{cases} L \\ a \\ -M \end{cases} \tag{4}$$

$$I=\frac{dK}{dt} \tag{5}$$

但 Y: 所得 或은 生產高

C: 消費

$\bar{K}$: 必要資本스톡

K: 現實資本스톡

I: 現實純投資 或은 現實資本스톡의 變化率

A: 自發的 消費支出(=常數)

M: 資本財產業의 現存資本設備의 補塡投資部分(=常數)

L: 資本財產業의 生產能力 $L+M$(=常數)에서 M을 減한 部分

c: 限界消費性向

v: 限界 必要資本/所得比率(=플러스의 常數)(1)

a: 時間에 亘한 技術進步를 나타내는 플러스의 常數(이것은 技術進步의 趨勢値를 나타낸다.)

t: 時間

---

(1) 必要加速度係數라고 해도 無妨하다.

式(1)은 所得의 定義式이다.

式(2)는 時差를 갖지 않는 消費函數이다.

式(3)은 必要資本스톡은 所得 Y와 時間 t의 函數임을 表示한다. vY 項은 加速度原理를 表示한 것이며 at 項은 技術革新에 의한 必要資本스톡의 增加分을 時間의 線形函數로 表示한 것이다. 이 式(3)을 t에 關해서 微分하면

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = v\frac{dY}{dt} + a$$

로 되는데 이것은 必要純投資 $\frac{d\bar{K}}{dt}$는 所得의 變化率 $\frac{dY}{dt}$의 v倍임을 表示하는 普通의 加速度原理에 技術進步의 要因 a를 合쳐서 修正한 投資函數이다.

式(4)는 現實의 純投資 I를 說明하는 式이다. 現實資本스톡이 必要資本스톡보다 작을 때에는 I는 L과 같아지며 現實資本스톡이 必要資本스톡과 一致할 때에는 I는 a와 같아지며 現實資本스톡이 必要資本스톡보다 클 때에는, I는 $-M$과 같아짐을 表示한다. 이때 資本財産業의 生産能力은 $L+M$으로 假定되며 또 資本스톡이 不足되는 限 資本財産業의 生産能力은 모두 資本財의 生産에 充當되며 可能한 限 必要資本스톡에 到達하려고 하는 것으로 假定된다.

이 式(4)에 의해서 非線形要素가 「빌트인」되는 셈이다. 왜냐하면 K와 $\bar{K}$의 關係가 變함에 따라서 I가 L, a, $-M$과 같이 非線形의 變動을 하기 때문이다.

式(5)는 現實純投資는 現實資本스톡의 變化率과 같다는 것을 表示하는 定義式이다.

上記 模型이 景氣循環을 說明할 수 있는 콤플리트한 模型이라는 것은 以下의 說明에서 明白할 것이다.

式(1)에 式(2)를 代入하여 整理하면 普通의 乘數模型

$$Y = \frac{I+A}{1-c}$$

를 얻는데 이에 式 (5)를 代入하면

$$Y = \frac{1}{1-c}\left(\frac{dK}{dt} + A\right) \qquad (6)$$

를 얻는다. 또 式 (3)에 式 (6)을 代入하면

$$\bar{K} = \frac{v}{1-c}\left(\frac{dK}{dt} + A\right) + at \qquad (7)$$

를 얻는다.

式(4), (6), (7)에 의해서 $K-\bar{K}<0$의 局面, $K-\bar{K}=0$의 局面, 및 $K-\bar{K}>0$의 局面

이라는 세 局面에 있어서의 $\frac{dK}{dt}$, Y, $\bar{K}$, $\frac{d\bar{K}}{dt}$ 및 $\frac{d(K-\bar{K})}{dt}$의 値를 計算하면 第1表와 같다.

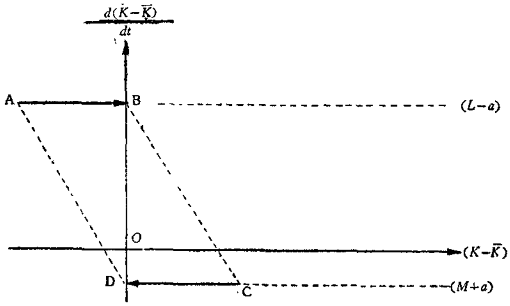
〈第1表〉

局 面	$\frac{dK}{dt}$	Y	$\bar{K}$	$\frac{d\bar{K}}{dt}$	$\frac{d(K-\bar{K})}{dt}$
$K-\bar{K}<0$	L	$\frac{A+L}{1-c}$	$\frac{v}{1-c}(A+L)+at$	a	$L-a$
$K-\bar{K}=0$	a	$\frac{A+a}{1-c}$	$\frac{v}{1-c}(A+a)+at$	a	0
$K-\bar{K}>0$	$-M$	$\frac{A-M}{1-c}$	$\frac{v}{1-c}(A-M)+at$	a	$-(M+a)$

第1表를 보면 體系의 움직임이 明白하게 되지만 第1圖와 같은 位相圖로 나타내면 그것은 一層 分明하게 理解될 것이다. 이 그림은 橫軸에 $K-\bar{K}$를, 縱軸에 $\frac{d(K-\bar{K})}{dt}$를 取하고 있다.

第1圖의 O에 의해서 表示되는 點이 (移動)均衡點이다. 이 點에 있어서는 $\frac{dK}{dt}=\frac{d\bar{K}}{dt}=a$ 및 (乘數에 의해서 附與되는) $Y=\frac{A+a}{1-c}$이다. 投資는 所要의 趨勢率로 行해지며 一旦이 狀態에 到達하면 均衡은 持續된다. 그러나 이 均衡은 不安定하다. 어떠한 初期의 攪亂

〈第1圖〉



을 附與해도 體系는 均衡으로는 向하지 않고 도리어 第1圖의 循環 ABCDA에 의해서 表示되는 規則的인 振動을 한다. 그것을 說明하기 위한 以下의 論議에서는 第1表에 表示한 各局面의 性質을 使用한다.

$K>\bar{K}$라고 假定한다. 따라서 $\frac{d(K-\bar{K})}{dt}=-(M+a)<0$. 따라서 $(K-\bar{K})$는 플러스이지만 時間의 經過와 더불어 0으로 減少한다. 이것은 第1圖에 있어서의 C에서 D에로의 運動이다. D에 到達했을 때에는 $K=\bar{K}=\frac{v}{1-c}(A-M)+at$이지만 그때 $\frac{d(K-\bar{K})}{dt}$는 0

으로 되며 $\bar{K}$는 $\frac{v}{1-c}(A+a)+at$까지 上昇한다. 곧 $K<\bar{K}$가 되며 따라서 $\frac{d(K-\bar{K})}{dt}$는 $(L-a)>0$이 되며 $\bar{K}$는 $\frac{v}{1-c}(A+L)+at$까지 上昇한다. 따라서 一旦 D에 到達하면 0에 머무르지 않고 곧 A까지 飛躍한다. 이 局面에서는 $(K-\bar{K})$는 마이너스이지만 時間의 經過와 더불어 0으로 增加한다. 즉 A에서 B에로의 運動이다. B에 到達했을 때에는 逆의 過程을 더듬어서 곧 D로 돌아가며 다시 上述한 循環이 反復된다.

이것은 好況(AB)과 不況(CD)이 交代로 循環하는 規則的 振動이다. 여기서 好況期間과 不況期間이 같지 않음에 注意할 必要가 있다. 好況期間은

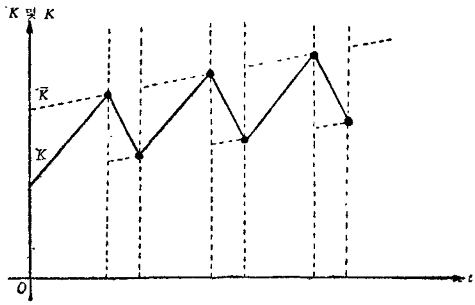
$$\frac{dK}{dt}=L,\ \frac{d\bar{K}}{dt}=a,\ \text{및}\ \ \bar{K}=\frac{v}{1-c}(L+A)+at$$

즉 $\bar{K}$는 增加하지만 K도 增加하고 있는 $\bar{K}$를 따를 때까지는 (L의 率로) 增加를 繼續하지 않으면 안된다. 不況期間은

$$\frac{dK}{dt}=-M,\ \frac{d\bar{K}}{dt}=a,\ \text{및}\ \ \bar{K}=\frac{v}{1-c}(-M+A)+at$$

즉 $\bar{K}$는 낮은 水準에 있지만 그러나 앞서와 마찬가지로 增加를 繼續하고 있다. 그리고 K는(M의 率로) 減少하며 이 減少는 減少하고 있는 K와 增加하고있는 $\bar{K}$가 같은 값이 될 때 까지 繼續한다. 時間의 經過에 따르는 K 및 $\bar{K}$의 움직임(第 2 圖)과 그것에 對應하는

〈第 2 圖〉



Y의 움직임(後出 第 4 圖(1))에 의해서 表示되는 바와 같이 好況은 不況보다 길어진다. 第 1 表에서 알 수 있는 바와 같이 Y의 値는 $\frac{A+L}{1-c}$와 $\frac{A-M}{1-c}$사이를 움직이며 $I=\frac{dK}{dt}$는 L과 $-M$사이를 움직인다. 이와같은 變動은 Y와 I의 不連續的인 變動이며 全的으로 非現實的이다. 이것은 加速度係數에 時差가 없는 極히 特殊한 形을 附與한 것의 結果이다.

이 模型의 보다 一般的인, 보다 現實的인 形[(2)]은 다음과 같다..

(2) 「알렌」은 이것을 「擴張된」 模型이라고 부르고 있다.

$$Z = C + I + A \tag{8}$$

$$C = cY \tag{9}$$

$$I(t) = B(t-\theta) \tag{10}$$

$$B(t) = \phi\left\{\frac{d}{dt}Y(t)\right\} \tag{11}$$

$$B = \begin{cases} L & Y\text{가 크게 增加 할때} \\ -M & Y\text{가 크게 減少 할때} \end{cases} \tag{12}$$

$$\frac{dY}{dt} = -\lambda(Y-Z)^{(3)} \tag{13}$$

但 Z: 總需要

C: 消費需要

I: 投資需要

A: 自發的 支出

B: 投資決意

$Y.M.L.c.t$: 前述한 素朴한 模型의 경우와 同一함.

θ : 一定期間

λ : 反應의 速度(4)

式 (10)에서 (12)까지는 需要側을 나타내며 式(13)은 供給側을 나타낸다. 그리고 式(11)의 ϕ는 非線形의 函數이며 이 函數 中의 適當한 形은 第3圖에 表示되어 있다. 生產高의 變化가 작을 때에는 그것이 增加이든 減少이든 通常의 加速度係數의 關係式 $B=v\frac{dY}{dt}$는 有效하게 作用하고 있는 것으로 看做한다. 生產高가 크게 增加하면 B는 資本財產業의 生產能力에 의해서 規定되는 限界 (L)까지 水準을 올린다. 그리고 生產高가 크게 減少하면 B는 다시 代置 或은 廢棄率에 의해서 規定되는 마이너스의 限界($-M$)까지 水準을 낮춘다.

式 (10)과 (11)에서

$$I(t) = B(t-\theta) = \phi\left\{\frac{d}{dt}Y(t-\theta)\right\}$$

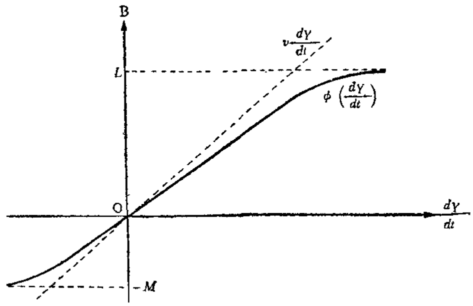
---

(3) 「구드윈」이 實際로 採擇한 것은 다음 式이다.

$$Y = Z - \varepsilon\frac{dY}{dt} \quad \text{或은} \quad \frac{dY}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon}(Y-Z)$$

여기서 ε는 通常의 指數的 時差 (13)의 常數이다.

(4) $\frac{1}{\lambda}$은 時差를 表示하는 常數이다.



〈第 3 圖〉

가 얻어진다. 이것을 式(8)에 代入하면 다음 式이 얻어진다.

$$Z(t)=cY(t)+\phi\left\{\frac{d}{dt}Y(t-\theta)\right\}+A \qquad (14)$$

技術的 進步는 이 式의 A에 包含시킬 수 있다. A에는 어떠한 形도 附與할 수 있다. 例컨대 時間의 經過와 더불어 增加하는 $A=at$로 할 수도 있다.

需要側과 供給側을 結付하여 式(13)과 (14)에서 다음 式을 얻는다.

$$\frac{1}{\lambda}\ \frac{d}{dt}Y(\mathrm{t})=-Y(\mathrm{t})+cY(\mathrm{t})+\phi\left\{\frac{d}{dt}Y(t-\theta)\right\}+A$$

즉

$$Y(\mathrm{t})=\frac{1}{1-c}\left[\phi\left\{\frac{d}{dt}Y(\mathrm{t}-\theta)\right\}-\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dt}Y(t)\right]+\frac{A}{1-c} \qquad (15)$$

이것이 「구드윈」의 一般化된 模型의 方程式이며 그 形은 定差·微分 混合型이다. 萬若 自發的 支出 A가 時間과 關係없는 常數이면 $Y(t)=Y$(常數)는 $\bar{Y}=\frac{A}{1-c}$라는 條件下에 式(15)와 兩立한다. 式 (15)로 表示된 模型은 均衡水準을 가지며 그것은 靜學的 乘數에 의해서 附與된다. 뒤는 附與된 任意의 初期攪亂에 대해서 $Y(t)$의 經路를 決定하는 것이 남아 있다. 그리고 그것은 式(15)의 解로서 얻어진다.

이 模型과 前述한 素朴한 模型을 比較하기 위해서 前者에 있어서 $\theta=0$, 그리고 加速度係數의 作用에도 時差가 없는 特別한 경우를 생각한다. 이때 式(15)는 다음의 微分方程式이 된다.

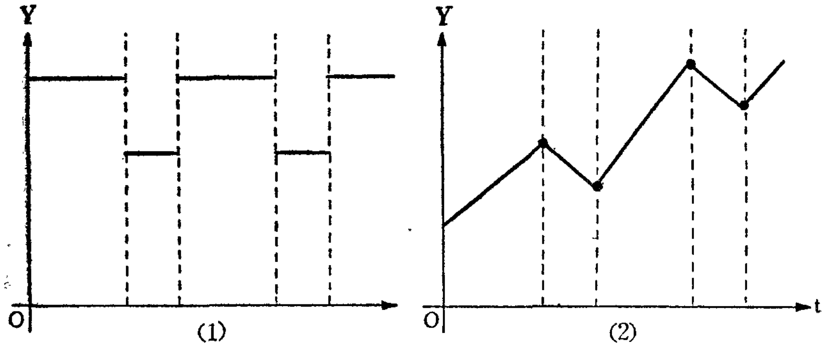
$$Y=\frac{1}{1-c}\left\{\phi\left(\frac{dY}{dt}\right)-\frac{1}{\lambda}\ \frac{dY}{dt}\right\}+\frac{A}{1-c} \qquad (16)$$

이것은 函數의 形이 具體的으로 定해지면 즉 ϕ의 解析的 表示 或은 圖形的 表示가 附與되면 解析的 或은 圖形的 方法에 의해서 풀 수 있다. 素朴한 模型의 對應하는 方程式은 第 1表에서

$$Y=\frac{1}{1-c}\ \frac{dK}{dt}+\frac{A}{1-c} \qquad (17)$$

이다. 여기서 $\frac{dK}{dt}$는 好況期 에는 L이며 不況期에는 $-M$ 이다. 式(17)에서 생각되는 Y의 變動은 (A를 常數로 하여) 第4圖(1)의 階段函數이다. 式 (16)에 의해서 나타내지는 Y의 經路는 第4圖(2)[(5)]의 形이라는 것이 「구드윈」에 의해서 表示되어 있다. 但 A는 常數이며 ϕ는 第3圖에 表示한 形을 갖는 것으로 한다. 所得 Y는 飛躍을 갖지 않는다. 恐慌期에 있어서는 方向은 非連續的으로 變化하지만 그 經路는 連續이다. 好況期의 길이는 不

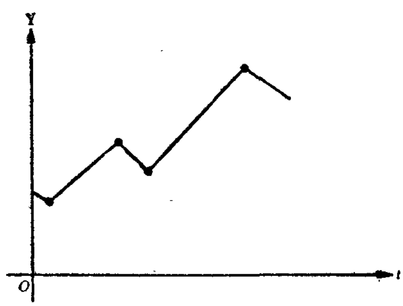
〈第4圖〉



況期의 그것에 比해서 길다. 所得 Y의 增加는 好況期의 初期에 있어서 가장 急速하며 後期로 됨에 따라서 漸次로 緩慢해 진다. 同一한 것은 不況期에 있어서의 所得變化에 대해서도 말할 수 있다.

定差·微分混合型 (15)는 加速度係數의 機能에 一定의 時差가 있다고 한 假定에서 얻어진 것이다. 「구드윈」은 이 假定을 簡單化를 위해서 導入한 것이며, 經濟的「現實」의 表示로서 導入한 것은 아니다. 事實 θ는 投資決意와 投資支出間의, 하나의 平均的인 時差이며, 「近似的으로 製造를 위해서 必要한 時間의 길이의 半」[(6)]과 같다. 이 時差는 連續的

(5) 「구드윈」의 論文의 그림은 다음과 같다. (Goodwin, The Non-linear Accelerator and the Persistence of Business Cycles, *Econometrica* 19 (1951), p. 14)



(6) Goodwin, *op. cit.*, (1951), p. 12 參照.

인 (指數的) 時差로 代置하는 것이 좋을 것이다.—아마 經濟學的 觀點에서 選好될 것이며 또 數學的 分析도 分明히 容易한 것으로 만든다.

「구드윈」은 電氣工學者들에 의해서 發展된 方法에 의거해서 式(15)의 圖式積分(或은 解)를 附與하고 있다.

〔筆者 서울大學校商科大學 韓國經濟研究所研究員·所長 서울大學校 商科大學 教授〕