

## Heath-Jarrow-Morton模型을 사용한 韓國 利率期間構造의 模型化<sup>(1)</sup>

崔 秉 善

본 논문에서는 한국국채이자율에 다양한 Heath-Jarrow-Morton모형(HJM모형)들을 적합 시킨 후, 이들을 서로 비교하여 한국국채의 선도이자율기간구조를 잘 나타내는 HJM모형을 선택한다. 모형선택의 기준으로는 적합성, 요인들의 개수, 이자율기간구조의 정상성(stationarity), 순간현물이자율의 Markov성 등을 고려하였다. 분석에 사용된 데이터는 2006년 1월부터 2010년 2월까지 일별 한국국채이자율들로서, 관찰된 만기시점들은 3개월, 6개월, 12개월, 2년, 3년, 5년, 10년 그리고 20년이다. HJM모형을 한국국채이자율에 적합 시키기 위해서, 먼저 한국국채의 일드곡선으로부터 선도이자율곡선을 도출하였다. 선도이자율곡선이 계단함수라고 가정하는 기존 분석과는 달리, 본 논문에서는 선도이자율곡선이 연속이라는 가정하에 붓스트랩법을 적용하였다. HJM모형을 추정할 때는 선도이자율과정의 변동성(volatility)이 정상성을 갖는다는 가정하에서 선도이자율을 주성분분석하는 것이 일반적이다. Avellaneda and Laurence(1999)는 첫 번째 주성분을 평행이동(shift)으로 그리고 두 번째 주성분을 경사(tilt)로 해석하여, 2요인 HJM모형 AL을 사용할 것을 주장하였다. 본 논문에서는 첫 번째 주성분을 수준(level)으로, 두 번째 주성분을 추세(drift)로 그리고 세 번째 주성분을 곡률(curvature)로 해석하여, 새로운 3요인 HJM모형 AC를 사용할 것을 제안한다. 변동성과정이 정상적이라는 것은 변동성이 국채의 잔여기간에만 의존한다는 의미이므로, 이는 현실적인 가정이 아니다. 각 시점의 선도이자율은 잔여기간뿐 아니라 그 시점 자체에도 의존해야 할 것이다. 본 논문에서는 한국국채이자율의 변동성이 잔여기간에 의존하는 정상적(stationary) 부분과 시점에 의존하는 비정상적(nonstationary) 부분으로 분리할 수 있다고 가정하고, 주성분분석을 사용해서 정상적 부분을 추정하고 다양한 함수추정법들을 적용해서 비정상적 부분을 추정하였다. 또한, Carverhill(1994)이 제시한 HJM모형을 따르는 순간현물이자율의 Markov조건이 오류임을 증명하고, 이 조건을 변형한 Markov조건을 제시하고, 이를 바탕으로 새로운 HJM모형 CC를 제안하였다. 모의실험을 통해서 한국국채이자율에 적합 시킨 12개 HJM모형들을 비교 분석한 결과, 다음과 같은 결론을 얻었다. 첫째, 변동성이 잔여기간에만 의존하는 정상적 HJM모형보다 잔여기간과 시점을 동시에 고려하는 비정상적 HJM모형이 한국국채의 이자율기간구조를 더 잘 나타낸다. 둘째, Carverhill모형을 변형한 HJM모형 CC가 본 논문에서 고려한 2요인 HJM모형들 중에서 한국국채의 이자율기간구조에 가장 적합하다. 셋째, 2요인 HJM모형 AL보다 3요인 HJM모형 AC가 한국국채의 이자율기간구조에 더 적합하고 또한 전통적인 이자율의 주성분분석 결과와 더 부합한다. 넷째, Ritchken-Sankarasubramanian-Inui-Kijima류 HJM모형들은 한국국채이자율을 분석하는데 적합하지 않다.

(1) 본 논문은 修巖獎學文化財團의 지원으로 이루어졌음.

## 1. 序 論

본 논문의 목적은 한국국채의 이자율기간구조를 모형화하는 것이다. 먼저 본 논문에서 사용되는 용어와 표기법을 기술하고자 한다. 본 논문에서는 가능한 한 Brigo and Mercurio(2007)의 표기법을 따르고자 한다. 만기시점  $T$ 에서 액면가(par value) 1을 받는 제로쿠폰채(zero-coupon bond)의 시점  $t$ 에서 가치를  $P(t, T)$ 라 하자. 정의에 의해서,  $P(T, T) = 1$ 이다. 본 논문에서는 한국국채에 디폴트위험이 없다고 가정한다. 제로쿠폰채의 기간구조  $\{P(t, T) \mid T \leq \bar{T}\}$ 를 시점  $t$ 에서 제로쿠폰곡선이라 부른다. 여기서  $\bar{T}$ 는 시장에 존재하는 제로쿠폰채들의 만기시점들 중에서 가장 큰 값이다. 제로쿠폰곡선을 할인곡선이라고도 부른다. 시간구간  $[t, T]$ 에서 연속복리를 취해서 얻는 기하학적 평균이자율  $R(t, T)$ 를 시간구간  $[t, T]$ 에서 만기일드(yield-to-maturity: YTM) 또는 간단히 일드라고 부른다. 다음 식이 성립한다.

$$(1.1) \quad R(t, T) = \frac{1}{T-t} \ln \frac{1}{P(t, T)}$$

일드의 기간구조  $\{R(t, T) \mid T \in [t, \bar{T}]\}$ 를 시점  $t$ 에서 일드곡선이라 부른다. 시점  $t$ 에서 순간현물이자율(instantaneous spot interest-rate)  $r_t$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$(1.2) \quad r_t \doteq \lim_{T \rightarrow t} R(t, T)$$

순간현물이자율을 현물이자율이라고도 부른다. 다음 식이 성립한다.

$$(1.3) \quad r_t = - \left. \frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} \right|_{T=t}$$

시점  $t$ 에서 선도일드(forward yield)  $F(t, T, U)$ 는 대출이 일어나는 대출시점이  $T(> t)$ 이고 만기시점이  $U(> T)$ 인 대출의 평균이자율을 의미한다. 즉, 선도일드를 다음과 같이 정의한다.

$$(1.4) \quad F(t, T, U) \doteq \frac{1}{U-T} \left[ \ln \frac{1}{P(t, U)} - \ln \frac{1}{P(t, T)} \right], \quad (t \leq T < U)$$

선도일드를 연속복리선도이자율(continuously compounded forward rate)이라 부르기도 한다. 선도일드  $F(t, T, U)$ 에서 극한  $U \rightarrow T$ 를 취한 순간적 선도일드  $f(t, T)$ 를 순간선도이자율(instantaneous forward rate) 또는 간단히 선도이자율이라 부른다. 다음 식이 성립한다.

$$(1.5) \quad f(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}$$

식 (1.5)에서 알 수 있듯이, 선도이자율곡선  $\{f(t, T) \mid T \in [t, \bar{T}]\}$ 가 존재하기 위해서는 할인곡선이 만기시점  $T$ 에 대해서 미분이 가능해야 한다. 식 (1.3)과 식 (1.5)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$(1.6) \quad r_t = f(t, t)$$

제로쿠폰채가치는 위험중립확률측도(risk-neutral probability measure)  $Q$ 하에서 다음 위험중립가치평가식을 만족한다.

$$(1.7) \quad P(t, T) = E_t^Q \left( \exp \left( -\int_t^T r_u du \right) \right)$$

식 (1.7)에서 알 수 있듯이, 제로쿠폰채가치는 순간현물이자율의 미래변동에 의존한다. 순간현물이자율이 확률적이므로, 제로쿠폰채가치는 시장위험에 노출되어 있다. 그러한 시장위험에 의한 효과를 제거하기 위해서, 식 (1.7)에서 기댓값연산자를 사용할 필요가 있다. 순간선도이자율  $f(t, s)$ 를 사용해서 제로쿠폰채가치  $P(t, T)$ 를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(1.8) \quad P(t, T) = \exp \left( -\int_t^T f(t, u) du \right)$$

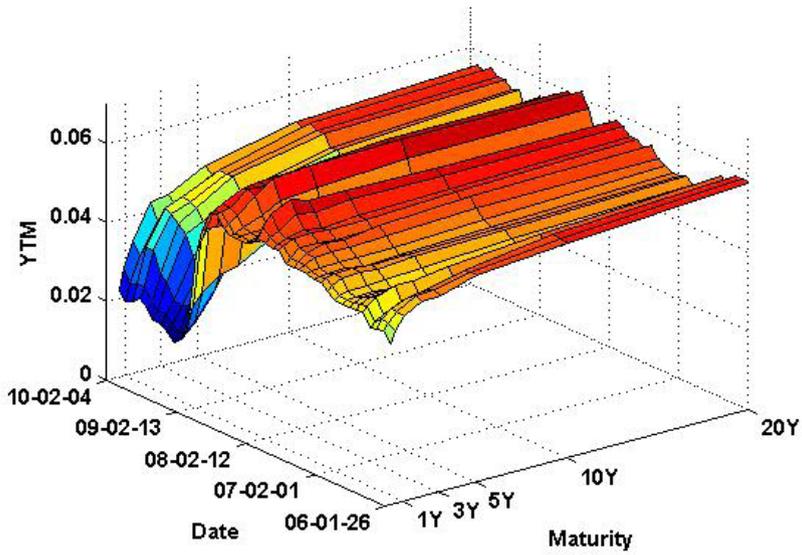
순간선도이자율  $f(t, u)$ 는 미래시점  $u$ 의 순간현물이자율  $r_u$ 의 시점  $t$ 에서 예측값이므로, 식 (1.8)에서는 기댓값연산자를 사용하지 않았다. 즉, 시점  $t$ 에서 순간선도이자율  $f(t, u)$ 를 알고 있기 때문에, 식 (1.8)에서 기댓값연산자를 사용하지 않는다. 식 (1.5)와 식 (1.7)에서 알 수 있듯이, 순간선도이자율과 순간현물이자율 사이에는 다음 관계가 성립한다.

$$(1.9) \quad f(t, T) = - \frac{\partial \ln E_t^Q \left( \exp \left( - \int_t^T r_u du \right) \right)}{\partial T}$$

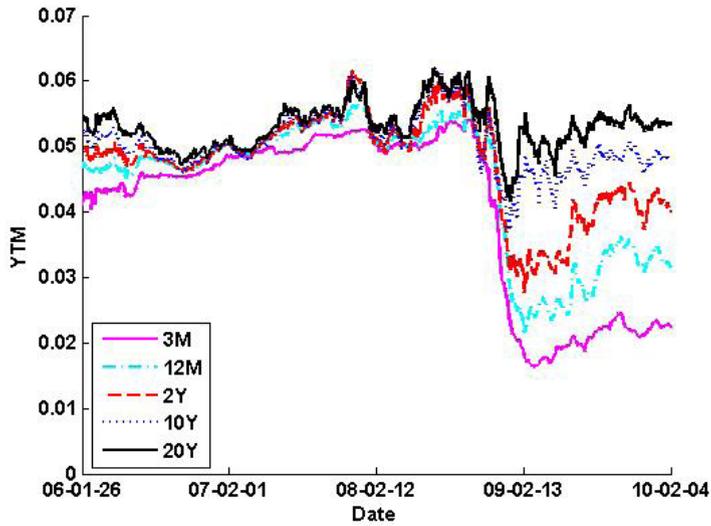
이자율의 움직임을 기술하기 위해서 확률모형을 사용하는 것은 자연스러운 일이다. 이러한 확률모형으로는 순간현물이자율  $r_t$ 를 상태변수로 하는 확산미분방정식(diffusion differential equation)이 널리 사용되어 왔다. 이러한 확산미분방정식모형들은 직관적으로 이해하기가 쉽고, 더구나 이 중에서 많은 모형은 재무경제이론을 바탕으로 유도된 것이다. 확산미분방정식 자체가 Markov성을 내포하므로 재결합하는(recombining) 격자모형(lattice model)을 사용해서 이자율에 민감한 금융상품의 가치를 평가할 수 있다. 그러나 실제로 시장에서 할인곡선을 정확하게 추정하여 이로부터 순간현물이자율곡선을 정확하게 도출하는 것은 간단한 일이 아니다. 또한, 이 순간현물이자율곡선으로부터 순간선도이자율들의 공분산구조를 유도하는 것은 어려운 일이다. 이에 대한 자세한 내용은 Brigo and Mercurio(2007, 제3.1절)을 참조하라. Heath, Jarrow and Morton(1992)은 순간현물이자율이 아닌 순간선도이자율  $f(t, T)$ 를 상태변수로 하는 Heath-Jarrow-Morton모형(HJM모형)을 제시하고, 이를 바탕으로 이자율기간구조에 대한 무재정조건을 제시하였다. 이 HJM무재정조건을 적용하면, 변동성을 사용해서 선도이자율기간구조의 동적특성(dynamics)을 완전하게 나타낼 수 있다. 오늘날 순간선도이자율은 이자율이론에서 가장 중요한 변수들 중의 하나이다. 본 논문의 목적은 한국국채의 선도이자율기간구조에 적합한 다양한 HJM모형들을 추정하고 이들을 비교하는 것이다.

## 2. 데이터

본 논문에서 다루는 데이터는 Bloomberg단말기를 통해서 구한 2006년 1월 26일부터 2010년 2월 4일까지 일별로 관찰된 만기가 3개월, 6개월, 12개월, 2년, 3년, 5년, 10년 그리고 20년인 만기일드들이다. 이 만기들을  $T_1 = 0.25, T_2 = 0.5, T_3 = 1, T_4 = 2, T_5 = 3, T_6 = 5, T_7 = 10$  그리고  $T_8 = 20$ 으로 표기하자. 따라서  $\bar{T} = 20$ 이다. 편의상,  $T_0 = 0$ 이라 하자. 이렇게 2006년 이후 데이터만을 다루는 이유는 한국에서는 2006년 이후에나 20년물 국채의 일드가 제공되기 때문이다. 이 데이터세트는 1,000개의 관찰점들과 8개의 변수들로 이루어져 있다. 제  $k$ 번째 변수는 제  $k$ 번째 만기인  $T_k$ 에 해당하는 만기일드이다. <그림 1>에는  $X$ 축에 날짜,  $Y$ 축에 만기 그리고  $Z$ 축에 일드를 나타낸 일드곡면(yield surface)이 그려져 있다. 모



〈그림 1〉 일드曲面

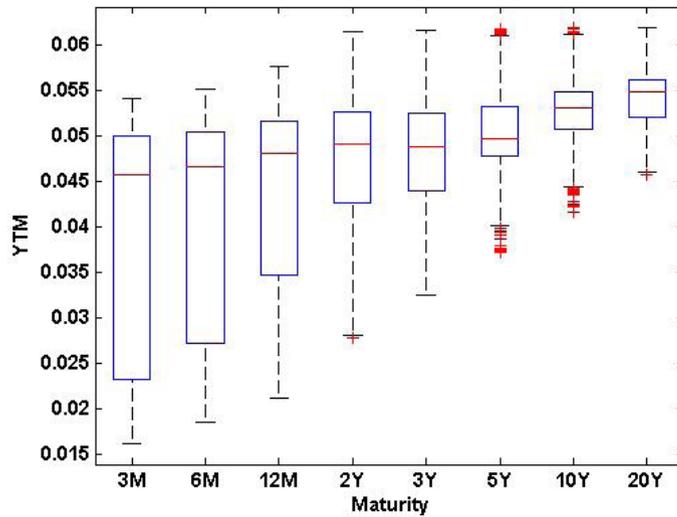


〈그림 2〉 일드의 時系列散點圖

든 날짜들에 대한 일드곡면을 그리면 곡면의 변화가 너무 심해서 형태를 파악하기가 어려우므로, 매 25번째 관찰일마다 일드곡선을 하나씩 그렸다. 〈그림 2〉에는 각 만기별 일드의 시계열산점도가 그려져 있다. 〈그림 1〉과 〈그림 2〉에서 알 수 있듯이, 2008년 말부터 일드

〈表 1〉 일드의 平均과 標準偏差

	3M	6M	12M	2Y	3Y	5Y	10Y	20Y
평균	0.0403	0.0419	0.0444	0.0476	0.0482	0.0505	0.0531	0.0544
표준편차	0.0128	0.0120	0.0100	0.0075	0.0062	0.0044	0.0035	0.0030



〈그림 3〉 일드의 箱子그림

가 전반적으로 낮아지고, 특히 짧은 만기의 일드가 크게 하락하며, 장기국채와 단기국채의 일드차이는 커진다.

각 만기별 일드의 평균과 표준편차가 〈表 1〉에 실려 있다. 〈表 1〉에서 알 수 있듯이, 만기가 길어질수록 일드의 평균은 증가하고 표준편차는 감소한다. 〈그림 3〉의 상자그림(box plot)에서 확인할 수 있듯이, 만기가 짧을수록 일드의 퍼짐이 크다. 이러한 현상은 2008년 말을 전후해서 단기채권의 일드가 크게 하락한 것을 반영한다. 또한, 5년물 국채와 10년물 국채에서 이상점이 여러 개 존재하는 것을 확인할 수 있다. 이러한 결과는 5년물 국채와 10년물 국채의 표준편차들이 만기가 더 짧은 국채의 표준편차에 비해 훨씬 작아서 발생하는 것이다. 즉, 2008년 말에 발생하는 일드점프의 크기에 비해서 상대적으로 표준편차가 작아서 발생하는 현상이다.

일드들의 상관계수행렬은 다음과 같다.

$$(2.1) \quad P = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.997 & 0.982 & 0.916 & 0.874 & 0.694 & 0.358 & 0.203 \\ 0.997 & 1.000 & 0.990 & 0.929 & 0.882 & 0.705 & 0.376 & 0.224 \\ 0.982 & 0.990 & 1.000 & 0.964 & 0.915 & 0.754 & 0.451 & 0.299 \\ 0.916 & 0.929 & 0.964 & 1.000 & 0.977 & 0.877 & 0.638 & 0.497 \\ 0.874 & 0.882 & 0.915 & 0.977 & 1.000 & 0.948 & 0.725 & 0.592 \\ 0.694 & 0.705 & 0.754 & 0.877 & 0.948 & 1.000 & 0.880 & 0.778 \\ 0.358 & 0.376 & 0.451 & 0.638 & 0.725 & 0.880 & 1.000 & 0.961 \\ 0.203 & 0.224 & 0.299 & 0.497 & 0.592 & 0.778 & 0.961 & 1.000 \end{bmatrix}$$

상관계수행렬  $P$ 에서 알 수 있듯이, 각 시점  $t$ 에서 서로 다른 만기들에 대한 일드들 사이에는 높은 상관관계가 있다. 일드곡선  $\{R(t, T) \mid T \in [t, \bar{T}]\}$ 가 만기시점  $T$ 에 대해 연속이라고 가정하면, 일드곡선에 대한 두 종류 변화를 생각할 수 있다. 첫째, 시점  $t$ 가 작은 시간간격  $\Delta t$ 만큼 변화하면, 일드곡선의 변화에는 Brown운동의 새로운 증분이 추가되고, 이 확률적 변동이 일드곡선 전체에 영향을 미친다. 즉, 시점  $t$ 의 변화는 일드곡선의 이동(shift)을 유발한다. 둘째, 고정된 시점  $t$ 에서 만기시점  $T$ 가 작은 시간간격  $\Delta T$ 만큼 변화했을 때 일드곡선에서 일어나는 현상은 Brown운동과 연관되지 않는다. 일드들의 상관계수행렬  $P$ 의 각 원소는 두 번째 변화를 반영하므로, 그 값이 크다. 따라서, 국채가치의 동적특성을 분석할 때는 특정한 국채의 가치변동을 나타내는 단변량확률과정의 동적특성이 아니라 일드곡선, 즉 일드기간구조의 동적특성을 다루어야 하므로, 국채가치에 내재된 무재정조건은 Black-Scholes환경의 무재정조건보다 더 복잡하다. 즉, 하나의 국채가치과정인 아닌 일드곡선의 변동에서 재정기회를 배제하는 조건을 필요로 한다. 순간현물이자율을 사용해서는 이러한 무재정조건을 명시하는 것이 어려우나, 순간선도이자율과정의 HJM모형에서는 무재정조건을 명시할 수 있다. 따라서, 순간현물이자율의 확산미분방정식모형보다 순간선도이자율과정의 HJM모형이 이자율에 민감한 금융상품의 가치평가에 더 유용하다.

### 3. 先渡利率曲線

이자율기간구조를 HJM모형으로 나타내기 위해서는 먼저 선도이자율곡선을 구해야 한다. 각 시점  $t$ 의 일드곡선으로부터 선도이자율곡선  $\{f(t, t+T) \mid T \leq \bar{T}\}$ 를 유도하기로 하자.

만기가  $T_1 = 0.25$ ,  $T_2 = 0.5$  그리고  $T_3 = 1$ 인 각 단기국채는 제로쿠폰채이다. 한국국채시장의 복리주파수(compounding frequency)는  $m = 2$ 이므로, 이 제로쿠폰채들의 시점  $t$ 에서 가격들은 다음 식들을 만족한다.

$$(3.1) \quad P(t, t+T_1) = \frac{1}{\left[1 + \frac{y_1(t)}{2}\right]^{1/2}}$$

$$(3.2) \quad P(t, t+T_2) = \frac{1}{\left[1 + \frac{y_2(t)}{2}\right]^{2/2}}$$

$$(3.3) \quad P(t, t+T_3) = \frac{1}{\left[1 + \frac{y_3(t)}{2}\right]^2}$$

여기서  $y_k(t)$ 는 시점  $t$ 에서 만기가  $T_k$ 인 국채의 만기일드이다. 중장기국채에 대해서는 다음 식들이 성립한다.

$$(3.4) \quad \sum_{l=1}^{2T_k} y_l(t) P\left(t, t + \frac{l}{2}\right) + P(t, t+T_k) = 1, \quad (k=4, 5, \dots, 8)$$

식 (1.8)을 식 (3.4)에 대입하면, 각  $k(=4, 5, \dots, 8)$ 에 대해서 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$(3.5) \quad \sum_{l=1}^{2T_k} y_l(t) \exp\left(-\int_t^{t+\frac{l}{2}} f(t, s) ds\right) + \exp\left(-\int_t^{t+T_k} f(t, s) ds\right) = 1$$

이 장의 목적은 식 (3.5)를 사용해서 선도이자율곡선을 구하는 것이다.

우리가 가지고 있는 정보는 각 시점에서 각 만기에 대한 만기일드 뿐이다. 따라서, 이 만기일드를 액면일드(par yield)로 간주하자. 이러한 가정이 없다면, 붓스트랩법(bootstrap method)을 적용해서 선도이자율곡선을 구하기 위해서는 각 채권의 쿠폰율과 만기까지 정확한 잔여기간을 알아야 한다. 일반성을 잃지 않고, 시점  $t$ 를 0이라 하고, 시점 0에서 만기가  $T_k$ 인 채권의 만기일드를  $y_k$ 로 표기하자. 시점 0에서 3개월물 연속복리이자율  $y_1$ 은 다음 식을 만족한다.

$$(3.6) \quad y_1 = \frac{\exp\left(\frac{1}{4}r_0\right) - 1}{1/4}$$

즉, 다음 식이 성립한다.

$$(3.7) \quad r_0 = 4 \ln \left( 1 + \frac{1}{4} y_1 \right)$$

Avellaneda and Laurence(1999, pp. 224-225)는 선도이자율곡선이 구분상수함수(piecewise constant function)라는 가정하에 붓스트랩법을 적용해서 선도이자율곡선을 구하였다. 이렇게 구한 선도이자율곡선은 각 만기시점에서 불연속이다. 본 논문에서는 연속인 선도이자율곡선  $\{f(0, T) \mid T \leq 20\}$ 을 구하기 위해서, 다음 조건들이 성립한다고 가정하자.

(A.1) 선도이자율곡선은 만기  $T$ 에 대해서 연속인 구분선형함수(piecewise linear function)이다.

$$(A.2) \quad f(0, T) = r_0, \quad (T_0 \leq T < T_1)$$

(A.3) 각  $k(=2, 3, \dots, 8)$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$f(0, T) = f(0, T_{k-1}) + a_{k-1}[T - T_{k-1}], \quad (T_{k-1} \leq T < T_k)$$

이러한 가정하에 붓스트랩법을 적용해서,  $\{a_k \mid k = 1, 2, \dots, 7\}$ 를 구할 수 있다. 식 (3.1)-식 (3.3)에서 알 수 있듯이,  $a_1$ 과  $a_2$ 는 각각 다음과 같다.

$$(3.8) \quad a_1 = -32 \left\{ \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{y_1}{2} \right) - \ln \left( 1 + \frac{y_2}{2} \right) + \frac{1}{4} r_0 \right\}$$

$$(3.9) \quad a_2 = -8 \left\{ \ln \left( 1 + \frac{y_2}{2} \right) - 2 \ln \left( 1 + \frac{y_3}{2} \right) + \frac{1}{2} \left[ r_0 + \frac{1}{4} a_1 \right] \right\}$$

식 (3.5)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$(3.10) \quad \begin{aligned} & \frac{y_4}{2} \exp \left( -\frac{1}{2} \left\{ \left[ r_0 + \frac{1}{4} a_1 \right] + \frac{1}{4} a_3 \right\} \right) + \frac{y_4}{2} \exp \left( -\left\{ \left[ r_0 + \frac{1}{4} a_1 \right] + \frac{1}{2} a_3 \right\} \right) \\ & + \exp \left( -\left\{ \left[ r_0 + \frac{1}{4} a_1 \right] + \frac{1}{2} a_3 \right\} \right) = \frac{1 - \sum_{j=1}^2 \frac{y_4}{2} P \left( 0, \frac{j}{2} \right)}{P(0,1)} \end{aligned}$$

식 (3.10)의 좌변은  $a_3$ 의 단조감소이므로, 비선형방정식 (3.10)은 일의적인 근  $a_3$ 를 갖는다. 식 (3.5)에서 알 수 있듯이, 각  $k(= 4, 5, 6, 7)$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 (3.11) \quad & \frac{y_{k+1}}{2} \sum_{j=2T_k+1}^{2T_{k+1}} \exp\left(-\left[\frac{j}{2}-T_k\right]\left\{f(0, T_k)+\frac{1}{2}a_k\left[\frac{j}{2}-T_k\right]\right\}\right) \\
 & + \exp\left(-[T_{k+1}-T_k]\left\{f(0, T_k)+\frac{1}{2}a_k[T_{k+1}-T_k]\right\}\right) \\
 & = \frac{1-\frac{y_{k+1}}{2} \sum_{j=1}^{2T_k} P\left(0, \frac{j}{2}\right)}{P(0, T_k)}
 \end{aligned}$$

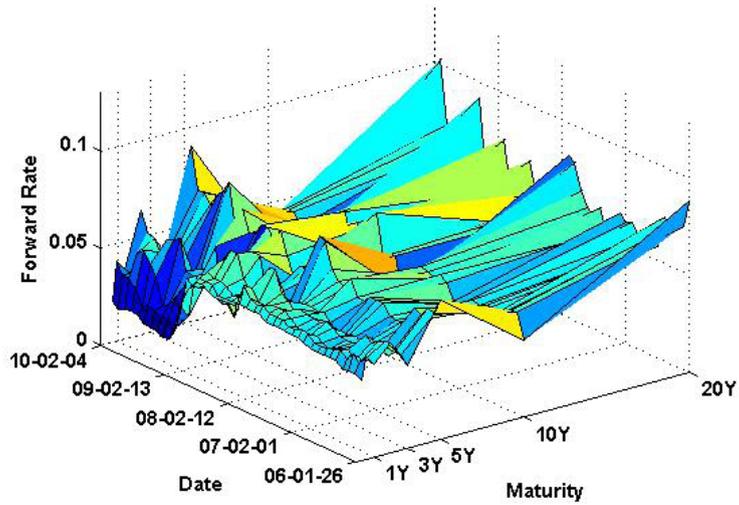
비선형방정식 (3.11)을 재귀적으로(recursively) 풀어서  $\{a_k \mid k = 4, 5, 6, 7\}$ 을 구한다. 식 (3.11)의 좌변은  $a_k$ 의 단조감소함수이므로 비선형방정식 (3.11)은 일의적인 근을 갖는다. 여기서 독자들이 알아야 할 점은 식 (3.8)-식 (3.11)은 조건 (A.1)-조건 (A.3) 하에 간단한 적분을 사용해서 구한 것이지 결코 본 저자의 새로운 아이디어가 아니라는 것이다. 이 식들의 유도에 대한 자세한 내용은 최병선(2011)을 참조하라.

〈그림 4〉에는 이 붓스트랩법을 적용해서 구한 선도이자율곡면(forward rate surface)이 그려져 있고, 〈그림 5〉에는 이에 해당하는 선도이자율곡선의 시계열산점도가 그려져 있다. 모든 날짜에 대한 선도이자율곡면을 그리면 형태를 파악하기가 어려울 정도로 변화가 심하므로, 〈그림 4〉에서는 매 25번째 관찰일마다 선도이자율곡선을 하나씩 그렸다. 선도이자율곡면이 작은 만기 쪽에서 변화가 심한 것은 만기가 작은 쪽에 관찰점들이 모여 있기 때문이다.

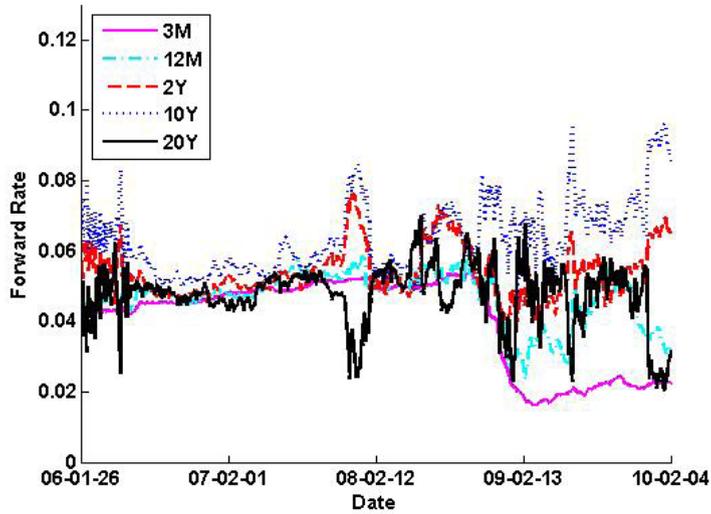
선도이자율과정을 확산미분방정식모형으로 나타내기 위해서는 선도이자율과정의 차분을 구할 필요가 있다. 각  $k(= 1, 2, \dots, K)$ 와 각  $n(= 1, 2, \dots, N)$ 에 대해서, 다음과 같이 차분을 정의하자.

$$(3.12) \quad \Delta f_{n,k} \doteq f([n+1]\Delta t, [n+1]\Delta t + T_k) - f(n\Delta t, n\Delta t + T_k)$$

여기서  $K = 8$ 이고  $N = 999$ 이다. 선도이자율의 차분시계열  $\{\Delta f_{n,k}\}$ 의 만기별 일드의 평균과 표준편차가 〈표 2〉에 실려 있다. 〈표 2〉에서 알 수 있듯이, 만기가 길어질수록 차분의 표준편차는 증가한다. 이러한 현상을 〈그림 6〉의 상자그림에서 확인할 수 있다. 또한, 〈그림 6〉에서 관찰할 수 있듯이, 만기가 커질수록 이상점이 많아지는 경향이 있다.



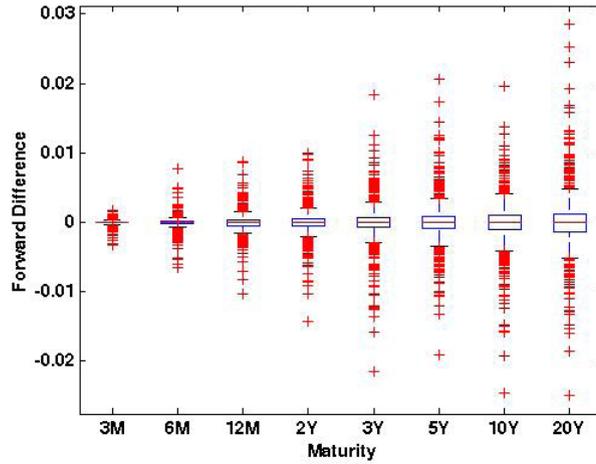
〈그림 4〉 先渡利率曲面



〈그림 5〉 先渡利率의 時系列

〈表 2〉 先渡利率差分의 平均과 標準偏差

	3M	6M	12M	2Y	3Y	5Y	10Y	20Y
평균 × 10 <sup>4</sup>	-0.1832	-0.1204	-0.1518	0.0814	-0.1175	0.1346	-0.0786	-0.0201
표준편차	0.0003	0.0008	0.0013	0.0017	0.0025	0.0028	0.0031	0.0039



〈그림 6〉先渡利率差分的 箱子그림

선도이자율의 차분시계열  $\{\Delta f_{n,k}\}$ 의 상관계수행렬은 아래의  $P_d$ 와 같다. 상관계수행렬들  $P$ 와  $P_d$ 에서 알 수 있듯이, 각 시점  $t$ 에서 다른 만기들에 대한 일드차분들 사이의 상관관계는 해당 일드들의 상관관계에 비해 약하다. 그래도 비슷한 만기들에 대한 일드차분들의 상관관계는 유의적임을 알 수 있다.

$$(3.13) P_d = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.0761 & 0.4508 & 0.1497 & 0.1024 & 0.0947 & 0.0671 & 0.0706 \\ 0.0761 & 1.0000 & -0.2524 & 0.6341 & -0.2875 & 0.4469 & -0.3175 & 0.4292 \\ 0.4508 & -0.2524 & 1.0000 & -0.3431 & 0.5344 & -0.3009 & 0.4395 & -0.2873 \\ 0.1497 & 0.6341 & -0.3431 & 1.0000 & -0.5939 & 0.7661 & -0.6141 & 0.7273 \\ 0.1024 & -0.2875 & 0.5344 & -0.5939 & 1.0000 & -0.8038 & 0.8523 & -0.7392 \\ 0.0947 & 0.4469 & -0.3009 & 0.7661 & -0.8038 & 1.0000 & -0.9014 & 0.9441 \\ 0.0671 & -0.3175 & 0.4395 & -0.6141 & 0.8523 & -0.9014 & 1.0000 & -0.9301 \\ 0.0706 & 0.4292 & -0.2873 & 0.7273 & -0.7392 & 0.9441 & -0.9301 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

#### 4. 變動性函數의 推定

Shreve(2004, pp. 432-435)는 순간선도이자율의 로그수익률에 HJM모형을 적합 시켰다. 이는 수익률의 수익률을 모형화하는 것이다. 즉, 채권가격에 두 번 로그를 취한 확률 과정에 적합한 HJM모형을 구하는 것이다. 이렇게 추정된 모형에서는 선도이자율이 비음(non-negative)이다. 반면에, Avellaneda and Laurence(1999, pp. 248-251)가 보였듯이, 이

러한 모형에서는 선도이자율이 폭발적으로 커질 수 있다. 본 논문에서는 Avellaneda and Laurence(1999, pp. 239-245)에 따라, 각  $T$ 에 대해 순간선도이자율과정의 동적특성이 다음과 같다고 가정하자.

$$(4.1) \quad df(t, T) = \tilde{\alpha}(T-t)dt + \sum_{j=1}^J \tilde{\beta}_j(T-t)dW_j(t), \quad (0 \leq t \leq T)$$

여기서  $\{[W_1(u), W_2(u), \dots, W_J(u)]'\}$ 는 진짜확률측도(true probability measure)  $P$ 하에서  $J$ 변량 Brown운동이다. HJM모형 (4.1)의 가장 큰 특징은 변동성(volatility)이 정상성(stationarity)을 갖는다는 것이다. 즉, 시점  $t$ 에 상관없이 만기시점  $T$ 에서 선도이자율의 변동성은 잔여기간(tenor)  $\tau \doteq T-t$ 의 함수라는 것이다. 이는 각 시점  $t$ 에서 발행되는 만기  $T_k$ 인 국채의 제  $j$ 번째 변동성이 항상  $\tilde{\beta}_j(T_k)$ 라고 가정을 하는 것이다. HJM무재정조건에 의해서, 이 순간선도이자율과정의 동적특성을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(4.2) \quad df(t, T) = \sum_{j=1}^J [\tilde{\beta}_j(T-t)\tilde{\beta}_j^*(T-t)dt + \tilde{\beta}_j(T-t)dW_j^Q(t)], \quad (0 \leq t \leq T)$$

여기서  $\{[W_1^Q(u), W_2^Q(u), \dots, W_J^Q(u)]'\}$ 는 위험중립확률측도  $Q$ 하에서  $J$ 변량 Brown운동이고,  $\tilde{\beta}_j^*(\tau)$ 는 다음과 같다.

$$(4.3) \quad \tilde{\beta}_j^*(\tau) \doteq \int_0^\tau \tilde{\beta}_j(v)dv$$

따라서, 각  $j$ 에 대한 변동성함수  $\tilde{\beta}_j(\tau)$ 를 추정하면, 순간선도이자율과정의 HJM모형 (4.2) 자체를 추정하게 된다.

식 (4.1)에 식  $t = n\Delta t$ 와 식  $T = n\Delta t + T_k$ 를 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$(4.4) \quad d_{n,k} = \tilde{\alpha}(T_k)\sqrt{\Delta t} + \sum_{j=1}^J \tilde{\beta}_j(T_k)z_{n,j}$$

여기서  $d_{n,k}$ 와  $z_{n,j}$ 는 각각 다음과 같다.

$$(4.5) \quad d_{n,k} \doteq \frac{\Delta f_{n,k}}{\sqrt{\Delta t}}$$

$$(4.6) \quad z_{n,k} \doteq \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \Delta W_j(n\Delta t) \doteq \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} [\Delta W_j([n+1]\Delta t) - \Delta W_j(n\Delta t)]$$

이  $\{z_{n,j}\}$ 는 서로 독립인 표준정규확률변수들이고,  $d_{1,k}, d_{2,k}, \dots, d_{N,k}$ 는 서로 독립이다. 식 (4.4)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$(4.7) \quad \tilde{\alpha}(T_k)\sqrt{\Delta t} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N d_{n,k} - \sum_{j=1}^J \tilde{\beta}_j(T_k) \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_{n,j} \right]$$

식 (4.7)의 우변의 두 번째 항은 0으로 개수렴한다(converge almost surely). 따라서 추세계수  $\tilde{\alpha}(T_k)$ 를 다음과 같이 추정할 수 있다.

$$(4.8) \quad \hat{\alpha}(T_k) = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \bar{d}_k$$

여기서  $\bar{d}_k \doteq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N d_{n,k}$  이다. 확률변수들  $d_{\cdot,k_1}$ 과  $d_{\cdot,k_2}$ 의 공분산과 표본공분산은 각각 다음과 같다.

$$(4.9) \quad Cov(d_{\cdot,k_1}, d_{\cdot,k_2}) = \sum_{j=1}^J \tilde{\beta}_j(T_{k_1}) \tilde{\beta}_j(T_{k_2})$$

$$(4.10) \quad c_{k_1,k_2} \doteq \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N [d_{n,k_1} - \bar{d}_{k_1}][d_{n,k_2} - \bar{d}_{k_2}]$$

식 (4.9)에서 알 수 있듯이, 변동성들  $\tilde{\beta}_j(\tau_1), \tilde{\beta}_j(\tau_2), \dots, \tilde{\beta}_j(\tau_K)$ 의 적률추정량들  $\hat{\beta}_j(\tau_1), \hat{\beta}_j(\tau_2), \dots, \hat{\beta}_j(\tau_K)$ 는 다음 식들을 만족한다.

$$(4.11) \quad c_{k_1,k_2} = \sum_{j=1}^J \hat{\beta}_j(\tau_{k_1}) \hat{\beta}_j(\tau_{k_2}), \quad (k_1, k_2 = 1, 2, \dots, K)$$

연립방정식 (4.11)은  $K[K+1]/2$ 개의 단일방정식들과  $JK$ 개의 미지수들  $\{\hat{\beta}_j(\tau_k)\}$ 로 구성되어 있다.

HJM모형의 변동성을 추정하는 일반적인 방법은 주성분분석을 사용하는 것이다. 주성분 분석을 사용해서 변동성의 적률추정량을 구하기 위해, 다음 행렬들을 정의하자.

$$(4.12) \quad D \doteq \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & \cdots & d_{1,K} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & \cdots & d_{2,K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{N,1} & d_{N,2} & \cdots & d_{N,K} \end{bmatrix}, \quad C \doteq \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,K} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{K,1} & c_{K,2} & \cdots & c_{K,K} \end{bmatrix}$$

적률방정식 (4.11)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(4.13) \quad C = \frac{1}{N-1} D' D$$

적률방정식 (4.13)에서 알 수 있듯이, 행렬  $C$ 는 양반정치(positive semi-definite)이다. 따라서, 다음과 같이 행렬  $C$ 를 스펙트럴분해(spectral decomposition) 할 수 있다.

$$(4.14) \quad C = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1' + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2' + \cdots + \lambda_K \mathbf{v}_K \mathbf{v}_K'$$

여기서  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$ 는 행렬  $C$ 의 고유값들로서 다음 식들을 만족한다.

$$(4.15) \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_K \geq 0$$

또한,  $\mathbf{v}_k$ 는 고유값  $\lambda_k$ 에 해당하는 노름이 1인 고유벡터이고,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_K$ 는 선형독립이다. 식 (4.11)과 식 (4.14)에서 알 수 있듯이,  $\sqrt{\lambda_j} \mathbf{v}_j$ 를 제  $j$ 번째 변동성  $\{\hat{\beta}_j(\tau_k)\}$ 의 추정벡터라고 할 수 있다. 따라서, 다음과 같이 변동성벡터를 추정하자.

$$(4.16) \quad \hat{\beta}_j \doteq [\hat{\beta}_j(\tau_1) \hat{\beta}_j(\tau_2) \cdots \hat{\beta}_j(\tau_K)] = \sqrt{\lambda_j} \mathbf{v}_j'$$

선도이자율곡선의 특성을 파악하기 위해서는 변동성을 모수적으로 나타내는 것이 편리할 수 있다. Avellaneda and Laurence(1999, pp. 245-246)는 2요인 HJM모형에서 변동성들을 다음과 같은 모수적 함수들로 나타낼 것을 제안하였다.

$$(4.17) \quad \beta_1^{AL}(\tau) = A \exp(-\kappa_1 \tau), \quad \beta_2^{AL}(\tau) = B [1 - 2\exp(-\kappa_2 \tau)]$$

본 논문에서는 다음과 같은 모수적 함수들을 사용할 것을 제안한다.

$$(4.18) \quad \beta_1^{AC}(\tau) = a, \quad \beta_2^{AC}(\tau) = b \exp(-\kappa_1\tau), \quad \beta_3^{AC}(\tau) = c [1 - 2\exp(-\kappa_2\tau)]$$

제6장에서 식 (4.18)의 함수들을 사용하는 이유와 방법을 설명할 것이다.

지금까지는 변동성이 정상성을 갖는다고 가정하였다. 변동성이 정상성을 갖으면, 변동성 함수가 채권의 잔여기간  $\tau$ 에만 의존하고 각 시점  $t$ 의 경제상태와는 무관하다. 이러한 가정은 현실적이지 아니다. 따라서, 본 논문에서는 변동성이 잔여기간뿐 아니라 각 시점에도 의존하는 모형들을 다루고자 한다. 순간선도이자율과정이 다음과 같은 2요인 HJM모형을 만족한다고 가정하자.

$$(4.19) \quad df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \beta_1(t, T)dW_1(t) + \beta_2(t, T)dW_2(t)$$

여기서  $\{W(t) \doteq [W_1(t) W_2(t)]'\}$ 는 진짜확률측도  $P$ 하에서 2변량 Brown운동이다. 다음 식이 성립한다.

$$(4.20) \quad df_t = adt + \beta_1 dW_1(t) + \beta_2 dW_2(t)$$

여기서 각 벡터는 다음과 같다.

$$(4.21) \quad f_t \doteq \begin{bmatrix} f(t, t+T_1) \\ f(t, t+T_2) \\ \vdots \\ f(t, t+T_K) \end{bmatrix}, \quad \alpha \doteq \begin{bmatrix} \alpha(t, t+T_1) \\ \alpha(t, t+T_2) \\ \vdots \\ \alpha(t, t+T_K) \end{bmatrix},$$

$$\beta_1 \doteq \begin{bmatrix} \beta_1(t, t+T_1) \\ \beta_1(t, t+T_2) \\ \vdots \\ \beta_1(t, t+T_K) \end{bmatrix}, \quad \beta_2 \doteq \begin{bmatrix} \beta_2(t, t+T_1) \\ \beta_2(t, t+T_2) \\ \vdots \\ \beta_2(t, t+T_K) \end{bmatrix}$$

벡터  $df_t$ 의 분산공분산행렬  $\Sigma_{df}$ 는 다음 식을 만족한다.

$$(4.22) \quad \Sigma_{df} = \beta_1 \beta_1' dt + \beta_2 \beta_2' dt$$

추세계수들의 개수와 관찰값들의 개수는 같다. 따라서, 분산공분산행렬  $\Sigma_{df}$ 를 추정하기 위

해서는 추세계수들에 어떤 제약을 가해야 한다. HJM모형을 사용해서 이자율파생상품과 같은 이자율에 민감한 금융상품의 가치를 평가할 때는 HJM무재정조건에 따라 위험중립확률측도  $Q$ 하에서 추세계수를 변동성의 함수로 나타낸다. 따라서, 진짜확률측도  $P$ 하에서 추세계수는 단지 분산공분산행렬  $\Sigma_{df}$ 를 추정할 때 사용하는 표본평균의 역할 정도를 할 뿐이다. 여기서는  $\alpha(t, T)$ 를 잔여기간의 함수인  $\hat{\alpha}(T-t)$ 라고 가정하자. 이러한 가정하에서 추세계수  $\alpha(T_k)$ 의 자연스러운 추정량은 식 (4.8)에서 정의한  $\hat{\alpha}(T_k)$ 이다.

추세계수의 추정에서와 마찬가지로 변동성들을 추정하기 위해서는 변동성들 사이에 제약을 가해야 한다. 본 논문에서는 각  $j(= 1, 2)$ 에 대해서 시계열  $\{\beta_j(t, T) | t > 0\}$ 를 다음과 같이 정상적(stationary) 부분  $\tilde{\beta}_j(T-t)$ 과 비정상적(nonstationary) 부분  $g_j(t)$ 으로 분리할 수 있다고 가정하자.

$$(4.23) \quad \beta_j(t, T) = \tilde{\beta}_j(T-t)g_j(t), \quad (j = 1, 2)$$

첫 번째 단계로 정상적 부분  $\tilde{\beta}_j(T-t)$ 를 추정하기 위해서, 식  $g_1(t) \equiv 1$ 과 식  $g_2(t) \equiv 1$ 이 성립한다고 가정하자. 식 (4.22)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(4.24) \quad \Sigma_{df} = \tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_1' dt + \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_2' dt$$

여기서  $\tilde{\beta}_j \equiv [\tilde{\beta}_j(T_1) \tilde{\beta}_j(T_2) \cdots \tilde{\beta}_j(T_8)]'$ 이다. 따라서, 식 (4.16)에서 정의한  $\hat{\beta}_j$ 를  $\tilde{\beta}_j$ 의 추정량으로 간주할 수 있다. 두 번째 단계로, 비정상적인 부분  $g_j(t)$ 를 추정하기로 하자. 식 (4.23)과 식 (4.24)에서 알 수 있듯이, 식 (4.20)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(4.25) \quad \frac{df(t, T) - \hat{\alpha}(T-t)dt}{\hat{\beta}_1(T-t)} = g_1(t)dW_1(t) + \frac{\hat{\beta}_2(T-t)}{\hat{\beta}_1(T-t)} g_2(t)dW_2(t)$$

여기서  $\hat{\beta}_2(T_k)/\hat{\beta}_1(T_k)$ 는  $t$ 에 의존하지 않는 상수이다. 따라서, 이 상수를 함수  $g_2(t)$ 에 포함시킨다면, 다음과 같이 식 (4.25)를 약간 변형한 모형을 생각할 수 있다.

$$(4.26) \quad \frac{df(t, T) - \hat{\alpha}(T-t)dt}{\hat{\beta}_1(T-t)\sqrt{dt}} = g_1(t) \frac{1}{\sqrt{dt}} dW_1(t) + g_2(t) \frac{1}{\sqrt{dt}} dW_2(t)$$

식 (4.26)의 우변은  $t$ 에만 의존하므로 잔여기간에 대한 분산을 취하면, 다음 추정방정식

이 성립한다.

$$(4.27) \quad \frac{1}{7} \sum_{k=1}^8 \left[ \frac{\Delta f_{n,k} - \hat{\alpha}(T_k) \Delta t}{\hat{\beta}_1(T_k) \sqrt{\Delta t}} \right]^2 = g_1^2(t) + g_2^2(t)$$

식 (4.27)의 우변을 다음과 같이  $\psi(t)$ 로 표기하자.

$$(4.28) \quad \psi(t) \doteq \frac{1}{7} \sum_{k=1}^8 \left[ \frac{\Delta f_{n,k} - \hat{\alpha}(T_k) \Delta t}{\hat{\beta}_1(T_k) \sqrt{\Delta t}} \right]^2$$

주어진 데이터로부터  $\psi(t)$ 를 구할 수 있으므로, 우리의 남은 문제는 이  $\psi(t)$ 에서  $g_1^2(t)$ 와  $g_2^2(t)$ 를 분리해내는 것이다. 선도이자율시계열은 확률과정의 실현값이므로 변동이 심하고, 따라서 식 (4.27)의 좌변도 변동이 심하다. 식 (4.26)의 우변에서 Brown운동들  $\{W_1(t)\}$ 와  $\{W_2(t)\}$ 가 이러한 극심한 변동을 반영하므로, 함수들  $g_1(t)$ 와  $g_2(t)$ 는 평활하다고 가정하자. 앞의 Avellaneda-Laurence모형에서도 알 수 있듯이, 이러한 가정은 보편적인 것이다.

### 5. Markov模型

HJM모형에서는 순간선도이자율이 Markov과정을 이룬다고 가정한다. 그러나 HJM모형으로부터 유도된 순간현물이자율과정  $\{r_t\}$ 는 일반적으로 Markov성을 갖지 못한다. 또한, 실제 시장데이터로부터 도출된 순간현물이자율과정이 Markov성을 갖지 못한다고 알려져 있다. 그럼에도 실무에서 HJM모형을 이용할 때 부딪히는 가장 큰 문제점은 이로부터 유도된 순간현물이자율과정이 Markov성을 갖지 못한다는 것이다. 예를 들어, 이항나무모형(binomial tree model)과 같은 격자모형(lattice model)을 사용해서 채권옵션의 가치를 평가하는 문제를 생각해보자. 현재시점이  $t$ 이고 만기시점이  $T$ 인 제로쿠폰채의 시점  $s$ 에서 가치  $P(s, T)$ 가 원자산인 금융과생상품의 지불금액이  $G(P(s, T))$ 라고 하자. 이 채권과생상품의 현재시점  $t$ 에서 공정한 가치  $G_t$ 는 다음과 같다.

$$(5.1) \quad G_t = E_t^Q \left( \exp \left( - \int_t^s r_u du \right) G(P(s, T)) \right)$$

여기서  $Q$ 는 위험중립확률측도이다. 격자모형을 사용해서 가치평가식 (5.1)을 계산하기 위

해서는 시간구간  $[t, s]$ 를 소구간(subinterval)들로 분할해서 순간선도이자율과정  $\{r_u\}$ 를 이산화해야 한다. 만일  $\{r_u\}$ 가 Markov성을 갖지 않으면, 격자나무가 재결합하지(recombining) 않고 따라서 각 시점에서 그 이전의 모든 시점들의 상태들을 알아야만 한다. 이러한 경우에는 감당할 수 없을 만큼 많은 계산시간을 필요로 한다. 반면에, 만일  $r_u$ 를 결합Markov성을 갖는 상태변수들의 함수로 나타낼 수 있다면, 이러한 계산시간을 충분히 절약할 수 있을 것이다. 따라서, HJM모형에서 유도된 순간현물이자율과정  $\{r_u\}$ 가 Markov성을 갖기 위한 조건은 매우 중요한 것이다.

순간선도이자율  $f(t, T)$ 의 HJM모형 (4.2)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$(5.2) \quad f(t, T) = f(0, T) + \sum_{j=1}^J \left[ \int_0^t \alpha_j(u, T) du + \int_0^t \beta_j(u, T) dW_j^Q(u) \right]$$

여기서  $\{W^Q(t) \doteq [W_1^Q(t) \ W_2^Q(t) \ \dots \ W_J^Q(t)]'\}$ 는 위험중립확률측도  $Q$ 하에서  $J$ 변량 Brown운동이다. HJM무재정조건에 의해서, 다음 식들이 성립한다.

$$(5.3) \quad \alpha_j(t, T) = \beta_j(t, T) \int_t^T \beta_j(t, u) du, \quad (j=1, 2, \dots, J)$$

식 (1.6)과 식 (5.2)에서 알 수 있듯이, 순간현물이자율  $r_t$ 는 다음 식을 만족한다.

$$(5.4) \quad r_t = f(0, t) + \sum_{j=1}^J \left[ \int_0^t \alpha_j(u, t) du + \int_0^t \beta_j(u, t) dW_j^Q(u) \right], \quad (0 \leq t \leq T)$$

식 (5.4)에 Leibniz공식을 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$(5.5) \quad \begin{aligned} dr_t = & \frac{\partial}{\partial t} f(0, t) dt + \sum_{j=1}^J \beta_j(t, t) dW_j^Q(t) \\ & + \sum_{j=1}^J \left[ \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \alpha_j(u, t) du + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \beta_j(u, t) dW_j^Q(u) \right] dt \end{aligned}$$

식 (5.2)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$(5.6) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial T} f(t, T) \right]_{T=t} = \left[ \frac{\partial}{\partial T} f(0, T) \right]_{T=t} + \sum_{j=1}^J \left[ \int_0^t \frac{\partial}{\partial T} \alpha_j(u, T) du \right]_{T=t} + \sum_{j=1}^J \left[ \int_0^t \frac{\partial}{\partial T} \beta_j(u, T) dW_j^Q(u) \right]_{T=t}$$

식 (5.6)을 식 (5.5)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$(5.7) \quad dr_t = \left[ \frac{\partial}{\partial t} f(t, T) \right]_{T=t} dt + \sum_{j=1}^J \beta_j(t, t) dW_j^Q(t), \quad (0 \leq t \leq T)$$

만일 시점  $t$ 에서 순간현물이자율과정의 추세계수  $\left[ \frac{\partial}{\partial t} f(t, T) \right]_{T=t}$ 가  $r_t$ 와  $t$ 의 함수이면, 순간현물이자율과정은 Markov성을 갖는다. 즉,  $\sum_{j=1}^J \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \beta_j(u, t) dW_j^Q(u)$ 가  $r_t$ 와  $t$ 이면, 순간현물이자율과정  $\{r_t\}$ 는 Markov성을 갖는다.

Hull and White(1990, p. 576), Jamshidian(1991, p. 147)과 Jeffrey(1995, p. 628) 등은 변동성함수가 분리성을 갖는다고 가정하고 변동성함수를 추정하였다. Ritchken and Sankarasubramanian(1995, 이후 RS라 부름)은 이러한 가정하에 1요인 HJM모형을 추정하였고, 이병근·현정순(2002)은 이 RS이론을 바탕으로 한국의 이자율데이터를 분석하였다. Inui and Kijima(1998, 이후 IK라 부름)는 RS이론을 다요인 HJM모형으로 확장하여 다음 정리를 제시하였다.

정리 1: 다요인 HJM모형 (5.2)의 변동성함수들  $\{\beta_j(t, T) | j = 1, 2, \dots, J\}$ 가  $T$ 에 대해서 미분 가능이고, 다음 식들을 만족한다고 가정하자.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \beta_j(t, T) &= -\kappa_j(T) \beta_j(t, T), \quad (j=1, 2, \dots, J) \\ \beta_j(t, t) &= \zeta_j(r_t, t), \quad (j=1, 2, \dots, J) \end{aligned}$$

여기서  $\{\zeta_j(r_t, t)\}$ 는 적합과정(adapted process)이고,  $\chi_j(T)$ 는 적분 가능한 결정적 함수이다. 이러한 조건 하에서 다음 식들이 성립한다.

$$\beta_j(t, T) = \zeta_j(r_t, t) \exp\left(-\int_t^T \kappa_j(u) du\right), \quad (0 \leq t \leq T)$$

$$dr_t = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} f(0,t) + \kappa_j(t)[f(0,t) - r_t] + \Phi(t) \right\} dt + \sum_{j=1}^J \zeta_j(r_t, t) dW_j^Q(t)$$

여기서  $\Phi(t)$ 는 다음과 같다.

$$\Phi(t) \doteq \sum_{j=1}^J \phi_j(t) + \sum_{j=1}^{J-1} [\kappa_J(t) - \kappa_j(t)] \chi_j(t)$$

또한, 각  $j$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} d\phi_j(t) \\ d\chi_j(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\zeta_j^2(r_t, t) - 2\kappa_j(t)\phi_j(t)]dt \\ [\phi_j(t) - \kappa_j(t)\chi_j(t)]dt + \zeta_j(r_t, t)dW_j^Q(t) \end{bmatrix} \quad \square$$

정리 1에서 알 수 있듯이, 2변량 확률과정  $\{[\phi_j(t), \chi_j(t)]'\}$ 는 Markov성을 갖는다. 따라서, 순간현물이자율과정  $\{r_t\}$ 는 Markov성을 갖는다.

각  $j(= 1, 2, \dots, J)$ 에 대해 다음 식을 만족하는 양의 결정적 함수들  $\zeta_j(\cdot)$ 와  $\phi_j(\cdot)$ 가 존재한다고 가정하자.

$$(5.8) \quad \beta_j(t, T) = \zeta_j(t)\phi_j(T)$$

Carverhill(1994)은 이러한 가정하에서 순간현물이자율과정  $\{r_t\}$ 가 Markov성을 갖는다고 주장하였다. 그러나 본 논문의 부록에서 알 수 있듯이, Carverhill의 증명에는 오류가 있으며, 그의 주장은 단지  $J=1$ 인 경우에만 성립한다. 또한, 본 논문의 부록에는 Carverhill의 주장을 변형한 다음과 같은 정리의 증명이 수록되어 있다.

정리 2: 다요인 HJM모형 (5.2)의 변동성함수들  $\{\beta_j(t, T) | j = 1, 2, \dots, J\}$ 가  $T$ 에 대해서 미분 가능이고 또한 다음 식들을 만족하면, 순간현물이자율과정  $\{r_t\}$ 는 Markov성을 갖는다.

$$\beta_j(t, T) = \zeta_j(t)\phi_j(T), \quad (j = 1, 2, \dots, J) \quad \square$$

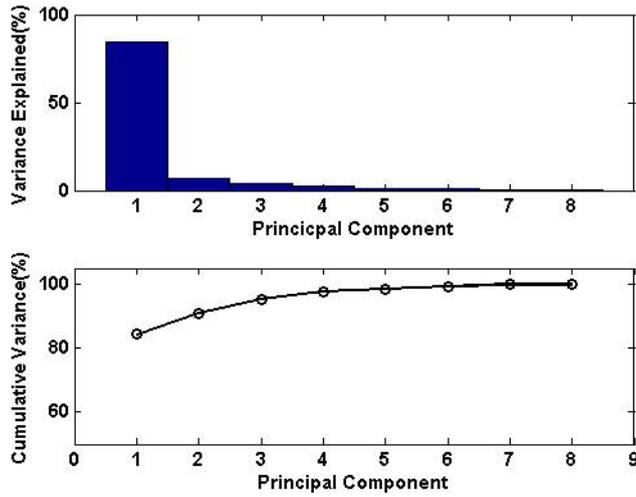
## 6. 多様な HJM 모델들

이 장에서는 한국국채의 선도이자율에 적합한 다양한 HJM모형들을 추정하고, 모의실험을 통해서 추정된 HJM모형들을 비교해보자.

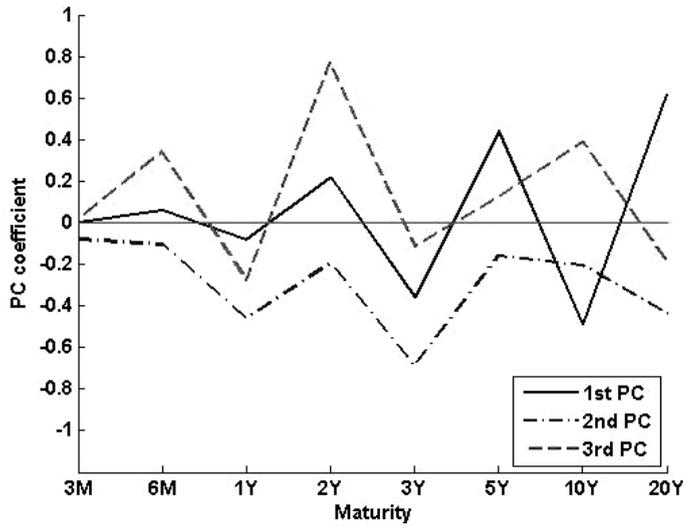
순간선도이자율과정에서 유도된  $\{d_{n,k} = \Delta f_{n,k} / \sqrt{\Delta t}\}$ 에 주성분분석을 적용해서, 분산공분산 행렬  $C$ 를 식 (4.14)처럼 스펙트럴분해할 수 있다. 그 결과로 얻은 고유값들은 다음과 같다.

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 0.00929, \lambda_2 = 0.00073, \lambda_3 = 0.00047, \lambda_4 = 0.00026 \\ \lambda_5 &= 0.00009, \lambda_6 = 0.00008, \lambda_7 = 0.00007, \lambda_8 = 0.00002 \end{aligned}$$

〈그림 7〉에는 각 주성분의 기여율과 누적기여율을 그린 스크리그램(scree plot)이 그려져 있다. 이 스크리그램에서 알 수 있듯이, 첫 번째 주성분의 기여율은 84.4%, 두 번째 주성분의 기여율은 6.6% 그리고 세 번째 주성분의 기여율은 4.3%이다. 세 번째 주성분까지 누적기여율은 95.3%이고 다섯 번째 주성분까지 누적기여율은 98.5%이다. 또한, 네 번째 주성분부터는 누적기여율이 완만해짐을 알 수 있다. 주성분분석에서 몇 개의 주성분들을 사용할 것이냐는 중요한 문제이다. 계량경제학에서 모형선택에 가장 널리 사용하는 것은 Akaike정보기준(Akaike information criterion)이나 베이지안정보기준(Baysian information criterion)과 같은 벌칙함수기준(penalty function criterion)들이다. 이들에 대해서는 Choi(1992)를 참조하라. 그러나 설명변수들의 개수가 커질수록 오차분산이 작아지는 차원축소문제(dimension reduction problem)와는 반대로 HJM모형에서는 요인들의 개수가 커질수록 전체 변동성이 커진다. 따라서, HJM모형에서 요인들의 개수를 선택할 때는 벌칙함수기준이 아닌 보상함수기준(reward function criterion)을 사용해야 할 것이다. 아직 보상함수기준에 대한 연구가 되어 있지 않으므로, 보상함수기준을 사용해서 변동성들의 적절한 개수를 구하는 것은 향후 연구대상이다. 이 선도이자율분석에서 사용되는 만기시점들의 개수는 8개이다. 이러한 경우, 본 저자는 실제로 의미 있는 인자들의 개수는  $\sqrt{8}$  이 하이어야 한다고 생각한다. 그렇지 않으면, 통계분석의 근간이 되는 중심극한정리(central limit theorem)를 적용하는 것이 의미가 없다고 생각한다. 즉, 계량경제학적인 관점에서 본다면, 첫 세 요인들이 일드곡선의 변동량의 대부분을 설명해야만 한다. 또한, Litterman and Scheinkman(1991)도 일드곡선의 변동량을 3가지 요인들로 설명한다. 첫 번째 요인은 일드곡선의 평균에 해당하는 수준(level)으로, 두 번째 요인은 일드곡선의 기울기(slope)로, 그리고 세 번째 요인은 일드곡선의 곡률(curvature)로 해석한다. 또한, 미국 시장데이터의 경우

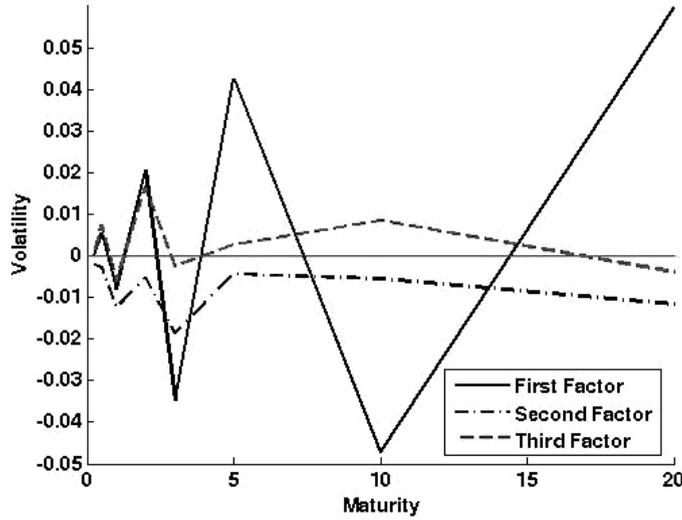


〈그림 7〉 스크리그림



〈그림 8〉 主成分係數

에, 일반적으로 제로쿠폰채의 수익률에서 이 세 요인들에서 설명할 수 있는 변동량은 총 변동량의 98%가량 되고, 그중에서 첫 번째 요인으로 설명할 수 있는 변동량이 90%가량 된다고 한다. 본 논문에서도 주성분을 최대 3개만 사용하기로 하자. 식 (6.1)의 첫 세 고유값들에 대한 고유벡터들이 〈그림 8〉에 그려져 있다. 〈그림 8〉에서 볼 수 있듯이, 제1주성분



〈그림 9〉 變動性벡터

은 수준, 제2주성분은 추세 그리고 제3성분은 곡률을 나타낸다고 해석할 수 있다.  
이 스펙트럴분해에 의해서 추정된 변동성벡터들은 다음과 같다.

$$(6.2) \quad \hat{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 0.00008 \\ 0.00561 \\ -0.00808 \\ 0.02076 \\ -0.03461 \\ 0.04234 \\ -0.04715 \\ 0.05953 \end{bmatrix}, \hat{\beta}_2 = \begin{bmatrix} -0.00217 \\ -0.00280 \\ -0.01250 \\ -0.00525 \\ -0.01861 \\ -0.00435 \\ -0.00551 \\ -0.01169 \end{bmatrix}, \hat{\beta}_3 = \begin{bmatrix} 0.00038 \\ 0.00736 \\ -0.00597 \\ 0.01666 \\ -0.00246 \\ 0.00271 \\ 0.00843 \\ -0.00400 \end{bmatrix}$$

이 변동성벡터들이 〈그림 9〉에 그려져 있다. 또한, 추세계수의 추정벡터는 다음과 같다.

$$(6.3) \quad \hat{\alpha} = [-0.0046 \ -0.0030 \ -0.0038 \ 0.0020 \ -0.0029 \ 0.0034 \ -0.0020 \ -0.0005]'$$

다음과 같은 HJM모형들을 고려해보자.

$$[\text{HJM모형 A}] \quad df(t, t + T_k) = \hat{\alpha}(T_k)dt + \hat{\beta}_1(T_k)dW_1(t)$$

$$[\text{HJM모형 B}] \quad df(t, t + T_k) = \hat{\alpha}(T_k)dt + \hat{\beta}_1(T_k)dW_1(t) + \hat{\beta}_2(T_k)dW_2(t)$$

$$[\text{HJM모형 C}] \quad df(t, t + T_k) = \hat{\alpha}(T_k)dt + \hat{\beta}_1(T_k)dW_1(t) + \hat{\beta}_2(T_k)dW_2(t) + \hat{\beta}_3(T_k)dW_3(t)$$

여기서  $\hat{\beta}_j(T_k)$ 는  $\hat{\beta}_j$ 의 제  $k$  번째 원소이다.

Avellaneda and Laurence(1999, pp. 245-246)는 다음과 같은 2요인 HJM모형을 사용할 것을 제안하였다.

$$[\text{HJM모형 AL}] \quad df(t, t + T_k) = \alpha(T_k)dt + \beta_1^{AL}(T_k)dW_1(t) + \beta_2^{AL}(T_k)dW_2(t)$$

여기서  $\beta_1^{AL}(\tau)$ 와  $\beta_2^{AL}(\tau)$ 는 식 (4.17)에서 정의된 평활한 비선형함수들이다. 최소제곱추정법을 적용해서, 이 함수들을 추정한 결과는 다음과 같다.

$$(6.4) \quad \hat{\beta}_1^{AL}(\tau) = 0.0000 \times 10^{-3} \exp(0.5625\tau)$$

$$(6.5) \quad \hat{\beta}_2^{AL}(\tau) = 0.0069[1 - 2\exp(0.0128\tau)]$$

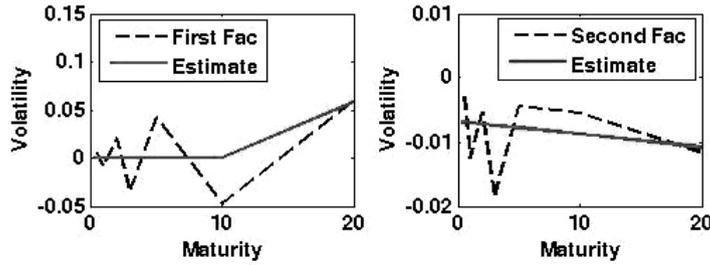
또한, 다음 식들이 성립한다.

$$(6.6) \quad \frac{\sum_{k=1}^8 [\hat{\beta}_1^{AL}(T_k) - \hat{\beta}_1(T_k)]^2}{\sum_{k=1}^8 [\hat{\beta}_1(T_k)]^2} = 0.6205$$

$$(6.7) \quad \frac{\sum_{k=1}^8 [\hat{\beta}_2^{AL}(T_k) - \hat{\beta}_2(T_k)]^2}{\sum_{k=1}^8 [\hat{\beta}_2(T_k)]^2} = 0.3044$$

즉,  $\hat{\beta}_1$ 의 총변동량 중에서  $\hat{\beta}_1^{AL}$ 으로 설명할 수 없는 부분이 62.05%이고,  $\hat{\beta}_2$ 의 총변동량 중에서  $\hat{\beta}_2^{AL}$ 로 설명할 수 없는 부분이 30.44%이다. <그림 10>에서 좌측 그래프는  $\hat{\beta}_1$ 과  $\hat{\beta}_1^{AL}$  그리고 우측 그래프는  $\hat{\beta}_2$ 와  $\hat{\beta}_2^{AL}$ 를 그린 것이다.

Avellaneda and Laurence는 변동성함수  $\beta_1^{AL}(\tau)$ 는 모든 선도이자율들이 같은 방향으로 움직



〈그림 10〉 HJM模型 AL의 變動性

직이는 정보, 즉 평행이동(shift)을 나타내고, 변동성함수  $\beta_2^{AL}(\tau)$ 는 선도이자율들이 경사(tilt)를 나타낸다고 해석했다. 만일 식  $|\kappa_1| \ll |\kappa_2|$ 가 성립하면, 그러한 해석이 가능하다. 그러나 함수  $\log \beta_1(\tau)$ 는 기울기가  $-\kappa_1$ 인 직선이므로,  $\beta_1^{AL}(\tau)$ 는 평행이동을 나타낸다고보다는 경사를 나타낸다고 할 수 있다. 더구나  $|\kappa_2|$ 가 아주 작은 경우가 아니라면, Taylor근사를 적용해서  $\beta_2^{AL}(\tau)$ 를  $\tau$ 의 이차함수로 해석하는 것이 타당하다. 즉,  $\beta_2^{AL}(\tau)$ 는 곡률을 나타낸다고 할 수 있다. 따라서, 식 (4.18)에서 정의한 함수들을 다음과 같이 해석할 수 있다. 첫 번째 주성분에 해당하는 변동량함수  $\beta_1^{AC}(\tau)$ 는 평행이동을, 두 번째 주성분에 해당하는 변동량함수  $\beta_2^{AC}(\tau)$ 는 추세를 그리고 세 번째 변동량함수  $\beta_3^{AC}(\tau)$ 는 곡률을 나타낸다. 다음과 같은 3요인 HJM모형을 고려해보자.

$$[\text{HJM모형 AC}] \quad df(t, t+T_k) = \alpha(T_k)dt + \beta_1^{AC}(T_k)dW_1(t) + \beta_2^{AC}(T_k)dW_2(t) + \beta_3^{AC}(T_k)dW_3(t)$$

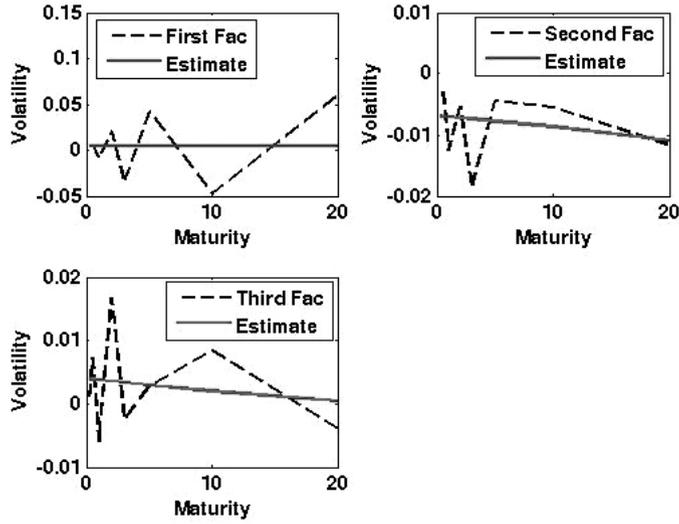
최소제곱추정법을 적용해서, 이 변동성함수들을 추정한 결과는 다음과 같다.

$$(6.8) \quad \hat{\beta}_1^{AC}(\tau) = 0.0048$$

$$(6.9) \quad \hat{\beta}_2^{AC}(\tau) = -0.0069\exp(0.0230\tau)$$

$$(6.10) \quad \hat{\beta}_3^{AC}(\tau) = -0.0040[1 - 2\exp(-0.0293\tau)]$$

또한, 다음 식들이 성립한다.



〈그림 11〉 HJM模型 AC의 變動性

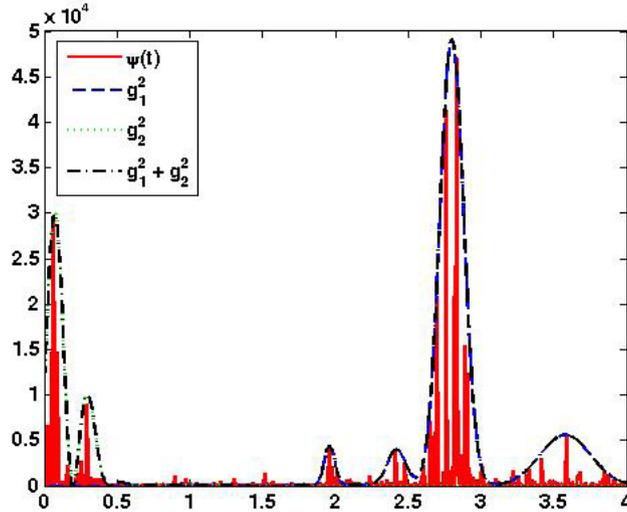
$$(6.11) \quad \frac{\sum_{k=1}^8 [\hat{\beta}_1^{AC}(T_k) - \hat{\beta}_1(T_k)]^2}{\sum_{k=1}^8 [\hat{\beta}_1(T_k)]^2} = 0.9801$$

$$(6.12) \quad \frac{\sum_{k=1}^8 [\hat{\beta}_2^{AC}(T_k) - \hat{\beta}_2(T_k)]^2}{\sum_{k=1}^8 [\hat{\beta}_2(T_k)]^2} = 0.3042$$

$$(6.13) \quad \frac{\sum_{k=1}^8 [\hat{\beta}_3^{AC}(T_k) - \hat{\beta}_3(T_k)]^2}{\sum_{k=1}^8 [\hat{\beta}_3(T_k)]^2} = 0.8264$$

즉,  $\hat{\beta}_1$ 의 총변동량 중에서  $\hat{\beta}_1^{AC}$ 으로 설명할 수 없는 부분이 98.01%이고,  $\hat{\beta}_2$ 의 총변동량 중에서  $\hat{\beta}_2^{AC}$ 로 설명할 수 없는 부분이 30.42%이며,  $\hat{\beta}_3$ 의 총변동량 중에서  $\hat{\beta}_3^{AC}$ 로 설명할 수 없는 부분이 82.64%이다. 〈그림 11〉에서 좌상 그래프는  $\hat{\beta}_1$ 과  $\hat{\beta}_1^{AC}$ , 우상 그래프는  $\hat{\beta}_2$ 와  $\hat{\beta}_2^{AC}$  그리고 좌하 그래프는  $\hat{\beta}_3$ 와  $\hat{\beta}_3^{AC}$ 를 그린 것이다.

지금까지는 변동성의 정상적 부분  $\tilde{\beta}_j(T-t)$ 를 추정하였다. 다음 단계로 비정상적 부분



〈그림 12〉包絡線

$g(t)$ 를 추정하기로 하자. 〈그림 12〉에는 시계열  $\{\psi(t)\}$ 가 실선으로 그려져 있다. 〈그림 12〉에서 알 수 있듯이,  $g_1^2(t) + g_2^2(t)$ 를  $\psi(t)$ 의 포락선(envelope)이라 할 수 있다. 시행착오를 거쳐서  $g_1^2(t)$ 와  $g_2^2(t)$ 를 각각 다음과 같이 추정하였다.

$$(6.14) \quad \begin{aligned} \tilde{g}_1^2(t) = & 9840n(t; 2.8, 0.08^2) + 2408n(t; 3.58, 0.172^2) \\ & + 640n(t; 2.42, 0.064^2) + 396n(t; 1.96, 0.036^2) \end{aligned}$$

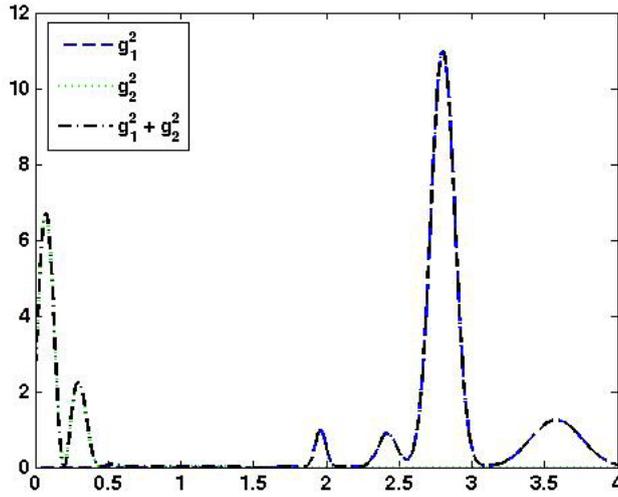
$$(6.15) \quad \tilde{g}_2^2(t) = 12000n(t; 0.072, 0.16^2)\cos^2(4\pi[t - 0.072])$$

여기서  $n(\cdot; \mu, \sigma^2)$ 는 평균이  $\mu$ 이고 분산이  $\sigma^2$ 인 정규확률밀도함수이다. 〈그림 12〉에는 시계열  $\{\tilde{g}_1^2(t)\}$ 가 긴점선으로, 시계열  $\{\tilde{g}_2^2(t)\}$ 가 점선으로 그리고 시계열  $\{\tilde{g}_1^2(t) + \tilde{g}_2^2(t)\}$ 가 반직선으로 그려져 있다.

HJM모형들 A, B, C, AL 그리고 AC에서 다음 식들이 성립한다.

$$(6.16) \quad g_1(t) \equiv 1 \equiv g_2(t), \quad (0 \leq t < 4)$$

따라서, 다음 식들이 성립한다.



〈그림 13〉 推定函數들  $\{\hat{g}_1^2(t)\}$ 와  $\{\hat{g}_2^2(t)\}$

$$(6.17) \quad \int_0^4 g_1^2(t)dt = \int_0^4 g_2^2(t)dt = 4$$

식 (6.17)에서 알 수 있듯이, 앞에서 추정한  $\hat{g}_1^2(t)$ 와  $\hat{g}_2^2(t)$ 를 시간구간  $[0, 4]$ 에서 적분값들이 각각 4가 되도록 표준화할 필요가 있다. 즉,  $g_1(t)$ 와  $g_2(t)$ 를 다음과 같이 추정하자.

$$(6.18) \quad \hat{g}_1(t) = \frac{2}{\sqrt{\int_0^4 \tilde{g}_1^2(u)du}} \tilde{g}_1(t), \quad \hat{g}_2(t) = \frac{2}{\sqrt{\int_0^4 \tilde{g}_2^2(u)du}} \tilde{g}_2(t)$$

〈그림 13〉에는 시계열  $\{\hat{g}_1^2(t)\}$ 가 긴점선으로, 시계열  $\{\hat{g}_2^2(t)\}$ 가 점선으로 그리고 시계열  $\{\hat{g}_1^2(t) + \hat{g}_2^2(t)\}$ 가 반직선으로 그려져 있다.

식 (4.26)을 바탕으로 다음과 같은 1요인 HJM모형들과 2요인 HJM모형들을 고려해보자.

[HJM모형 D]  $df(t, t + T_k) = \hat{\alpha}(T_k)dt + \hat{\beta}_1(T_k)\hat{g}_1(t)dW_1(t)$

[HJM모형 E]  $df(t, t + T_k) = \hat{\alpha}(T_k)dt + \hat{\beta}_1(T_k)[\hat{g}_1^2(t) + \hat{g}_2^2(t)]^{1/2}dW_1(t)$

[HJM모형 F]  $df(t, t + T_k) = \hat{\alpha}(T_k)dt + \hat{\beta}_1(T_k)\hat{g}_1(t)dW_1(t) + \hat{\beta}_2(T_k)\hat{g}_2(t)dW_2(t)$

부등식  $T \geq t$ 가 항상 성립해야 하므로, 정리 2의  $\varphi(T)$  대신에  $\varphi(T-t)$ 를 사용하는 것이 편

리하다. 이를 바탕으로 다음 HJM모형을 고려할 수 있다.

$$[\text{HJM모형 CC}] \quad df(t, t + T_k) = \hat{\alpha}(T_k)dt + \hat{\beta}_1(T_k)[\hat{g}_1(t)dW_1(t) + \hat{g}_2(t)dW_2(t)]$$

지금까지는  $g_1(t)$ 와  $g_2(t)$ 가 평활한 함수들이라고 가정하였다. 이러한 가정을 하지 않는다면, 주어진 데이터에 충실한 다음과 같은 HJM모형을 고려할 수 있다.

$$[\text{HJM모형 G}] \quad df(t, t + T_k) = \hat{\alpha}(T_k)dt + \hat{\beta}_1(T_k)\sqrt{\psi(t)}dW_1(t)$$

정리 1을 바탕으로 다음과 같은 Ritchken-Sankarasubramanian-Inui-Kijima류 HJM모형들을 고려해보자.

$$[\text{HJM모형 RS}] \quad df(t, t + T_k) = \hat{\alpha}(T_k)dt + \sigma_1 f^\alpha(t, T_1)dW_1(t) + \sigma_2 f^\beta(t, T_1)\exp(-\kappa T_k)dW_2(t)$$

$$[\text{HJM모형 IK}] \quad df(t, t + T_k) = \hat{\alpha}(T_k)dt + 0.01 \sqrt{\frac{f(t, T_1)}{f(0, T_1)}} dW_1(t) \\ + 0.01 \sqrt{\frac{f(t, T_1)}{f(0, T_1)}} \exp(-\kappa T_k) dW_2(t)$$

Inui and Kijima(1998)는 HJM모형 RS에서 순간선도이자율  $f(t, t + T_1)$ 이 아닌 순간현물이자율  $r_t$ 를 사용하고,  $\kappa$ 값을 0.05로 고정하고,  $(\alpha, \beta)$ 가  $(0, 0)$ ,  $(0, 0.5)$ ,  $(0.5, 0)$  그리고  $(0.5, 0.5)$ 인 네 가지 경우만을 다루었다. 이론적으로 말하면, 정리 1을 적용하기 위해서는 시점  $t$ 에서 순간현물이자율  $r_t$ 를 알아야 한다. 그러나 순간현물이자율은 시장에서 직접 관찰되는 것이 아니라 채권가격 등에서 간접적으로 유도되는 이론값이다. 따라서, 연관된 금융상품의 가치평가에 순간현물이자율이 꼭 필요한 경우가 아니라면, 순간현물이자율  $r_t$  대신에 시장에서 관찰할 수 있는 현물이자율  $R(t, t + T_1)$ 이나 순간선도이자율  $f(t, t + T_1)$ 을 사용하는 것이 실용적이다. 본 논문에서는 선도이자율데이터로부터 HJM모형 RS의 모수들  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  그리고  $\kappa$ 를 추정하기로 한다. HJM모형 RS로부터 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$(6.19) \quad \frac{Var(df(t, t + T_k) - \hat{\alpha}(T_k)dt)}{dt} = [\sigma_1 f^\alpha(t, T_1)]^2 + [\sigma_2 f^\beta(t, T_1)\exp(-\kappa T_k)]^2$$

따라서, 다음 제곱합  $S$ 를 최소화하는 추정량들을 구하기로 하자.

$$(6.20) \quad S \doteq \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^8 \{ \psi_{n,k} - [f^\alpha(n\Delta t, T_1)]^2 \sigma_1^2 - [f^\beta(n\Delta t, T_1) \exp(-\kappa T_k)]^2 \sigma_2^2 \}^2$$

여기서  $\psi_{n,k}$ 는 다음과 같다.

$$(6.21) \quad \psi_{n,k} \doteq \left[ \frac{\Delta f_{n,k} - \hat{\alpha}(T_k) \Delta t}{\sqrt{\Delta t}} \right]^2$$

MATLAB함수 lsqnonlin에 초기벡터 [5 5 5 0.5 0]을 사용해서 제곱합  $S$ 를 최소화하면, 다음 변동성모형을 얻는다.

$$(6.22) \quad df(t, t+T_k) = \hat{\alpha}(T_k) dt + 4.2999 f^{6.6856}(t, T_1) dW_1(t) \\ + 0.1270 f^{0.5007}(t, T_1) \exp(0.0395 T_k) dW_2(t)$$

Inui and Kijima(1998)가 다룬 4 HJM모형들 중의 하나가 HJM모형 IK이다. 여기서  $(\alpha, \beta)$ 가 (0.5, 0.5)인 모형을 사용하는 이유는 이 경우에 선도이자율이 음수가 되지 않기 때문이다. 다음 식이 성립한다.

$$(6.23) \quad 0.01 \sqrt{\frac{1}{f(0, T_1)}} = 0.049543$$

HJM모형 IK로부터 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$(6.24) \quad \frac{[df(t, t+T_k) - \hat{\alpha}(T_k) dt]^2}{dt} = 0.0495^2 f(t, T_1) [1 + \exp(-2\kappa T_k)]$$

앞에서와 동일하게 최소제곱추정법을 적용하면, 다음 변동성모형을 얻는다.

$$(6.25) \quad df(t, t+T_k) = \hat{\alpha}(T_k) dt \\ + 0.0495 \sqrt{f(t, T_1)} [dW_1(t) + \exp(0.0859 T_k) dW_2(t)]$$

### 7. 시뮬레이션

제6장에서는 HJM모형들 A~G, AL, AC, CC, RS 그리고 IK를 정의했다. 이 장에서는 모의실험을 통해서 이 12개 HJM모형들의 적합성을 비교해보자. HJM모형 X가 다음 확률미분방정식을 만족한다고 하자.

$$(7.1) \quad df^X(t, t + T_k) = x(t, t + T_k)$$

여기서  $f^X$ 는 HJM모형 X를 따르는 순간선도이자율이다. 다음 식이 성립한다.

$$(7.2) \quad f_{n+1,k}^X = f_{n,k}^X + x_{n,k}$$

여기서  $f_{n,k}^X$ 와  $x_{n,k}$ 는 각각 다음과 같다.

$$(7.3) \quad f_{n,k}^X \doteq f^X(n\Delta t, n\Delta t + T_k), \quad x_{n,k} \doteq x(n\Delta t, T_k + n\Delta t)$$

따라서, 다음 식들이 성립한다.

$$(7.4) \quad f_{n,k}^X = f(0, T_k) + \sum_{l=0}^{n-1} x_{l,k}$$

$$(7.5) \quad f_{n,k} = f(0, T_k) + \sum_{l=0}^{n-1} \Delta f_{l,k}$$

다음 변수를 정의하자.

$$(7.6) \quad d_{n,k}^X \doteq f_{n,k} - f_{n,k}^X$$

식 (7.4)-식 (7.6)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$(7.7) \quad d_{n,k}^X = \sum_{l=0}^{n-1} [\Delta f_{l,k} - x_{l,k}]$$

HJM모형 X의 적합성을 비교하기 위해서는  $N \times K$  행렬  $D^X \doteq [d_{n,k}^X]$ 의 노름(norm)을 사용할 필요가 있다. 가장 보편적으로 사용되는 행렬노름은 스펙트럴노름(spectral norm)이다. 행렬  $D^X$ 의 특이값분해(singular value decomposition)에서 가장 큰 특이값이 행렬  $D^X$ 의 스펙트럴노름  $\|D^X\|_{sp}$ 이다. 특이값분해에 대한 자세한 내용은 최병선(2007, p. 525)를 참조하라.

HJM모형들을 비교하기 위해서 다음과 같은 단계들로 구성된 모의실험분석을 하기로 하자.

(1단계) 선도이자울곡선에서  $N \times K$  행렬  $\Delta F \doteq [\Delta f(n\Delta t, n\Delta t + T_k)]$ 를 발생시킨다.

(2단계) 각  $m(= 1, 2, \dots, M)$ 에 대해서, 다음과 같은 과정을 수행한다. 여기서  $M$ 은 모의실험 회수이다.

(2.1) 표준정규분포에서  $N \times 3$ 개의 정규난수(normal random number)들을 발생시킨 다음 각 정규난수에  $\sqrt{\Delta t}$ 를 곱하여, Brown운동의 표본경로(sample path)들을 3개 발생시킨다. 이 표본경로들이 각각  $\{W_1(t)\}$ ,  $\{W_2(t)\}$  그리고  $\{W_3(t)\}$ 이다.

(2.2) 이렇게 발생시킨 표본경로들을 사용해서, HJM모형 X로부터  $N \times K$  행렬  $X_m \doteq [x_{n,k}]$ 를 발생시킨다.

(2.3) 제1단계에서 구한  $\Delta F$ 와 제2단계에서 구한  $X_m$ 을 이용해서  $N \times K$  행렬  $D_m^X \doteq [d_{n,k}^X]$ 를 계산한다. 행렬  $D_m^X$ 의 스펙트럴노름  $\|D_m^X\|_{sp}$ 를 구한다.

(3단계) 제2단계에서 구한  $\{\|D_m^X\|_{sp} \mid m = 1, 2, \dots, M\}$ 의 표본평균  $\bar{D}_{sp}^X$ 와 표본표준편차  $sd(D_{sp}^X)$ 를 구한다. 또한, 다음과 같은  $\{f_{n,k}\}$ 와  $\{f_{n,k}^X\}$  사이의 평균거리  $\bar{d}^X$ 를 계산한다.

$$\bar{d}^X \doteq \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sqrt{\frac{1}{NK} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^K [f_{n,k} - f_{n,k}^X]^2}$$

모의실험회수  $M$ 이 100,000인 경우, 각 HJM모형의 스펙트럴노름의 표본평균과 표본표준편차 그리고 평균거리는 <表 3>과 같다.

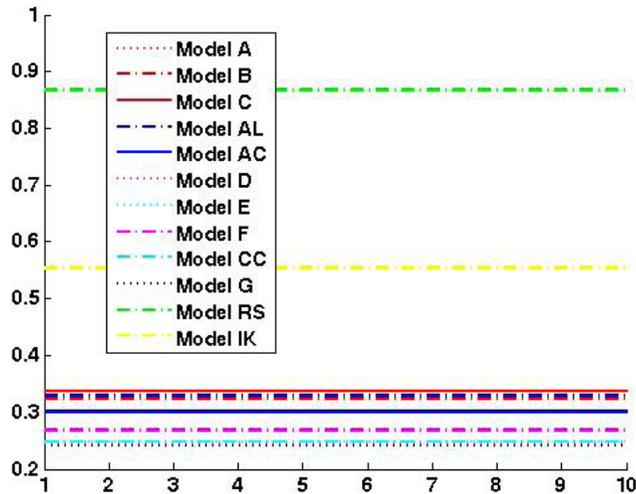
모의실험회수  $M$ 에 대한 스펙트럴노름의 표본평균의 안정성을 조사하기 위해  $M$ 을 1만부터 1만씩 10만까지 증가시킨 결과가 <그림 14>에 수록되어 있다. <그림 14>에서 X축의 값에  $10^5$ 을 곱한 값이 모의실험회수  $M$ 이다.

<表 3>과 <그림 14>로부터 다음과 같은 성질들을 알 수 있다.

첫째, 모의실험회수  $M$ 이 1만 이상인 경우에 모의실험회수는 실험결과에 유의적인 영향을 미치지 못한다.

〈表 3〉 스펙트럴노름의 標本平均과 標本標準偏差 그리고 平均距離

모형(X)	요인 개수	$\bar{D}_{sp}^X$	$sd(D_{sp}^X)$	$\bar{d}^X$
A	1	0.24881	0.00201	0.002783
B	2	0.32502	0.00606	0.003645
C	3	0.33770	0.00649	0.003787
AL	2	0.32980	0.00624	0.003699
AC	3	0.30097	0.00515	0.003367
D	1	0.24681	0.00306	0.002761
E	1	0.24886	0.00332	0.002784
F	2	0.26855	0.00513	0.003004
CC	2	0.24886	0.00332	0.002784
G	1	0.24198	0.00028	0.002707
RS	2	0.86673	0.02007	0.009695
IK	2	0.55393	0.01252	0.006196



〈그림 14〉 模擬實驗回數와 標本平均

둘째, 요인의 개수가 커질수록 스펙트럴노름의 표본평균이 커지는 경향이 있다. 예를 들어, HJM모형 C는 HJM모형 B를 포함하고 HJM모형 B는 HJM모형 A를 포함한다. 따라서, 스펙트럴노름들의 표본평균들 사이에 다음 관계가 성립하는 것은 당연하다.

$$\bar{D}_{sp}^A < \bar{D}_{sp}^B < \bar{D}_{sp}^C$$

이는 HJM모형에 새로운 Brown운동이 추가될 때마다 그 HJM모형의 전체 변동성이 증가하기 때문이다.

셋째, 1요인 HJM모형들 A, D, E 그리고 G에서 스펙트럴노름들의 표본평균들의 차이는 미미하지만, 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\bar{D}_{sp}^G < \bar{D}_{sp}^D < \bar{D}_{sp}^A < \bar{D}_{sp}^E$$

변동성의 평활성을 가정하지 않는 HJM모형 G의 표본평균이 가장 작다. 이는 평활성을 포기하는 데 대한 대가로 해석할 수 있다. 그러나 시점  $t$ 에 대해서 변동성이 평활하지 않으면, 즉 불연속이거나 미분불가능하면, 이자율에 민감한 금융상품의 가치평가에서 많은 문제가 발생한다. 변동성이 잔여기간에만 의존한다고 가정하는 HJM모형 A보다 잔여기간과 더불어 시점  $t$ 에도 의존하는 HJM모형 D의 스펙트럴노름이 작다.

넷째, 2요인 HJM모형들 B, AL, AC, F, CC, RS 그리고 IK에서 스펙트럴노름들의 표본평균들은 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\bar{D}_{sp}^{CC} < \bar{D}_{sp}^F < \bar{D}_{sp}^B < \bar{D}_{sp}^{AL} < \bar{D}_{sp}^{IK} < \bar{D}_{sp}^{RS}$$

이 중에서 HJM모형 RS의 표본평균이 가장 크고, 그다음이 HJM모형 IK의 표본평균이다. 따라서, Markov성을 고려한다 해도 한국국채의 수익률을 분석하는데 이 HJM모형 RS나 HJM모형 IK가 적합하다고 할 수는 없다. HJM모형 AL은 HJM모형 B에서 구한 변동성이 평활한 함수라는 가정을 추가한 것이고, HJM모형 AL의 스펙트럴노름이 HJM모형 B의 것보다 크다. 변동성이 잔여기간에만 의존한다고 가정하는 HJM모형 B보다 잔여기간과 더불어 시점  $t$ 도 의존하는 HJM모형 F나 HJM모형 CC의 스펙트럴노름이 작다. 특히, 정리 2를 바탕으로 하는 HJM모형 CC의 스펙트럴노름의 표본평균은 HJM모형 B에 비해 약 76%가량이다.

다섯째, HJM모형 AL에서는 첫 번째 변동성  $\beta_1^{AL}(\tau)$ 을 평행이동으로 그리고 두 번째 변동성  $\beta_2^{AL}(\tau)$ 는 경사로 해석한다. 반면에, HJM모형 AC에서는 첫 번째 변동성  $\beta_1^{AC}(\tau)$ 를 수준으로, 두 번째 변동성  $\beta_2^{AC}(\tau)$ 를 추세로 그리고 세 번째 변동성  $\beta_3^{AC}(\tau)$ 를 곡률로 해석한다. 이 2요인 HJM모형 AL의 스펙트럴노름의 표본평균은 0.32980이고, 3요인 HJM모형 AC의 스펙트럴노름의 표본평균은 0.30097이다. 즉, 다음 관계가 성립한다.

$$\bar{D}_{sp}^{AC} < \bar{D}_{sp}^{AL}$$

따라서, 주성분분석의 보편적 해석을 바탕으로 하는 HJM모형 AC가 Avellaneda and Laurence(1999)의 해석을 바탕으로 하는 HJM모형 AL보다 더 좋은 결과를 보여준다.

여섯째, 주어진  $f_{n,k}$ 를 각 모의실험에서 발생하는  $f_{n,k}^X$ 의 평균으로 간주하면,  $\{f_{n,k}\}$ 와  $\{f_{n,k}^X\}$  사이의 평균거리  $\bar{d}^X$ 를  $f_{n,k}^X$ 의 표준편차로 생각할 수 있다. <表 3>에서 알 수 있듯이, HJM모형 RS와 HJM모형 IK를 제외하고는 각 HJM모형의 평균거리  $\bar{d}^X$ 는 0.004 미만이다.

## 8. 結 論

순간현물이자율과는 달리 순간선도이자율은 할인곡선 또는 일드곡선으로부터 직접 구할 수 있다. 또한, 선도이자율과정을 상태변수로 하는 HJM모형에서는 무재정조건을 명시할 수 있다. 따라서, 순간현물이자율 대신에 순간선도이자율의 동적특성을 나타내는 것이 이자율에 민감한 금융상품의 가치를 평가하는데 유리하다. 본 논문에서는 2006년 1월 26일부터 2010년 2월 4일까지 만기가 3개월, 6개월, 12개월, 2년, 3년, 5년, 10년 그리고 20년 인 한국국채들의 선도이자율곡선에 12개 HJM모형들을 적합 시켰다. 그 결과, 변동성이 잔여기간에만 의존한다고 가정하는 HJM모형들보다 변동성이 잔여기간뿐 아니라 시점  $t$ 에도 의존한다고 가정하는 HJM모형들이 한국국채의 선도이자율곡선을 더 잘 나타냄을 알 수 있다. Carverhill정리의 오류를 수정하여 순간현물이자율과정이 Markov성을 갖도록 하는 조건을 제시한 것이 정리 2이다. 정리 2를 바탕으로 하는 새로운 HJM모형 CC가 본 논문에서 다룬 2요인 HJM모형들 중에서 한국국채의 선도이자율곡선을 가장 잘 나타냄을 알 수 있다. 또한, 주성분분석의 결과로 얻어진 변동성에 평활한 함수를 적합 시키는 2요인 HJM모형 AL보다 새로이 제시한 3요인 HJM모형 AC가 더 한국국채의 선도이자율곡선을 잘 나타내고 있다. 또한, 전자보다는 후자에 대해 계량경제학적으로 그리고 재무적으로 더 타당한 해석을 할 수 있다.

앞에서도 언급했듯이, Avellaneda and Laurence(1999, pp. 224-225)는 선도이자율곡선이 구분상수함수라는 가정하에 붓스트랩법을 적용해서 선도이자율곡선을 구하였다. 이렇게 구한 선도이자율곡선은 각 만기시점에서 불연속이다. 본 논문에서는 붓스트랩과정에서 선도이자율곡선이 연속인 구분선형함수라고 가정하고, 선형보간을 사용하였다. 이렇게 구한 선도이자율곡선은 각 만기시점에서 미분이 가능하지 않다. 선도이자율곡선이 어떤 시점에서 점프(미분불가능)하면 같은 시점에서 현물이자율곡선이 점프(미분불가능)함을 증명할

수 있다. 따라서, 평활하지 않은 선도이자율곡선을 바탕으로 이자율파생상품의 가치를 평가하면, 원자산인 현물이자율의 내재변동성이 과다하게 커져서 이자율파생상품의 가치를 잘못 평가하게 된다. 더구나, 선도이자율곡선이 평활하지 않다는 것은 이 선도이자율곡선을 추정하는데 사용되는 일드곡선 또는 스왑율곡선이 해당 만기시점에서 점프하거나 미분이 불가능하다는 것이다. 따라서, 해당 만기시점에서 채권들로 구성된 포트폴리오의 가치가 인위적으로 크게 변동한다는 것이다. 이러한 변동은 포트폴리오가치 자체의 변화가 아닌 선도이자율곡선을 추정하는데 사용된 방법에 기인하는 것이다. 따라서, 선도이자율곡선을 추정하는 데는 3차 스플라인과 같이 각 만기시점에서 연속이며 미분가능한 함수를 사용하는 것이 타당할 것이다. 그러나 아직은 증장기채권의 만기일드에 관한 데이터가 충분히 누적되지 않는 한국국채의 이자율데이터에 3차 스플라인과 같이 모수들의 개수가 많은 기간구조모형을 적합 시키는 것은 무리라고 생각한다. 이는 향후 한국채권시장의 발전과 더불어 해결해야 할 문제라고 생각한다.

서울대학교 經濟學部

151-746 서울특별시 관악구 관악로 599

전화: (02)880-6394

팩스: (02)886-4231

Email: bschoi12@snu.ac.kr

### 〈附錄〉 Carverhill정리의 오류와 정리 2의 증명

첫째, Carverhill(1994)의 명제 2.2(Proposition 2.2)의 증명에 오류가 있음을 보이기로 하자. Carverhill에 따라, 각  $j(= 1, 2, \dots, J)$ 에 대해 다음 식을 만족하는 양의 결정적 함수들  $\zeta_j(\cdot)$ 와  $\psi_j(\cdot)$ 가 존재한다고 가정하자.

$$(A.1) \quad \beta_j(u, v) = \zeta_j(u)\psi_j(v)$$

여기서  $\zeta_j$ 와  $\psi_j$ 는 항상 양이고 결정적 함수들이다. 다음 식이 성립한다.

$$(A.2) \quad dr_t = dy(t) + p(t)dt$$

여기서  $dy(t)$ 와  $p(t)$ 는 각각 다음과 같다.

$$(A.3) \quad dy(t) \doteq \left\{ \frac{\partial}{\partial t} f(0,t) + \sum_{j=1}^J \int_0^t \xi_j^2(u) \left[ \psi_j'(t) \int_u^t \psi_j(s) ds + \psi_j^2(t) \right] du \right\} dt + \sum_{j=1}^J \xi_j(t) \psi_j(t) dW_j^Q(t)$$

$$(A.4) \quad p(t) \doteq \sum_{j=1}^J \psi_j'(t) \int_0^t \xi_j(u) dW_j^Q(u)$$

확산과정  $\{y(t)\}$ 는 Markov성을 갖는다. 따라서,  $p(t)$ 가  $t$ 와  $r_t$ 의 함수이면, 순간현물이자율과정  $\{r_t\}$ 는 Markov성을 갖는다. Carverhill은 이 성질을 증명했다고 주장했으나, 그 증명에는 오류가 있다. 다음 식이 성립함을 자명하다.

$$(A.5) \quad \psi_j'(t) \int_0^t \xi_j(u) dW_j^Q(u) = \frac{\psi_j'(t)}{\psi_j(t)} \int_0^t \psi_j(t) \xi_j(u) dW_j^Q(u)$$

따라서, 다음 식이 성립한다.

$$(A.6) \quad \sum_{j=1}^J \psi_j'(t) \int_0^t \xi_j(u) dW_j^Q(u) = \sum_{j=1}^J \frac{\psi_j'(t)}{\psi_j(t)} \int_0^t \psi_j(t) \xi_j(u) dW_j^Q(u)$$

Carverhill은 식 (5.5)를 식 (A.6)에 적용하면, 다음 식을 얻을 수 있다고 기술하고 있다.

$$(A.7) \quad \sum_{j=1}^J \psi_j'(t) \int_0^t \xi_j(u) dW_j^Q(u) = \sum_{j=1}^J \frac{\psi_j'(t)}{\psi_j(t)} \left[ r_t - f(0,t) - \psi_j(t) \int_0^t \xi_j^2(u) \int_u^t \psi_j(s) ds du \right]$$

식 (A.7)은 Carverhill의 명제 2.1(Proposition 2.1)의 (i)를 달리 표현한 것이다. 그러나 식 (A.6)으로부터 식 (A.7)을 유도하기 위해서는 각  $j(= 1, 2, \dots, J)$ 에 대해 다음 식이 성립해야 한다는 조건을 필요로 한다.

$$(A.8) \quad \int_0^t \psi_j(t) \xi_j(u) dW_j^Q(u) = r_t - f(0, t) - \psi_j(t) \int_0^t \xi_j^2(u) \int_u^t \psi_j(s) ds du$$

식 (5.5)와 식 (A.8)은 동일하지가 않다. 식 (A.8)은  $J = 1$ 인 경우에 한해서 성립하는 것이다. 즉, Carverhill은  $J$ 가 2 이상인 경우에  $p(t)$ 가  $t$ 와  $r_t$ 만의 함수임을 증명하지 못했다. 따라서, 분리성조건 (A.1)이 만족되어도 순간현물이자율과정이 Markov성을 갖는다고 할 수 없다.

둘째, 정리 2를 증명하기로 하자. 정리 2에서는 각  $j (= 1, 2, \dots, J)$ 에 대해 다음 식을 만족하는 양의 결정적 함수들  $\zeta_j(\cdot)$ 와  $\psi(\cdot)$ 가 존재한다고 가정한다.

$$(A.9) \quad \beta_j(u, v) = \zeta_j(u) \psi(v)$$

HJM무재정조건에 의해서, 다음 식이 성립한다.

$$(A.10) \quad \alpha_j(u, v) = \xi_j^2(u) \psi(v) \int_u^v \psi(s) ds$$

다음 식이 성립한다.

$$(A.11) \quad dr_t = dz(t) + q(t) dt$$

여기서  $dz(t)$ 와  $q(t)$ 는 각각 다음과 같다.

$$(A.12) \quad dz(t) \doteq \left\{ \frac{\partial}{\partial t} f(0, t) + \sum_{j=1}^J \int_0^t \xi_j^2(u) \left[ \psi'(t) \int_u^t \psi(s) ds + \psi^2(t) \right] du \right\} dt + \sum_{j=1}^J \psi(t) \xi_j(t) dW_j^Q(t)$$

$$(A.13) \quad q(t) \doteq \sum_{j=1}^J \psi'(t) \int_0^t \xi_j(u) dW_j^Q(u)$$

확산과정  $\{z(t)\}$ 는 Markov성을 갖는다. 만일  $q(t)$ 가  $t$ 와  $r_t$ 의 함수이면, 식 (A.11)에서 알 수 있듯이 순간현물이자율과정  $\{r_t\}$ 는 Markov성을 갖는다. 다음 식이 성립함은 자명하다.

$$(A.14) \quad \sum_{j=1}^J \psi'(t) \int_0^t \xi_j(u) dW_j^Q(u) = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} \sum_{j=1}^J \int_0^t \psi(t) \xi_j(u) dW_j^Q(u)$$

식 (5.4), 식 (A.9) 그리고 식 (A.10)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$(A.15) \quad \begin{aligned} & \sum_{j=1}^J \int_0^t \psi(t) \xi_j(u) dW_j^Q(u) \\ & = r_t - f(0,t) - \sum_{j=1}^J \psi(t) \int_0^t \xi_j^2(u) \int_u^t \psi(s) ds du \end{aligned}$$

식 (A.15)를 식 (A.14)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$(A.16) \quad \begin{aligned} & \sum_{j=1}^J \psi'(t) \int_0^t \xi_j(u) dW_j^Q(u) \\ & = \sum_{j=1}^J \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} \left[ r_t - f(0,t) - \sum_{j=1}^J \psi(t) \int_0^t \xi_j^2(u) \int_u^t \psi(s) ds du \right] \end{aligned}$$

식 (A.16)의 우변은  $t$ 와  $r_t$ 의 함수이다. 즉,  $q(t)$ 는  $t$ 와  $r_t$ 의 함수이다. 따라서, 순간현물이자율 과정  $\{r_t\}$ 는 Markov성을 갖는다.

### 參 考 文 獻

이병근 · 현정순(2002): “Heath-Jarrow-Morton HJM모형을 이용한 우리나라 이자율 기간구조 추정,” 한국은행, 『경제분석』, 8, 2, 56-80.

최병선(2007): 『계산재무론』, 세경사.

\_\_\_\_\_(2011): 『금융공학 2: Black-Scholes Formula and Beyond』, 세경사, forthcoming.

Avellaneda, M., and P. Laurence(1999): *Quantitative Modeling of Derivative Securities: From Theory to Practice*, Boca Raton, Chapman & Hall/CRC.

Brigo, D., and F. Mercurio(2007): *Interest Rate Models-Theory and Practice*, Second ed., Berlin, Springer.

Carverhill, A. P.(1994): “When is the Short Rate Markovian?” *Mathematical Finance*, 4, October, 305-312.

Choi, B. S.(1992): *ARMA Model Identification*, New York, Springer.

- Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton(1992): "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation," *Econometrica*, **60**, 77-105.
- Hull, J. C., and A. White(1990): "Pricing Interest Rate Derivative Securities," *Review of Financial Studies*, **3**, 573-592.
- Inui, K., and M. Kijima(1998): "A Markovian Framework in Multi-Factor Heath-Jarrow-Morton Models," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **33**, September, 423-440.
- Jamshidian, F.(1991): "Bond and Option Evaluation in the Gaussian Interest Rate Model," *Research in Finance*, **9**, 131-170.
- Jeffrey, Andrew(1995): "Single Factor Heath-Jarrow-Morton Term Structure Models Based on Markov Spot Interest Rate Dynamics," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **30**, December, 619-642.
- Litterman, R., and J. A. Scheinkman(1991): "Common Factors Affecting Bond Returns," *Journal of Fixed Income*, **1**, 54-61.
- Ritchken, P., and L. Sankarasubramanian(1995): "Volatility Structure of Forward Rates and the Dynamics of the Return Structure," *Mathematical Finance*, **5**, January, 55-72.
- Shreve, S. E.(2004): *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, New York, Springer.

