

한국 거시 경제 변수를 이용한 어파인 이자율기간구조모형의 실증 분석

장 덕 진

본 연구는 한국의 국고채 수익률과 인플레이션, 산업생산지수 등과 같은 거시 경제 변수로 구성된 어파인 이자율기간구조모형(Affine term structure model)에 의거하여 채권수익률과 거시 경제 변수의 단기 변동의 관계를 분석하였다. 분석 결과에 의하면, 한국 데이터를 적용한 어파인 이자율기간구조모형은 최소카이제곱추정법으로 간편하게 추정될 수 있다. 첫째, 미국이 수요 충격에 수익률이 강하게 반응하는 것과 달리 한국은 공급 충격의 수익률 효과가 더 크게 나타났다. 충격 반응 분석의 결과 인플레이션의 1% 상승에 대해서 수익률이 음의 반응을 보였고 장기 수익률보다 단기 수익률의 반응이 더 오래 지속되었다. 그리고 산업생산지수 변화율의 1% 상승에 대해서 수익률이 양의 반응을 보였고 인플레이션 상승의 경우 보다 더 크고 즉각적으로 반응했다. 또한 단기 수익률의 최대 반응치는 중장기 수익률의 두 배였다. 둘째, 분산 분해 분석의 결과에 따르면 거시 경제 변수는 수익률의 분산을 77~96% 설명할 수 있다. 또한 미국의 선행 연구와 유사하게 만기가 짧을수록, 설명해야 하는 기간이 길어질수록 설명력은 높아졌다.

주제어: 어파인 이자율기간구조모형, 최소카이제곱추정법, 거시-금융모형, 실증 분석, 거시 경제 변수

1. 서론

최근 거시-금융(Macro-Finance) 연구가 각광을 받으면서 거시 경제와 금융을 연결하는 다양한 연구가 진행되고 있다. 이러한 연구들은 거시 경제 변수와 금융변수 간의 연결고리를 찾는 과정을 통해서 예측력을 높이고 경제에 대한 이해도를 높이는 이점이 있다. 거시-금융 연구 중에서 Ang and Piazzesi(2003) 연구로부터 최근 Hamilton and Wu(2011, 2012)까지 거시 경제 변수를 도입하여 이자율의 기간 구조를 이해하고 예측하는 연구가 활발히 진행되고 있다.

어파인 이자율기간구조모형(Affine term structure model: 이하 ATSM)은 다양한 만기에 대한 수익률 간의 관계를 조사하기 위한 기본적인 모형으로 널리 사용되어 왔

다. ATSM의 장점은 무위험 차익(risk-free arbitrage)의 가정에 기반하여 채권과 채권 옵션 가격을 닫힌 해로 구할 수 있다는 것이다[Duffie, Pan, and Singleton(2000)]. 또한 무차익 거래 가정 하에서 시장에서 결정되는 위험의 가격을 쉽게 도출하여 특정 자산의 가격을 예측할 수 있다는 것도 장점이다.

기존에 널리 사용되고 있는 단일 요인 단기 이자율 모형인 Vasicek 모형, CIR 모형, HJM 모형, BDT 모형은 이자율이 한 개의 상태 요인(대부분 단기 이자율)에 영향을 받는 모형으로 간단한 구조를 가지고 있어 응용이 쉽다. 하지만 이러한 단일 요인 모형들은 시간에 따라 가변적으로 변하는 다양한 만기의 이자율 기간 구조를 분석하는데 한계를 가지고 있다. 특히 위 모형들은 본 연구에서 사용된 ATSM 모형과 달리 거시 경제 변수와 이자율의 관계를 고려하지 않기 때문에 거시 경제의 변화에 따른 이자율의 변화를 분석할 수 없다.

본 연구는 거시 경제 변수와 수익률 간의 특정한 관계를 가정하여 한국의 거시 경제 변수로 ATSM을 구성하고 최소카이제곱추정법을 이용하여 구조적 파라미터(structural parameter)를 추정한다. 그리고 추정된 파라미터를 이용하여 충격 반응 분석, 분산 분해 분석, 예측 분석을 시행하여 거시 경제 변수와 수익률의 구조적인 관계를 분석한다. 분석 결과에 의하면, 한국 데이터를 적용한 어파인 이자율기간구조 모형은 최소카이제곱추정법으로 간편하게 추정될 수 있다. 첫째, 미국이 수요 충격에 수익률이 강하게 반응하는 것과 달리 한국은 공급 충격의 수익률 효과가 더 크게 나타났다. 충격 반응 분석의 결과 인플레이션의 1% 상승에 대해서 수익률이 음의 반응을 보였고 장기 수익률보다 단기 수익률의 반응이 더 오래 지속되었다. 그리고 산업생산지수 변화율의 1% 상승에 대해서 수익률이 양의 반응을 보였고 인플레이션 상승의 경우 보다 더 크고 즉각적으로 반응했다. 또한 단기 수익률의 최대 반응치는 중장기 수익률의 두 배였다. 둘째, 분산 분해 분석의 결과에 따르면 거시 경제 변수는 수익률의 분산을 77~96% 설명할 수 있다. 또한 미국의 선행 연구와 유사하게 만기가 짧을수록, 설명해야 하는 기간이 길어질수록 설명력은 높아진다.

최소카이제곱추정법을 이용한 ATSM의 분석을 다룬 본 연구는 다음과 같은 이점이 있다. 첫째, 한국의 이자율 기간 구조와 거시 경제 변수의 연관성을 분석하여 거시 경제 현상의 이해뿐만 아니라 투자와 정책 결정에도 적용할 수 있다. 둘째, 한국 데이터를 대상으로 최소카이제곱추정법의 사용이 적합한지 살펴볼 수 있다. 셋째, 추정된 결과를 바탕으로 거시 경제와 금융시장의 연관성을 분석하여 한국과 다른 국가

간의 시장 구조를 비교할 수 있다. 넷째, 시간가변적 위험 프리미엄을 도출하여 거시 경제의 움직임에 좀 더 심층적으로 분석해 볼 수 있다. 본 연구에서는 마지막 분석은 시행하지 않았다. 추후 연구에서 이 부분을 좀 더 심도 있게 다루려고 한다.

본 연구는 가우시안 프로세스를 따르는 어파인 형태의 이자율 기간 구조를 기본 모형으로 삼는다. 즉, 수익률을 잠재변수 3개와 거시 경제 변수 2개로 구성된 상태 변수의 어파인 함수라고 본다. 단기 이자율과 위험 가격이 상태변수의 어파인 함수라고 가정하고, 무차익 거래 조건 하에 동치 마팅계일 측도 Q 의 존재를 가정하는 Harrison and Kreps(1979)의 이론을 적용하여 명목 채권 가격을 도출하고 이를 수익률로 전환하여 분석에 사용한다. 기본 가정들을 통해 도출된 구조 방정식(structural equation)을 축약형 방정식(reduced-form equation)으로 전환한 후 축약형 방정식의 파라미터를 최소자승법(OLS)으로 계산한 후 최소카이제곱추정법을 이용하여 구조적 파라미터를 추정한다.

ATSM의 선행 연구를 살펴보면 먼저 Vasicek(1977)이 효율적인 시장 하에서 확산 과정을 따르는 이자율 기간 구조의 일반적인 형태를 개발한 이후, Duffie and Kan(1996)에 의해서 ATSM이 거시경제학과 재무경제학의 기본 모형으로 사용되었다. Duffie and Kan(1996)은 수익률이 파라메트릭 마르코프 확산 과정을 따른다고 보고, 무이표채 수익률이 선택된 수익률의 basis set의 어파인 조합이라고 보았다. 그리고 Dai and Singleton(2002)는 ATSM에서 시간가변적인 위험 프리미엄을 도출해 예측력을 높였고 위험 가격을 통해서 이자율기간구조모형이 전통적인 기대 이론에 대해 가지는 모순을 해결하였다. Duffie, Pan, and Singleton(2002)은 어파인 점프 확산에 관한 연구를 통해서 ATSM 분석 기법을 발전시켰다. 그리고 Ang and Piazzesi(2003)가 ATSM에 거시 경제 변수를 도입하여 수익률을 거시 경제 변수와 잠재 변수의 어파인 함수로 정의하고 거시 경제 변수와 수익률 간의 다양한 관계를 분석하였다. Dai and Singleton(2000), Pericoli and Taboga(2008)는 거시 경제 변수가 도입된 ATSM의 추정 적합성이나 예측의 효율성을 다른 여러 종류의 모형들과 비교하는 연구를 수행했다. 최근에 Hamilton and Wu(2011, 2012)는 이전의 ATSM이 최우추정법으로 추정한 것에 반해 최소카이제곱추정법을 이용하여 추정을 시도하였다.

목차는 다음과 같다. 2장에서 연구에 사용된 데이터를 설명하고 수익률과 거시 경제 변수의 관계를 간략히 분석한다. 3장에서 어파인 이자율기간구조모형의 기본 구조와 데이터를 적용한 구체적인 식별(identification)을 제시한다. 4장에서 최소카이

제공추정법의 특징을 정리하고 이를 한국 데이터에 적용한 실증 분석 방법을 제시한다. 5장에서 앞의 추정 결과를 이용한 충격 반응 분석, 분산 분해 분석, 예측 분석을 제시한다. 마지막으로 6장은 결론이다.

2. 데이터

본 연구는 2001년 1월부터 2012년 1월까지 국고채 수익률과 거시 경제 변수의 월별 데이터를 사용하였다.

2.1. 수익률 데이터

국채와 회사채는 부도 위험, 유동성 위험 등 다양한 위험에 있어서 차이가 있고 이러한 위험 프리미엄이 시간에 따라 가변적일 수 있기 때문에 본 연구는 국채만을 그 대상으로 삼는다.

한국과 미국의 수익률을 그래프로 보면⁽¹⁾ 1997년 외환 위기, 2008년 글로벌 금융 위기와 같이 경제의 불안감이나 위험성이 증가한 시기에 장단기 수익률 스프레드가 커진 것을 확인할 수 있다. 이것은 위기 시 리스크 프리미엄의 증가로 인해 장기 채권에 대한 기피 현상이 발생해 장기 자금의 조달이 어렵고, 이로 인해 만기가 긴 채권 가격에 대한 할인이 크게 이루어져 상대적인 수익률이 증가하기 때문인 것으로 보인다. 이러한 수익률 자체의 수준 변화뿐만 아니라 장단기 수익률 스프레드의 변화가 거시 경제와 상호작용하는 것으로 볼 수 있기 때문에 ATSM에서 거시 경제 변수를 도입하여 거시-금융 모형을 구축하는 것은 의미 있는 작업이라 할 수 있다.

모형의 가정에 따라서 무이표채 수익률을 사용하기 위해 'KIS채권평가'⁽²⁾가 일별 채권 거래 자료를 사용하여 3차 다항식 스플라인을 통해 추정한 자료를 이용하였다. 11개의 잔존만기 수익률 자료가 사용 가능하나 본 연구에서는 자료의 제공 시점을 고려하여 10년, 20년 잔존만기 수익률을 제외한 3월, 6월, 9월, 1년, 1년 6월, 2년, 2년 6월, 3년 6월, 5년의 9개 잔존만기 수익률을 분석 대상으로 선정하였고, 분석 기간은 2001년 1월부터 2012년 1월까지로 정했다.

엄영호 · 이준희 · 지현준(2007)은 우리나라 채권시장에서는 미국과 같이 실제 만

(1) 부록 A '한국과 미국의 월별 무이표채 수익율' 참고.

(2) KIS채권평가(<http://www.bond.co.kr/>).

기가 3개월인 단기 재무성증권이 존재하지 않고 잔존 만기가 짧은 채권의 경우 거래 빈도나 금액이 장기 채권에 비해 현저하게 낮기 때문에 상대적으로 높은 유동성 프리미엄이 거래가격에 포함될 가능성이 있다고 밝혔다. 본 연구는 이러한 점을 고려하여 상대적으로 거래량, 거래 건, 거래 대금이 큰 잔존만기 3년, 5년 국채 수익률과 단기 시장 정보를 포함하기 위해서 3개월 수익률을 ‘무오차가격 수익률’로 분류하고, 나머지 6개의 국채 수익률을 ‘오차가격 수익률’로 분류하였다.⁽³⁾

2.2. 거시 경제 변수 데이터

ATSM에서 거시 경제 변수를 도입하는 방법은 다양하지만 다음의 두 가지로 정리될 수 있다. 첫째, 인플레이션과 실물 활동(Real activity)을 측정하는 여러 거시 변수를 이용하여 두 그룹에 대한 주성분 분석을 실시하고 각 그룹의 첫 번째 주성분을 각각 인플레이션 요인, 실물 경제 변수 요인으로 선정한다[Ang and Piazzesi(2003) 방식]. 둘째, 인플레이션과 실물 활동을 잘 대변할 수 있는 대표적인 거시 경제 변수를 한 개씩 선정하여 분석을 시도한다[Hamilton and Wu(2011) 방식].

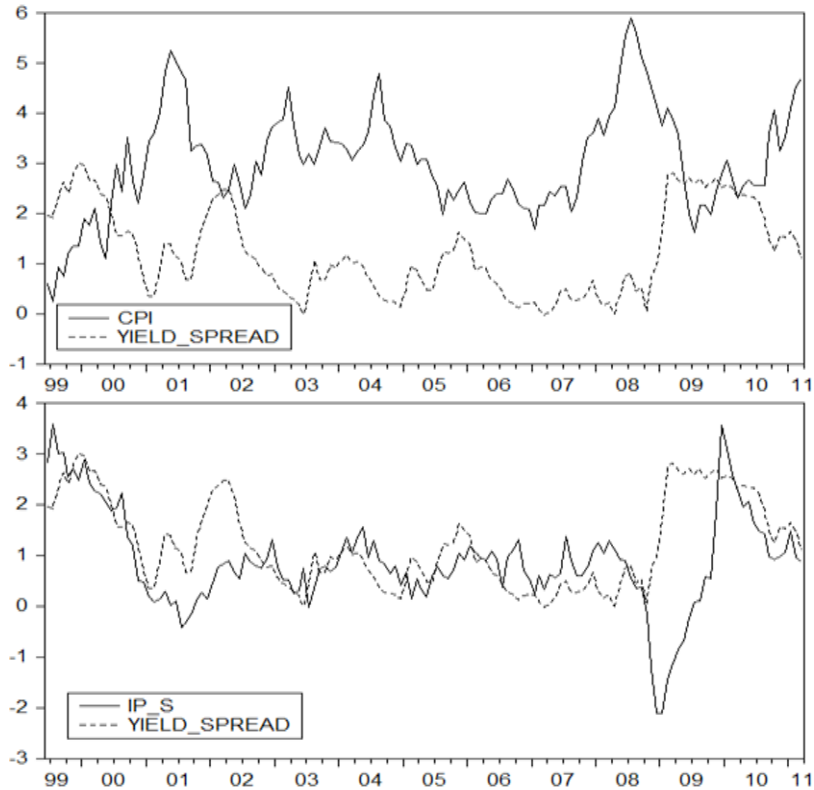
본 연구에서는 대표적인 두 개의 거시 경제 변수인 CPI(소비자물가)와 IP(산업생산지수)를 선정하여 분석에 사용하였다. CPI는 거시 경제의 인플레이션을 보여주는 측도가 되고 IP는 실물경제의 생산성을 보여준다. 사용된 거시 경제 변수는 계절성을 지니므로 계절조정된 원자료를 전년동월비로 가공하여 자료의 안정성을 확보하였다. 그리고 가공된 거시 경제 변수를 단위근 검정하여 정상성(stationary)이 확보되었는지 확인하였다.

한국의 CPI와 IP는 음의 상관관계(-0.48)를 가지고 있다.⁽⁴⁾ 동일 기간(1999~2011년) 기준으로 미국도 0.45의 다소 높은 양의 상관관계를 보여준다. 두 변수 간의 시계열 관계를 분석하기 위해서 Bivariate Vector Autoregression을 실시하였다. 분석 결과 결정계수(adj. R-squared) 값은 0.81(CPI), 0.80(IP)로 상당히 높다. 또한 전체 모형에 대한 AIC가 6.41, SBC가 6.55로 낮은 편이어서 설명력이 높음을 알 수 있다.⁽⁵⁾ 이러한 결과는 충격 반응 분석에서도 유사하게 나타난다.

(3) 부록 B ‘잔존만기별 한국 국채의 거래 규모’ 참고.

(4) 부록 C ‘거시경제변수와 수익률 간의 상관관계’ 참고.

(5) 부록 D ‘CPI와 IP의 VAR 분석 결과’ 참고.



資料: KIS채권평가, 한국은행ECOS.

〈그림 1〉 국고채 수익률 스프레드와 거시경제 변수 (CPI, IP)

2.3. 수익률과 거시 경제 변수

본 분석에 들어가기에 앞서 수익률과 거시 경제 변수의 연관성을 조사하기 위해 거시 경제 변수와 장단기 금리의 상관도를 조사했다.⁽⁶⁾ IP는 단기(3개월물), 장기(60개월물), 장단기 수익률 스프레드와 0.32에서 0.47의 양의 상관관계를 가지고 있고, CPI는 -0.17에서 -0.38로 음의 상관관계를 가지고 있다.⁽⁷⁾ 미국의 경우 CPI와 spread의 상관도가 -0.42로 IP의 -0.28보다 크지만 한국의 경우 IP와 CPI 상관도의 절대치에 큰 차이가 없음을 볼 수 있다.

단순한 상관관계 분석에서 한국이 미국에 비해 수익률과 거시 경제 변수의 상관도가 높았다(스프레드의 경우에는 거의 유사). 이러한 분석을 통해서 국가 경제력 규모

(6) 부록 C ‘거시경제변수와 수익률간의 상관관계’ 참고.
 (7) 〈그림 1〉에서는 수익률 스프레드와의 시각적 비교를 위해 변동폭이 큰 IP의 수치를 1/10로 조정하여 나타냄.

에 비해 채권시장이 덜 발달한 한국에서도 수익률과 거시 경제 사이에 일정한 관계성이 있음을 유추해 볼 수 있다.

3. 어파인 이자율기간구조모형(Affine Term Structure Model)

Ang and Piazzesi(2003)의 연구 이후로 ‘이산 기간 선형 가우시안 동태 이자율기간구조모형(Discrete-time Affine Gaussian Dynamic Term Structure Model: DTSM)’은 다음 세 가지 중요 요소를 통해 이자율 기간 구조를 도출한다. 첫째, N-벡터인 가격 결정 요인 F_t 는 first-order Gaussian VAR을 따른다(이때 Σ 는 하삼각행렬(lower triangular)이다).

$$F_{(t+1)} = c + \rho F_t + \Sigma u_{t+1}, \quad \text{where } u_{t+1} : i.i.d.N(0, I_N)$$

둘째, 단기 이자율 r_t 는 가격 결정 요인의 어파인함수(affine function)이다.

$$r_t = \delta_0 + \delta_1 F_t$$

셋째, 무차익(absence of arbitrage) 조건 하에 모든 자산 가격을 결정하는 확률적 할인률(Stochastic discount factor: SDF)이 어파인 형식(affine form)의 필수적 요소이다 [Duffee(2002)]. (λ_t 는 위험가격)

$$-\log(M_{t+1}) = r_t + \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t + \lambda_t' u_{t+1}$$

3.1. ATSM의 기본구조(Basic Framework)

본 연구의 어파인 이자율기간구조모형(이하: ATSM)의 기본모형은 Ang and Piazzesi(2003)와 Hamilton and Wu(2012)의 모형을 참고하였다.

3.1.1. 상태 동학(State Dynamics)

$P_{n,t}$ 를 $t+n$ 기에 1원의 가치가 있는 순환인채 t 기의 가격이라고 하자. 수많은 재무 모형에서 $P_{n,t}$ 은 어떤 가격결정책 M_{t+1} 을 따른다고 본다($P_{n,t} = E_t(M_{t+1} P_{n-1,t+1})$). ATSM은 가우시안 벡터 자기회기를 따르는 가격 결정 요인 F_t 에 $P_{n,t}$ 이 의존한다고

가정한다. 가격 결정 요인 F_t 는 1차 가우시안 VAR을 따른다.

$$(3.1) \quad F_{t+1} = c + \rho F_t + \Sigma u_{t+1}, \quad u_t \sim i.i.d.N(0, I)$$

3.1.2. 가격결정핵 (Pricing Kernel)

무차의 거래 조건 하에서 등가 마팅계일 척도(위험중립 척도) Q 가 존재한다고 가정한다[Harrison and Kreps(1979)]. Q -측도 하에서 $t + 1$ 에 배당을 지급하지 않는 어떤 자산 V_t 의 가격은 $V_t = E_t^Q (\exp(-r_t) V_{t+1})$ 을 만족한다. Q -측도를 P -측도(원확률)로 전환하는 라돈-니코딤 도함수(Radon-Nikodym derivative)을 ξ_{t+1} 라 하면, $t + 1$ 기 확률 변수 Z_{t+1} 는 $E_t^Q (Z_{t+1}) = E_t (\xi_{t+1} Z_{t+1})/\xi_t$ 을 만족한다. 무이표채의 가격을 도출하기 위해서 위의 자산 가격 도출식에 무위험 이자율을 대입하고 라돈-니코딤 도함수를 적용하면, 무이표 국고채의 가격결정핵 M_{t+1} 은 다음과 같이 정의된다.

$$(3.2) \quad M_{t+1} = \exp(-r_t)\xi_{t+1}/\xi_t$$

이때 위험가격(risk price) λ_t 의 N-차원 벡터도 가격 결정 요인 F_t 의 어파인이라고 정의하자. 즉, 위험(risk)에 대한 투자 행태를 특성화한 위험 가격 λ_t 는 불확실성 u_{t+1} 과 함께 시장에서 위험의 가격을 시간가변적으로 정한다($\lambda_t = 0$ 는 위험 중립성을 나타낸다). (λ 는 N-벡터, Λ 는 $N \times N$ 행렬)

$$(3.3) \quad \lambda_t = \lambda + \Lambda F_t$$

ξ_{t+1} 이 대수정규분포 과정을 따른다고 가정하면($\xi_{t+1} = \xi_t \exp(-1/2 \lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' u_{t+1})$), 가격 결정핵 M_{t+1} 은 단기 이자율 r_t 와 위험가격 λ_t 의 함수로 정의된다.

$$(3.4) \quad M_{t+1} = \exp\left(-r_t - \frac{1}{2} \lambda_t' \lambda_t - \lambda_t' u_{t+1}\right)$$

3.1.3. 채권 가격(Bond Prices)

위의 가격결정핵이 경제 내의 모든 명목 자산의 가격을 결정하는 명목 가격결정핵이라고 보자. 즉, 어떤 명목 자산의 총수익 R_{t+1} 은 다음 식을 만족한다.

$$(3.5) \quad E_t(M_{t+1} R_{t+1}) = 1$$

채권의 t 기에서 $t+1$ 기까지 수익률은 $R_{t+1} = P_{n,t+1}/P_{n+1,t}$ 이므로 이를 위 식에 적용하면, n -기간 무이표채의 가격 P_m 은 가격결정핵 M_{t+1} 의 함수로 다음과 같이 결정된다.

$$(3.6) \quad P_{n+1,t} = E_t(M_{t+1} P_{n,t+1})$$

이때 단기 이자율 r_t 는 가격 결정 요인의 어파인 함수라 정의한다.

$$(3.7) \quad r_t = \delta_0 + \delta_1' F_t$$

위의 단기 이자율과 가격결정핵을 이용하여 먼저 1기간 무이표채의 가격을 구한다.

$$(3.8) \quad P_{1,t} = E_t[M_{t+1}] = \exp\{-r_t\} = \exp\{-\delta_0 - \delta_1' F_t\}$$

n -기간 채권의 가격을 $P_{n,t} = \exp(\bar{a}_n + \bar{b}_n' F_t)$ 이라 한다. 이를 위 채권식의 $(n+1)$ 기간 채권에 적용하면, $(n+1)$ 기간 무이표채(순할인채) 가격은 다음과 같이 도출된다.⁽⁸⁾

$$(p_{n+1,t} = \log(P_{n+1,t}))$$

$$(3.9) \quad p_{n+1,t} = \bar{a}_{n+1} + \bar{b}_{n+1}' F_t$$

$$(3.10) \quad \bar{a}_{n+1} = \bar{a}_n + \bar{b}_n' c^Q + (1/2)\bar{b}_n' \Sigma \Sigma' \bar{b}_n - \delta_0 \quad \text{where} \quad c^Q = c - \Sigma \lambda$$

$$(3.11) \quad \bar{b}_{n+1}' = \bar{b}_n' \rho^Q - \delta_1', \quad \text{where} \quad \rho^Q = \rho - \Sigma \Lambda$$

이때 \bar{b}_n, \bar{a}_n 은 $\bar{b}_1 = -\delta_1, \bar{a}_1 = -\delta_0$ 에서 시작하여 재귀적으로 계산된다.

(8) 부록 E '명목 채권 가격 도출' 참고.

$$(3.12) \quad \bar{b}_n = -[I + \rho^{\mathcal{O}} + \dots + (\rho^{\mathcal{O}})^{n-1}] \delta_1$$

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \bar{a}_n = & -\delta_0 - (b'_1 + 2b'_2 + \dots + (n-1)b'_{n-1})c^{\mathcal{O}}/n \\ & - (b'_1 \Sigma \Sigma' b_1 + 2^2 b'_2 \Sigma \Sigma' b_2 + \dots + (n-1)^2 b'_{n-1} \Sigma \Sigma' b_{n-1})/2n \end{aligned}$$

3.1.4. 이산 기간 이자율기간구조모형(Discrete-time term Structure Model)

n-기간 채권의 내재수익률은 $y_{nt} = -n^{-1} p_{nt}$ 이므로 앞에서 도출된 채권가격식을 적용하면 다음과 같다.

$$(3.14) \quad y_{n,t} = \frac{-\bar{a}_n}{n} + \frac{-\bar{b}_n}{n} F_t$$

다양한 만기의 수익률을 예측하기 위해서 $\{F_t, c^{\mathcal{O}}, \rho^{\mathcal{O}}, \delta_0, \delta_1, \lambda, \Sigma\}$ 의 수치를 정확히 도출하고 이를 위의 식에 대입하면 원하는 만기의 수익률을 예측하는 것이 가능하다.

위에서 도출된 내재수익률을 N개의 다른 만기 수익률로 벡터화하면 다음과 같이 표현된다. ($Y_{nt} = (y_{n_1,t}, y_{n_2,t}, \dots, y_{n_N,t})$)

$$(3.15) \quad Y_t = A + B F_t$$

where $A = (a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_N})'$, $B = (b_{n_1}, b_{n_2}, \dots, b_{n_N})'$

이때, A는 i번째 원소가 a_{n_i} 인 $(N \times 1)$ 벡터이고, B는 i번째 열(row)이 b'_{n_i} 인 $(N \times m)$ 행렬이 된다. ATSM에서는 위의 식이 정확하게 성립하는 Y_t 의 m개의 선형 조합이 있다고 가정한다. 즉, 이를 ‘무오차가격 수익률(Yields priced without error)’로 보고 다음과 같이 정리된다.

$$(3.16) \quad Y_{1t} = A_1 + B_1 F_t$$

where $Y_{1t} = H_1 Y_t$, $A_1 = H_1 A$, $B_1 = H_1 B$

이때 Y_{1t} 는 $(m \times 1)$ 벡터이고 H_1 은 $(m \times N)$ 행렬이다. 행렬 H_1 은 단순히 m개의 특정 수익률을 선택하는 행렬이 될 수도 있고[Ang and Piazzesi(2003)], Y_t 의 주성분(principal components) 중 앞의 m개가 될 수도 있다[Joslin, Singleton, and Zhu(2011)]. 남은

$N_e (= N - m)$ 개의 수익률은 ‘오차가격 수익률(Yields priced with error)’로 가정한다.

$$(3.17) \quad Y_{2t} = A_2 + B_2 F_t + u_{2t}$$

where $Y_{2t} = H_2 Y_t, \quad A_2 = H_2 A, \quad B_2 = H_2 B$

이때 u_{2t} 는 $(N_e \times 1)$ 벡터인 측정오차이고, H_2 는 $(N_e \times N)$ 벡터이다. $(u_{2t} \sim i.i.d.N(0, \Sigma_e \Sigma_e'))$ 이때 Σ_e 는 대각행렬이고 u_{2t} 는 식 (3.1)의 u_t 와 독립이다.

앞으로 살펴볼 세 개의 모형 중 첫 번째는 거시 경제 변수가 포함되지 않는 잠재 요인 모형으로 뒤의 두 모형과 비교 대상이 된다. 다른 두 모형은 거시-금융 모형으로 하나는 적정식별이면서 거시 경제 변수와 잠재변수의 비독립성을 가정하고 다른 하나는 과대식별이면서 독립성을 가정한다.

3.2. 잠재 요인 모형의 가정과 식별(Identification)

잠재 요인 모형에서 가격 결정 요인 F_t 가 3개의 관측 불가능한 잠재 요인으로 결정된다고 본다. ‘무오차가격 수익률’ $Y_{1,t}$ 는 3개월, 36개월, 60개월 만기 수익률로, ‘오차가격 수익률’ $Y_{2,t}$ 는 6개월 만기 수익률로 설정하고, ‘ $\Sigma = I_{N_p}, \delta_1 \geq 0, c = 0, \rho^0$ 는 하삼각행렬’이라는 정규화 조건을 사용한다.

다음으로 잠재 요인 모형의 식별을 살펴보면, 무오차가격 수익률인 3개월, 36개월, 60개월 만기 채권수익률 $Y_{1,t}$ 의 축약형 방정식은 잠재 요인으로부터 오차 없이 도출될 수 있다(식에 포함된 오차항은 잠재 요인의 자체 오차항과 B1 행렬로부터 도출된다). 이때 식 (3.1)과 식 (3.16)를 이용하여 축약형 방정식을 도출한다.

‘오차가격 수익률’인 6개월 만기 채권수익률 $Y_{2,t}$ 의 축약형 방정식은 잠재 요인으로부터 오차를 포함하여 도출할 수 있다. 즉, 측정오차 Σ_e 를 포함한 가격이 도출된다. 이때 식 (3.1)과 식 (3.17)을 이용하여 축약형 방정식을 도출한다.

앞에서 제시된 방법을 통하여 $Y_{1,t}$ 과 $Y_{2,t}$ 의 축약형 파라미터는 다음과 같이 구조 파라미터로 표현될 수 있다.⁽⁹⁾

$$(3.18) \quad Y_{1,t} = A_1^* + \phi_{11}^* Y_{1,t-1} + u_{1,t}^*, \quad Y_{2,t} = A_2^* + \phi_{21}^* Y_{1,t} + u_{2,t}^*$$

(9) 부록F ‘축약형 방정식 유도’ 참고.

〈표 1〉 잠재 요인 모형에서 구조 파라미터와 축소형 파라미터의 관계

VAR parameter	No. of elements	Σ_e N_e	ρ^Q $N_I(N_I + 1)/2$	δ_1 N_I	ρ N_I^2	c^Q N_I	δ_0 1
Ω_2^*	N_e	√					
ϕ_{21}^*	$N_I N_e$		√				
Ω_1^*	$N_I(N_I + 1)/2$		√	√			
ϕ_{11}^*	N_I^2		√	√	√		
A_2^*	N_e		√	√		√	√
A_1^*	N_I		√	√	√	√	√

$$(3.19) \quad A_1^* = A_1 - B_1 \rho B_1^{-1} A_1, \quad A_2^* = A_2 - B_2 B_1^{-1} A_1$$

$$(3.20) \quad \phi_{11}^* = B_1 \rho B_1^{-1}, \quad \phi_{21}^* = B_2 B_1^{-1}$$

또한 위의 두 축약형 방정식 (3.18)의 오차항은 다음과 같은 특성을 지니게 된다.

$$(3.21) \quad \begin{bmatrix} u_{1,t}^* \\ u_{2,t}^* \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Omega_1^* & 0 \\ 0 & \Omega_2^* \end{bmatrix} \right) \quad \text{where} \quad \Omega_1^* = B_1 B_1^{-1}, \Omega_2^* = \Sigma_e \Sigma_e$$

〈표 1〉을 보면, 축약형 파라미터와 구조 파라미터 수의 차이는 $(N_e - 1)(N_I + 1)$ 이다. 따라서 $N_e = 1$ 인 경우에 적정식별(just-identified) 되고 $N_e > 1$ 인 경우에 과대식별(over-identified)이 된다. 현재 모형의 경우 $N_I = 3$, $N_e = 1$ 로 적정식별 되어 있고, 둘 간의 함수 관계를 분석해 보면 미식별(unidentified)되는 구조 파라미터가 없음을 확인할 수 있다.

3.3. 거시-금융 모형

3.3.1. 거시-금융 모형의 가정

본 모형에서 ‘무오차가격 수익률’ $Y_{1,t}$ 는 3개월, 36개월, 60개월 만기 수익률로, ‘오차가격 수익률’ $Y_{2,t}$ 는 6개월, 9개월, 12개월, 18개월, 24개월, 30개월 만기 수익률로 설정하였다. 거시-금융 모형에서는 두 거시 경제 변수 CPI와 IP를 포함하여 VAR(1)을 설정한다. 즉, 무제약 1차 거시-금융 모형을 통해서 앞의 모형을 확장시켜 보고자 한다. 잠재 요인과 거시 경제 변수의 독립성을 가정하는지 독립성을 가정하지 않는

지에 따라서 세부적인 모형의 설정에 차이가 발생하게 된다. 다음은 독립성을 가정한 것과 가정하지 않은 두 모형의 설정이 어떻게 달라지는지 보여준다.

Ang and Piazzesi(2003) 연구에 따르면 거시 요인(Macro factors)은 잠재 요인(Latent factors)과 함께 채권수익률의 변화에 영향을 결정하는 것으로 본다. 따라서 P-측도 구조방정식은 다음과 같은 VAR로 표현될 수 있다. 이때 거시 경제 변수는 잠재 요인과 독립인 것으로 가정하고, 거시 경제 변수와 잠재 요인의 1차 래그까지 VAR에 포함한다. ($N_m = 2, N_l = 3$)

$$(3.22) \quad f_t^m = cm + \rho_{mm}f_{t-1}^m + \Sigma_{mm} u_t^m$$

$$(3.23) \quad f_t^l = c_l$$

Pericoli and Taboga(2008) 연구는 Ang and Piazzesi(2003)와 달리 관찰 가능한 거시 경제 변수와 관찰 불가능한 잠재변수가 독립이라는 가정을 두지 않아 더 일반적인 형태의 무제약 VAR을 가지게 된다. 이때, 식 (3.1)과 단기 수익률 방정식은 다음과 같이 다시 정리될 수 있다.

$$(3.24) \quad f_t^m = c_m + \rho_{mm}f_{t-1}^m + \rho_{ml}f_{t-1}^l + \Sigma_{mm} u_t^m$$

$$(3.25) \quad f_t^l = c_l + \rho_{lm}f_{t-1}^m + \rho_{ll}f_{t-1}^l + \Sigma_{lm} u_t^m + \Sigma_{ll} u_t^l$$

$$(3.26) \quad r_t = \delta_0 + \delta'_{lm}f_t^m + \delta'_{ll}f_t^l$$

위의 독립성 가정 이외에도 각 연구는 정규화 조건에서 차이를 보인다. Ang and Piazzesi(2003)는 모형에서 Q-측도를 사용하여 시스템을 계산하면서 ' $\Sigma_{lm} = 0, \Sigma_{ll} = I_{N_l}, c_l = 0, \Sigma_{mm}$ 와 ρ_{ll} 는 하삼각행렬, ρ'_{ll} 의 대각원소는 감소'라는 같은 정규화 조건을 사용했다. Pericoli and Taboga(2008)는 ' Σ_{mm} 는 하삼각행렬, $\Sigma_{lm} = 0, \Sigma_{ll} = I_{N_l}, \delta_{ll} \geq 0, f_0^l = 0$ '라는 정규화 조건을 제안했다.⁽¹⁰⁾

(10) Hamilton and Wu(2012)는 Pericoli and Taboga(2008)의 연구를 재현하면서 $f_0^l = 0$ 이라는 가정 대신 전통적인 방식인 $c_l = 0$ 또는 $c_l^Q = 0$ 중 후자를 사용했다.

ATSM에 있어서 단기이자율식은 더 긴 만기의 수익률식을 도출하는 기초가 되므로 중요하다. 따라서 단기이자율식을 어떻게 설정하고 분석하는지도 중요하다. Ang and Piazzesi(2003)는 단기 수익률이 거시 요인의 현재 값에만 의존한다고 주장했다. 또한 f_t^l 가 f_t^m 에 독립적이므로 δ_0 와 δ_1 의 값은 식의 OLS추정으로 구할 수 있다고 주장했다. 1개월 만기 할인채 수익률이 있어야 이러한 방법을 쓸 수 있다. 다른 경우에는 수치적(numerical)으로 추정해야 한다. 따라서 본 모형에서는 수치적으로 추정했다.

3.3.2. 거시-금융 모형의 식별(Identification)

3.3.2.1. 비독립성 가정 모형의 식별

거시 경제 변수와 잠재 요인의 비독립성을 가정하는 모형은 Pericoli and Taboga (2008)의 정규화 조건을 적용하였다. 이때 Ang and Piazzesi(2003)와 달리 거시 경제 변수와 잠재변수 간의 독립성을 가정하지 않으므로 ρ_{mt} 와 ρ_{lm} 은 0이 아니다. 따라서 거시 경제 변수의 축약형 방정식에 $Y_{1,t-1}$ 가 포함된다.⁽¹¹⁾ 또한 적정식별 모형을 구성하기 위해서 ‘오차가격 수익률’을 6개월, 9개월, 12개월 수익률 3개로 제한한다.

$$(3.27) \quad f_t^m = A_m^* + \phi_{mm}^* f_{t-1}^m + \phi_{m1}^* Y_{1,t-1} + u_{mt}^*$$

$$(3.28) \quad Y_{1,t} = A_1^* + \phi_{1m}^* f_{t-1}^m + \phi_{11}^* Y_{1,t-1} + \psi_{1m}^* f_t^m + u_{1,t}^*$$

$$(3.29) \quad Y_{2,t} = A_2^* + \phi_{2m}^* f_t^m + \phi_{21}^* Y_{1,t} + u_{2,t}^*$$

$$(3.30) \quad Var \begin{pmatrix} u_{m,t}^* \\ u_{1,t}^* \\ u_{2,t}^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_m^* & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_1^* & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{mm} \Sigma_{mm}' & 0 & 0 \\ 0 & B_{1l} & B_{1l}' \\ 0 & 0 & \Sigma_e \Sigma_e' \end{bmatrix}$$

〈표 2〉를 보면, 모형 전체로 볼 때 축약형 파라미터는 66개이고 구조 파라미터는 69개로 과소식별(under-identified) 되고 있다. 일반적으로 ρ_{ii}^0 에 추가로 3개의 제약을 둔다.⁽¹²⁾ 〈표 2〉를 보면 이러한 추가적인 제약으로 인해 추정해야 할 구조파라미터는

(11) 구조식으로부터 축약식 도출하는 방법 그리고 축약형 파라미터와 구조 파라미터의 관계는 부록 F 참고.

(12) Hamilton and Wu(2012)는 ρ_{ii}^0 를 하삼각행렬로 설정한다.

〈표 2〉 거시-금융 모형의 구조 파라미터와 축약형 파라미터 관계 (적정식별, 비독립성 가정).

		Σ_e	Σ_{mm}	ρ^Q	δ_1	ρ_{ml}	ρ_{mm}	ρ_{ll}	ρ_{lm}	δ_0	c_m^Q	c_m	c_l
		3	3	25	5	6	4	9	6	1	2	2	3
Ω_2^*	3	√											
Ω_m^*	3		√										
Ψ_{1m}^*	6			√	√								
ϕ_{2m}^*	6			√	√								
ϕ_{21}^*	9			√	√								
Ω_1^*	6			√	√								
ϕ_{m1}^*	6			√	√	√							
ϕ_{mm}^*	4			√	√	√	√						
ϕ_{11}^*	9			√	√			√					
ϕ_{1m}^*	6			√	√			√	√				
A_2^*	3		√	√	√					√	√		
A_1^*	3		√	√	√	√				√	√	√	
A_m^*	2		√	√	√			√		√	√		√

66개로 줄어들어 모형은 적정식별 된다.

3.3.2.2. 독립성 가정 모형의 식별

앞에서 제시한 Ang and Piazzesi(2003)의 정규화 조건과 거시 경제 변수와 잠재 요인의 독립성 가정을 사용하면 다음과 같은 축약형 방정식을 도출할 수 있다. 즉 독립성 조건으로 인해 ρ_{ml} 와 ρ_{lm} 가 0이 되어 앞의 모형과 달리 거시 경제 변수 방정식에 ‘무오차가격 수익률’이 포함되지 않는다. 이때 과대식별 모형을 구성하기 위해서 앞에서 지정한 ‘오차가격 수익률’ 6개를 모두 포함하는 모형을 구성한다.

$$(3.31) \quad f_t^m = \phi_{mm}^* f_{t-1}^m + u_{mt}^*$$

$$(3.32) \quad Y_{1,t} = A_1^* + \phi_{1m}^* f_{t-1}^m + \phi_{11}^* Y_{1,t-1} + \psi_{1m}^* f_t^m + u_{1,t}^*$$

$$(3.33) \quad Y_{2,t} = A_2^* + \phi_{2m}^* f_t^m + \phi_{21}^* Y_{1,t} + u_{2,t}^*$$

$$(3.34) \quad Var \begin{pmatrix} u_{m,t}^* \\ u_{1,t}^* \\ u_{2,t}^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_m^* & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_1^* & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{mm} \Sigma_{mm}' & 0 & 0 \\ 0 & B_{1l} B_{1l}' & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_e \Sigma_e' \end{bmatrix}$$

〈표 3〉 거시-금융 모형의 구조 파라미터와 축약형 파라미터 관계 (과대식별, 독립성 가정)

VAR parameter	No. of elements	Σ_e 6	Σ_{mm} 3	ρ_{mm} 4	Λ_{mm} 4	δ_{1m} 2	ρ_{ll} 6	Λ_{ll} 9	δ_{1l} 3	δ_0 1	λ 5	c_m 2
Ω_2^*	6	√										
Ω_m^*	3		√									
ϕ_{mm}^*	4			√								
Ψ_{1m}^*	6			√	√	√						
ϕ_{21}^*	18						√	√	√			
Ω_1^*	6						√	√	√			
ϕ_{11}^*	9						√	√	√			
ϕ_{2m}^*	12			√	√	√	√	√	√			
ϕ_{1m}^*	6			√	√	√	√	√	√			
A_2^*	6		√	√	√	√	√	√	√	√	√	
A_1^*	3		√	√	√	√	√	√	√	√	√	
A_m^*	2											√

〈표 3〉을 보면 거시 경제 변수와 잠재 요인의 독립성을 가정하는 거시-금융 모형의 축약형 파라미터는 81개이고 구조 파라미터는 45개로 과대식별 되고 있다.

4. 추정(Estimation)

최소카이제곱추정법을 간단히 정리하면 다음과 같다. 축약형 파라미터는 OLS(Ordinary Least Square)를 통해서 비교적 쉽게 구할 수 있다. 따라서 축약형 파라미터에 관해 OLS가 우도(likelihood)값을 극대화하도록 하고 이때 구조 파라미터 θ 를 도출하는 방법은 구조 파라미터 θ 의 로그우도함수를 수치적으로 극대화시키는 방법의 대안이 될 수 있다[Hamilton and Wu(2012)].

Hamilton and Wu(2012)는 최우추정법이 최소카이제곱추정법보다 더 좋다고 할 수 없다고 주장한다. 더군다나 최소카이제곱 알고리즘에 의한 추정은 전통적인 방법인 우도함수의 극대화에 비해 두 가지 큰 장점을 지니고 있다고 본다. 첫째, $\hat{\theta}$ 이 우도 표면의 global maximum에 대응되는지 알아보기 위해 앞의 식에서 0의 값이 도출되는지 보면 된다. 반면 전통적인 방식에 의하면 수백 번의 시행을 해서 값을 구해야 하고 그 경우에도 도출된 값이 global maximum에 대응되는 값인지 확신할 수 없다. 둘째, 최소카이제곱식을 극소화하는 것은 우도함수를 극대화하는 방법보다 간편

하다. 추가적으로, 계산의 편의성으로 인해 적정식별인 경우에 소표본 신뢰구간을 계산할 수 있다는 장점도 있다. 따라서 본 연구에서는 최소카이제곱추정법을 이용하여 한국의 경제 데이터를 추정하는 데 초점을 두고 있다. 뒤에 서술될 추정 과정은 잠재 요인 모형과 거시-금융 모형이 거의 유사하므로 거시-금융 모형만 제시하도록 하겠다.

4.1. 거시-금융 모형의 추정

최소카이제곱추정법을 실행하기 위해서는 정보행렬(information matrix)이 필요하다. 축약형 방정식 식 (3.20)-식 (3.22)는 3개의 독립적인 그룹을 형성하고 있다. 따라서 $Y_t^m = f_t^m$ 로 볼 경우, 블록 i 의 구조를 다음과 같이 쓸 수 있다. ($i = 1, 2, m$)

$$(4.1) \quad Y_t^i = \Pi_i' x_{it} + u_{it}^*, \quad u_{it}^* \sim N(0, \Omega_i^*)$$

이 경우 축약형 파라미터 행렬⁽¹³⁾은 다음과 같다[Magnus and Neudecker(1988, p. 321)].

$$(4.2) \quad \hat{R} = \begin{bmatrix} \hat{R}_m & 0 & 0 \\ 0 & \hat{R}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{R}_2 \end{bmatrix}$$

$$(4.3) \quad \text{where } \hat{R}_i = \begin{bmatrix} \Omega_i^{*-1} \otimes T^{-1} \Sigma_{t=1}^T x_{it} x_{it}' & 0 \\ 0 & (1/2) D_{q_i}' (\hat{\Omega}_i^{*-1} \otimes \hat{\Omega}_i^{*-1}) D_{q_i} \end{bmatrix}$$

4.1.1. 축약형 파라미터의 도출

전통적인 접근 방식에서는 우도함수를 극대화하는 구조 파라미터를 바로 선택해야 한다. 하지만 Hamilton and Wu(2011)는 Rothenberg(1973)가 개발한 최소카이제곱 프로시저를 이용하면 상당한 이점이 있다고 주장하고 있다. 최소카이제곱추정법은 최

(13) D_N 은 $D_N \text{vech}(\Omega) = \text{vec}(\Omega)$ 를 만족하는 $N^2 \times N(N+1)/2$ duplication matrix.

우추정법과 점근적으로 동일(asymptotically equivalent)하지만 실행 과정은 더 쉽다. 최소카이제곱추정법은 가장 먼저 OLS(Ordinary least square)를 이용하여 축약형 파라미터를 추정한다.

4.1.2. 구조 파라미터의 도출

다음 단계로 축약형 계수(coefficients)로부터 예측된 구조 파라미터를 구해야 한다. 구체적으로 OLS 추정치와 가능한 가장 가까운(close) 구조 파라미터를 추정한다. 이 때 Closeness는 정보행렬의 consistent estimate로 계산된 quadratic form을 최소화하는 것으로 정의된다.⁽¹⁴⁾

Closeness:

$$(4.4) \quad \hat{\theta}_{MCS} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} T[\hat{\pi} - g(\theta)]' \hat{R} [\hat{\pi} - g(\theta)]$$

Vector of reduced-from parameters:

$$(4.5) \quad \hat{\pi} = ([\operatorname{vec}(\hat{\Pi}_1)]', [\operatorname{vech}(\hat{\Omega}_1^*)]', [\operatorname{vec}(\hat{\Pi}_2)]', [\operatorname{vech}(\hat{\Omega}_2^*)]')'$$

앞에서 구성된 축약형 파라미터와 구조 파라미터의 함수(mapping)관계를 이용해 두 가지 방식(One-shot, Multi-step)의 알고리즘을 통해 구조 파라미터를 도출한다.⁽¹⁵⁾

5. 추정 결과(Estimation Result)

ATSM이 한국의 데이터를 얼마나 적절하게 추정하고 있는지 알아보기 위해서 모형으로 ‘오차가격 수익률’을 추정하여 실제 수치와 비교한다. 다음으로 충격 반응 분석을 실시하여 잠재 요인 또는 거시 경제 변수 변화율의 1% 변동에 대해 수익률이 어떻게 반응하는지 살펴본다. 그리고 분산 분해 분석을 통해서 각 가격 결정 요인(잠재 요인, 거시 경제 변수)의 수익률의 분산에 대한 설명력을 도출해본다. 마지막으로 예측 분석에서는 다음 기의 수익률을 예측할 경우 오차가 얼마나 되는지 RMSE와 MAD를 이용하여 분석한다.

(14) $\operatorname{vec}(X)$ 는 행렬 X 의 열들을 쌓아서 벡터로 만든다. X 가 정방형인 경우 $\operatorname{vech}(X)$ 는 principal diagonal 이하의 원소로 구성된 열을 쌓아서 벡터로 만든다.

(15) 부록 G ‘최소카이제곱추정의 두 가지 알고리즘’ 참고.

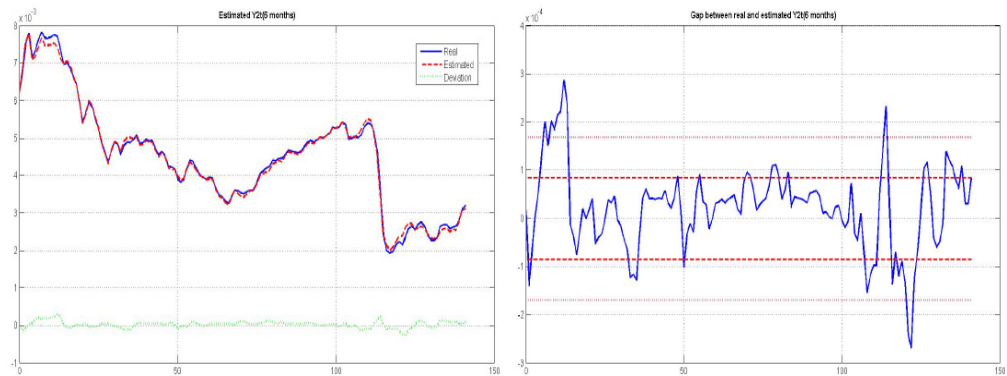
5.1. 모형의 추정 오차

5.1.1. 잠재 요인 모형의 추정 오차

이 모형은 ‘오차가격 수익률’을 6개월 만기 수익률 하나만 선택한 적정식별 모형이기 때문에 점근적으로 파라미터의 표준편차를 도출할 수 있다(〈표 4〉의 괄호 안의 수치). 〈그림 2〉의 왼쪽 그래프는 추정된 파라미터를 이용하여 ‘오차가격 수익률’인 6개월물 수익률을 모형적으로 도출하고 이것을 실제 데이터와 비교한 것이다. 그래프 상으로는 모형이 실제 수치를 잘 설명하는 것으로 보인다. 더 구체적으로 실제 데이터와 추정된 데이터의 차이가 측정오차 Σ_e 안에 위치하는지 보기 위해서 〈그림 2〉의 오른쪽 그래프에서는 편차치(=모형값-실제값), 측정오차의 표준편차($\pm 1, \pm 2$)를

〈표 4〉 잠재 요인 모형의 추정치

c	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)	c^Q	0.1425 (0.2332)	-0.0975 (23.8975)	0.7238 (3.0035)
ρ	0.9517 (0.0564)	-0.0338 (0.3444)	0.0107 (1.0944)	ρ^Q	1.0594 (0.0208)	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)
	0.1973 (1.7870)	0.7270 (3.2925)	-0.0034 (7.9639)		-0.0357 (2.9803)	0.9425 (7.2718)	0.0000 (0.0000)
	-0.0297 (6.1837)	0.1016 (7.9602)	0.9707 (3.2482)		0.0874 (1.3320)	0.2236 (0.0316)	0.9426 (7.2806)
δ_0	0.0028 (0.0015)			δ_1	0.0000 (0.0000)	0.0001 (0.0063)	0.0002 (0.0022)
				Σ_e	0.0001 (0.0000)		



〈그림 2〉 잠재 요인 모형의 피팅과 추정 오차

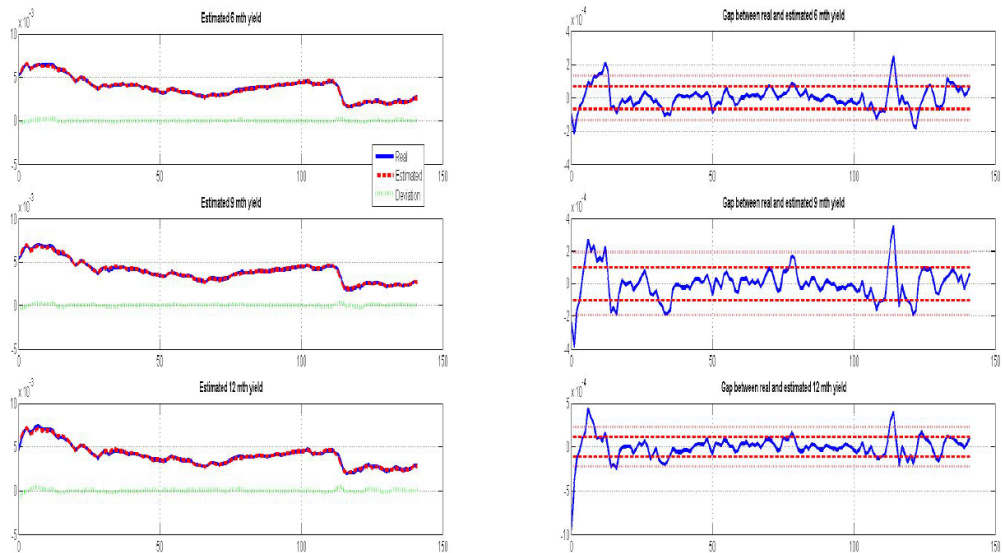
표시했다. 1999년과 2008년도 글로벌 금융 위기에만 표준편차 구간에서 벗어났을 뿐 대부분의 구간에서 모형이 적절하게 실제값을 설명하고 있다.

5.1.2. 거시-금융 모형(적정식별, 비독립)의 추정 오차

이 모형은 <표 5>에서 제시된 바와 같이 ‘오차가격 수익률’로 6개월물, 9개월물, 12개월물 수익률 세 개만 선택한 적정식별 모형이기 때문에 점근적으로 파라미터의 표준편차를 도출할 수 있다. <그림 3>은 추정된 파라미터를 이용하여 ‘오차가격 수익률’을 모형 내에서 도출하고 이것을 실제 데이터와 비교한 것이다. 왼쪽 그래프 상으로는 모형이 실제값을 잘 설명하고 있는 것으로 보인다. 더 구체적으로 실제 데이터와 추정된 데이터의 차이가 측정오차 Σ_e 안에 위치하는지 보기 위해서 <그림 3>의 왼쪽 그래프에서 편차치(=모형값-실제값), 측정오차의 표준편차($\pm 1, \pm 2$)를 표시했다. 앞의 잠재 요인 모형과 유사하게 1999년과 2008년도 글로벌 금융위기에만 표준편차 구간에서 벗어났을 뿐 대부분의 구간에서 ± 1 표준편차를 넘지 않아 모형이 실제값을 잘 설명하고 있다. 그래프를 자세히 분석해 보면 2008년도 이후에 오히려 잠재 요인 모형보다 설명력이 높다. 즉 거시 경제 변수를 포함한 분석을 통해서 모형이 수익률의 움직임을 더 잘 포착할 수 있게 되었다.

5.1.3. 거시-금융 모형(과대식별, 독립)의 추정 오차

이 모형은 ‘오차가격 수익률’로 6개월물, 9개월물, 12개월물, 18개월물, 24개월물,



<그림 3> 거시-금융 모형의 피팅과 추정 오차 (적정식별, 비독립)

〈표 5〉 거시-금융 모형(적정식별, 비독립) 추정치

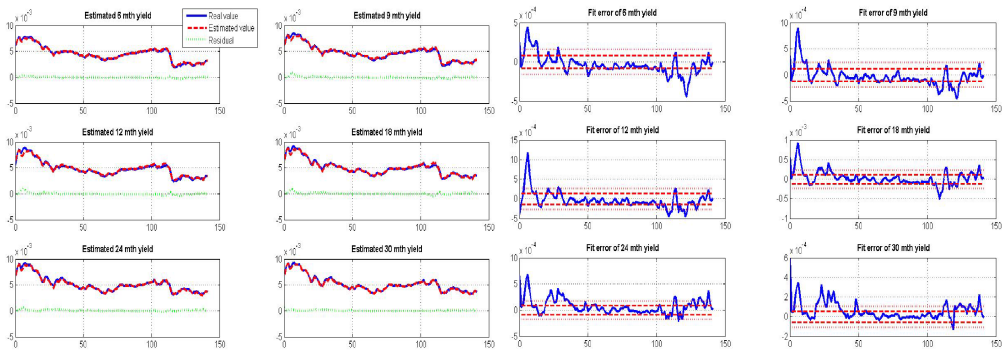
c	0.2597 (0.2674)	0.4085 (0.2595)	0.2126 (1.9677)	-0.6418 (1.9772)	0.4828 (1.1561)	c^{ρ}	1.5873 (1.2410)	0.6037 (0.4848)	0.0000	0.0000	0.0000
ρ	0.9072 (0.0412)	0.0621 (0.0452)	-0.0123 (0.0138)	0.0070 (0.0221)	0.0140 (0.0142)	ρ^{ρ}	0.5992 (0.6920)	1.9063 (1.4521)	-0.1971 (0.4057)	-0.0596 (0.3940)	-0.2397 (0.2003)
	-0.1075 (0.0344)	0.8398 (0.0378)	-0.0068 (0.0167)	-0.0211 (0.0164)	-0.0022 (0.0301)		-0.1524 (0.3130)	1.4492 (0.9935)	-0.0729 (0.2639)	-0.2155 (0.4114)	-0.0727 (0.2182)
	-0.3072 (0.1873)	0.7892 (0.5792)	0.7647 (0.1903)	-0.1695 (0.2392)	0.1768 (0.3402)		0.0176 (0.2193)	-0.1499 (0.6584)	1.0060 (0.1370)	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)
	-0.0077 (0.1706)	0.3200 (1.0241)	0.0159 (0.0906)	0.9412 (0.3742)	-0.0093 (0.0935)		-0.0257 (0.8290)	-0.1982 (0.7350)	-0.0447 (0.4541)	0.9846 (0.4048)	0.0117 (0.3543)
	0.0737 (0.2945)	0.8563 (1.4425)	0.0671 (0.1380)	0.1424 (0.1112)	0.8984 (0.2183)		0.2047 (1.9448)	-0.4182 (3.6787)	0.4310 (0.9559)	0.3628 (0.6639)	0.9846 (0.4048)
δ_0	2.96E-3 (3.99E-3)					δ_1	1.77E-5 (3.5E-5)	9.10E-5 (4.00E-5)	8.75E-5 (7.45E-5)	3.72E-5 (1.13E-4)	9.49E-5 (1.75E-4)
Σ_m	0.4186 (0.0249)	0.0000 (0.000)				Σ_e	6.75E-5 (4.04E-6)	9.75E-5 (5.83E-6)	1.12E-4 (6.74E-6)		
	0.0097 (0.0293)	0.3476 (0.0207)									

30개월물 수익률 6개를 선택하여 주어진 데이터의 모든 수익률을 사용하는 모형을 구성하였다. 단 〈표 6〉에 표시된 바와 같이 앞의 거시-금융 모형(적정식별, 비독립)과 달리 거시 경제 변수와 잠재 요인의 독립성을 가정하였다.

〈그림 4〉를 보면 2008년 이전 구간에서는 과대식별 되었음에도 앞의 두 모형과 유사하게 1999년에만 표준편차 구간에서 크게 벗어났을 뿐 대부분의 구간에서 1 표준편차를 넘지 않아 모형이 잘 추정되고 있는 것을 볼 수 있다. 하지만 2008년 글로벌 금융 위기 이후에는 장기물(18개월, 24개월, 30개월)의 예측치가 1 표준편차를 넘어간다. 이를 통해 2008년 이후 수익률과 거시 경제 변수 간의 근본적인 반응 관계에 변화가 있음을 예상할 수 있다. 이후 예측 분석(Forecasting)을 통해 이러한 분석을 다시 검토해 보도록 하겠다. 종합적으로 세 개의 모형은 한국의 데이터를 이용한 ATSM이 잘 추정되고 있음을 보여준다.

〈표 6〉 거시-금융 모형(과대식별, 독립) 추정치

c	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	c^{ρ}	-2.88E-04	-4.23E-05	-1.26E-05	-1.86E-06	7.89E-07
ρ	0.9778	0.0094	0.0000	0.0000	0.0000	ρ^{ρ}	0.9784	0.0148	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0497	0.9346	0.0000	0.0000	0.0000		0.0499	0.9358	0.0000	0.0000	0.0000
	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000		0.0000	0.0000	0.9996	0.0060	-0.0080
	0.0000	0.0000	0.0010	0.9003	0.0000		0.0000	0.0000	2.75E-04	0.9670	-0.0042
	0.0000	0.0000	-0.0049	0.0066	0.8323		0.0000	0.0000	-0.0043	1.69E-04	0.8537
δ_0	3.9994					δ_1	0.0001	4.43E-05	9.95E-05	1.02E-04	9.91E-05
Σ_m	0.4257	0.0000	0.0000								
	0.1606	3.7501	0.0000								
	8.10E-05	1.17E-04	1.35E-04								

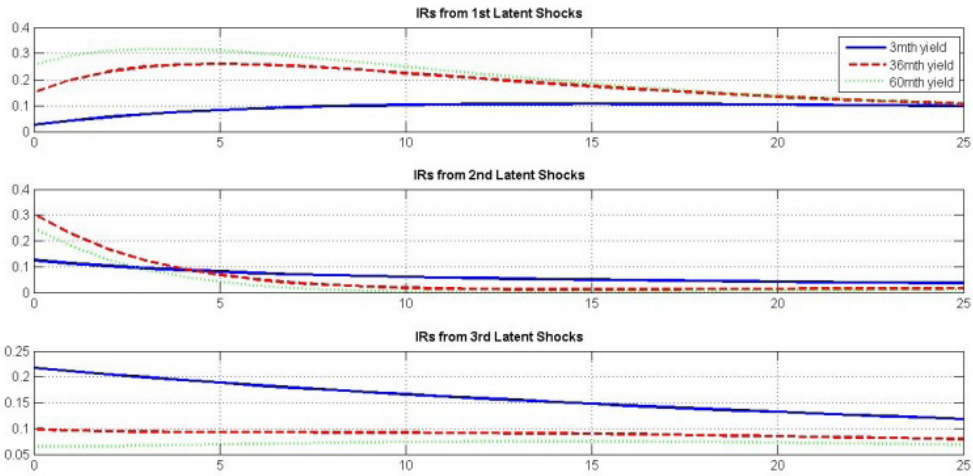


〈그림 4〉 거시-금융 모형의 피팅과 추정 오차 (과대식별, 독립성)

5.2. 충격 반응 분석(Impulse Response Analysis)

5.2.1. 잠재 요인 모형의 충격 반응 분석

〈그림 5〉는 잠재 요인 모형의 충격 반응 분석의 결과로 잠재 요인의 1 표준편차 충격에 대한 3개월, 36개월, 60개월물 수익률의 24개월 동안의 반응을 분석한 것이다. 첫 번째 잠재 요인의 충격에 대해서는 전체적으로 양의 반응이 강하게 나타나는데, 특히 장기물(60개월 수익률)의 반응이 가장 크고 단기물(3개월 수익률)의 반응이 가장 작다. 두 번째 잠재 요인의 충격에 대한 단기물의 움직임은 거의 없으나 장기물은 초기에 강하게 반응하고 급격히 하락하여 효과가 1년 이내에 거의 사라졌다. 세 번째 잠재 요인의 충격에 대해서는 3개월물이 가장 강하게 지속적으로 양의 반응을 보였고 나머지 중, 장기물은 아주 약한 반응만 보여주고 있다. Litterman and Scheinkman(1991)은 관측할 수 없는 잠재 요인을 특성에 따라 각각 Level, Slope,



〈그림 5〉 잠재 요인 모형의 충격 반응 분석

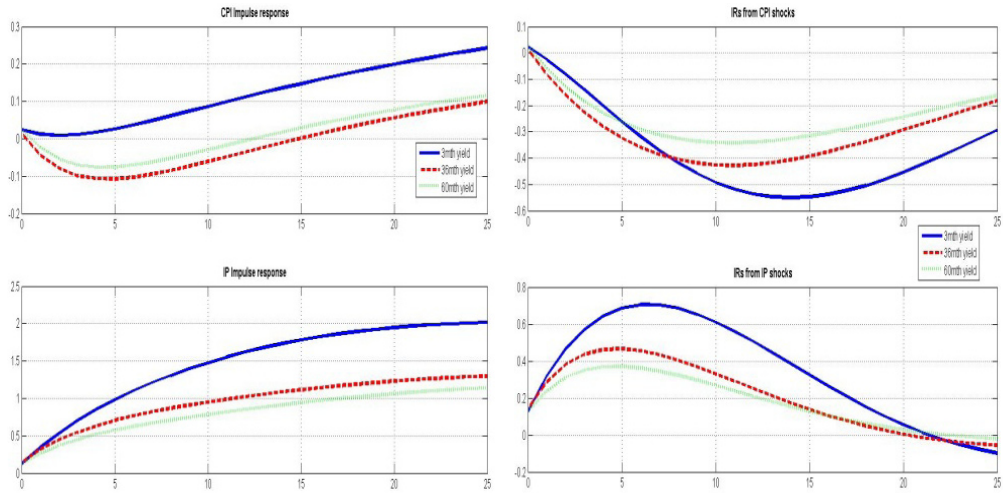
Curvature라 명명하였다.

5.2.2. 거시-금융 모형의 충격 반응 분석

본 연구의 특징은 거시 경제 변수를 포함한 모형을 추정한 것이다. 따라서 거시 변수에 대한 수익률의 반응을 해석하는 것이 더 의미 있는 작업으로 판단된다. 거시-금융 모형의 적정식별과 과대식별의 충격 반응 분석의 결과가 상당히 다르게 도출되었다. 이는 두 모형이 가지는 거시 경제 변수와 잠재 요인의 독립성 가정의 차이와 식별의 차이에 기인한 것으로 보인다.

〈그림 6〉은 각각 인플레이션과 산업생산지수 변화율의 1% 변화에 대한 수익률의 반응을 보여준다. 잠재 요인과 거시 경제 변수가 독립적이라는 가정에 이론적 근거가 부족하기 때문에 독립성을 가정하지 않는 결과가 더 현실을 적절하게 설명하고 있는 것으로 판단된다. 따라서 비독립성 모형을 중심으로 분석하겠다. 독립성을 가정하지 않은 모형의 경우 인플레이션 변화에 대해서는 수익률이 음의 반응을 보이고 산업생산지수 변화율에 대해서는 양의 반응을 보인다.

이는 본 논문의 초반부에 있는 수익률과 거시 경제 변수 간의 상관관계 분석에서 보인 특징과 일관성을 가지는 결과라 볼 수 있다. 즉, 수익률과 산업생산지수 변화율의 상관관계가 양을 보였고 수익률과 인플레이션 변화의 상관관계가 음을 보였던 결과와 유사하다. 특히 수익률이 인플레이션 변화에 대해서 음의 반응을 보이는 것은 예상하지 못한 인플레이션 증가 시, 즉 수요 측 충격(+)에 대해 자산 가격(채권 가격)



註:1) 좌: (과대식별, 독립), 우: (적정식별, 비독립).

2) 위: CPI 충격, 아래: IP 충격.

〈그림 6〉 거시-금융 모형의 충격 반응 분석

이 증가하고 따라서 수익률이 감소하는 것으로 해석할 수 있다. 또는 인플레이션 증가 시 통화당국이 인플레이션을 억제하기 위해 기준금리를 올리면서 수익률이 감소한 것으로도 해석할 수 있다.

이러한 결과는 Ang and Piazzesi(2003)와 뚜렷한 차이를 보여준다. 미국은 인플레이션과 실물경제 활동 충격에 대해서 모두 양의 반응을 보인다. 또한 단기물의 반응 폭이 가장 컸다. 한국은 두 충격에 대한 반응의 방향이 다를 뿐만 아니라 단·장기의 반응 크기와 지속성에서도 차이를 보인다. 인플레이션 충격에 대해 초반에는 장기물의 음의 반응이 더 컸지만 시간이 지남에 따라 단기물의 반응이 더 커졌다. 그리고 산업생산지수 변화율 충격에 대해 단기물의 충격이 장기물보다 지속적으로 큰 양의 반응을 보여준다. 전체 반응의 크기와 속도를 보면 산업생산지수 변화율에 대한 반응이 인플레이션의 경우 보다 더 크고 즉각적이다. 이러한 차이는 한국과 미국의 인플레이션과 실물경제 지표가 다른 시계열 관계를 가지고 있는 데 기인한다(한국은 음의 관계, 미국은 양의 관계).

5.3. 분산 분해 분석(Variance Decomposition)

〈표 7〉에 따르면 거시 경제 변수가 수익률의 분산을 설명하는 비율은 단기가 가장

〈표 7〉 수익률의 분산을 거시 경제 변수가 설명하는 비율

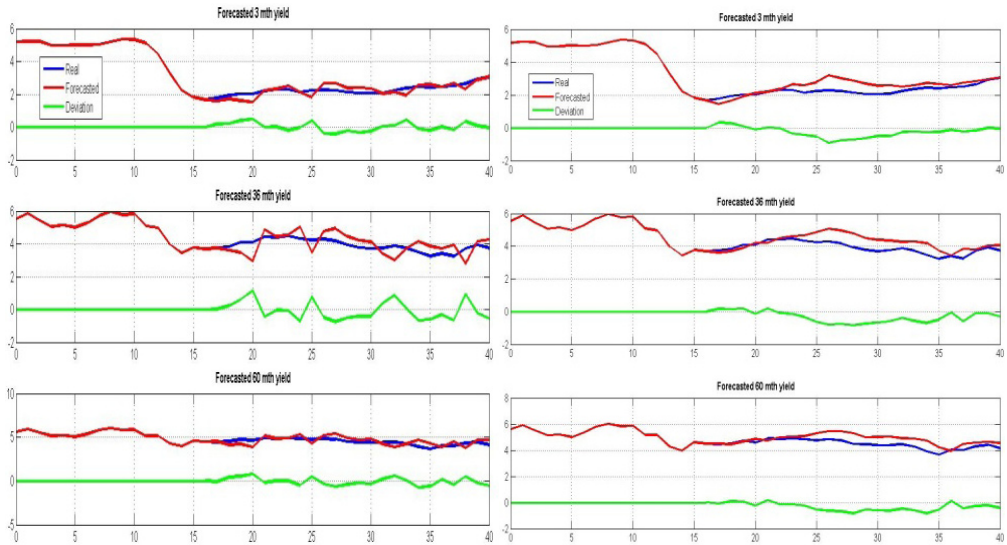
		3mth yield	36mth yield	60mth yield
1mth	CPI	0.97%	0.15%	0.63%
	IP	34.24%	21.88%	16.57%
	total	35.21%	22.03%	17.20%
6mth	CPI	7.45%	18.84%	15.50%
	IP	84.88%	61.18%	50.11%
	total	92.33%	80.03%	65.61%
12mth	CPI	22.75%	35.78%	31.17%
	IP	73.60%	50.37%	43.87%
	total	96.35%	86.15%	75.04%
60mth	CPI	45.26%	50.96%	46.35%
	IP	50.69%	35.25%	31.12%
	total	95.95%	86.21%	77.47%

크고 그 다음으로 중기와 장기이다. 이러한 결과는 Ang and Piazzesi(2003)의 결과와 유사하다. 채권의 만기가 짧을수록 거시 경제 상황에 더 민감하게 반응하는 것으로 보인다. 그리고 같은 만기의 수익률도 기간이 길어질수록 거시 경제로 설명되는 분산의 비중이 늘어난다.

구체적으로 보면 CPI가 수익률의 분산을 설명하는 비율이 초반에는 0~20% 이하로 아주 작지만 점점 커지기 시작해 1년이 되면 22~35%까지 상승하고 그 이후에도 더 커져서 60개월쯤에는 45~50%의 높은 설명력을 보여준다. IP의 경우 초반의 설명력이 17~35%로 높고 12개월 전까지 최고점을 찍다가 급격히 하락하기 시작해 24개월 무렵부터는 안정적으로 30~50%의 설명력을 보여준다. 단기(3개월)와 중·장기(36개월, 60개월)의 차이점은 단기와 달리 중·장기의 경우 대략 15개월 이후부터 CPI의 설명력이 IP의 설명력을 능가한다. 즉, 중·장기 수익률의 분산에 더 많은 부분이 CPI로 설명될 수 있다.

5.4. 예측(Forecasting)

모형의 예측력을 측정하기 위해서 샘플의 마지막 24개월을 대상으로 Out-of-sample forecasting을 실시하고, 도출된 수치로 RMSE와 MAD을 계산하여 모형 간의 예측력을 비교했다. 즉, 예측 기간을 2010년 2월부터 2012년 1월까지로 보았다. 실제 그래프를 예측을 하는 것과 동일한 방식으로 t기에 사용 가능한 정보만을 이용하



註:1) 좌: 축약형 파라미터로 예측(VAR), 우: 구조 파라미터로 예측(ATSM)

2) 붉은선: 모형으로 예측된 수익률, 파란선: 실제 수익률, 녹색선: 오차

〈그림 7〉 거시-금융 모형에서 예측된 수익률과 실제 수익률

여 $t+1$ 기의 예측치를 도출해 이를 실제 수치와 비교하여 모형의 예측력을 검증하였다. 이때 수익률은 ‘무오차가격 수익률’ 3개월, 36개월, 60개월 수익률만을 예측 대상으로 분석했다.

〈그림 7〉은 모형의 예측 결과를 그래프로 표현한 것으로 왼쪽은 거시-금융 모형(적정식별, 비독립)이고 오른쪽은 거시-금융 모형(과대식별, 독립)이다. 각 모형은 3개월, 36개월, 60개월 수익률의 예측치 그래프를 가지고 있다. 2008년도 글로벌 금융 위기로 인한 급격한 경기 침체에서 회복하기 위해 각국 정부가 양적 완화(Quantitative easing) 등의 노력을 통해 경기하강을 막고 안정기에 접어든 시점부터 경기가 회복하는 기간인 2010년도 초반부터 최근까지를 예측 기간으로 정했기 때문에 예측력에 큰 문제가 있을 것으로 예상했으나 그래프에서 볼 수 있듯이 만기가 긴 수익률일수록 비교적 안정적인 예측력을 보여주고 있다. 특히 24개월 예측 기간을 3개의 구간으로 분리했을 때, 중간 구간을 제외한 첫 번째와 마지막 구간의 예측력이 더 높은 것을 확인할 수 있다.

예측력을 비교하기 위해서 예측된 수치와 실제 수치의 차이(deviation)을 이용하여 RMSE(Root Mean Squared Error)와 MAD(Mean Absolute Deviation)을 계산하였다.

〈표 8〉 예측 결과 비교

		VARs			ATSM		
MF(just,independent) (Jun 1999~May 2011)	Yield	3 mth	36 mth	60 mth	3 mth	36 mth	60 mth
	MAD	0.3282	0.4049	0.3966	0.2165	0.4946	0.3800
	RMSE	0.4122	0.4848	0.4642	0.2650	0.5751	0.4387
MF(over,dependent) (Jun 1999~May 2011)	Yield	3 mth	36 mth	60 mth	3 mth	36 mth	60 mth
	MAD	0.3282	0.4049	0.3966	0.2580	0.4364	0.4796
	RMSE	0.4122	0.4848	0.4642	0.3004	0.5091	0.5543
Ang and Piazzesi(2003) (Jun 1952~Dec 2000)	Yield	1 mth	12 mth	60mth	1 mth	12 mth	60mth
	MAD	0.3242	0.2204	0.2930	0.2039	0.1559	0.1883
	RMSE	0.3990	0.2722	0.3725	0.2889	0.1851	0.2333
Hamilton and Wu(2012) (1960:Q1~2006:Q4)	Yield	1 yr	5 yr	10 yr	1 yr	5 yr	10 yr
	MAD	0.9355	0.7896	0.7697	1.8178	1.5387	0.9561
	RMSE	1.0685	0.8816	0.8555	2.0994	1.7279	1.0593

두 수치가 더 작을수록 더 높은 예측력을 가진 모형이라 판단할 수 있다. 도출된 수치를 Ang and Piazzesi(2003)와 Hamilton and Wu(2012)의 예측 결과와 비교하였다. 이때 Hamilton and Wu(2012)는 구조 파라미터까지만 추정하였기 때문에 본 연구에서 추가적으로 예측 분석을 실시하여 MAD와 RMSE를 도출하였다. 또한 각 연구의 무오차가격 수익률만을 비교 대상으로 사용하였다.

〈표 8〉의 VAR은 단순히 축약형 파라미터를 사용하여 예측한 수치이고, ATSM은 구조 파라미터를 이용하여 도출한 예측 결과를 제시한 것이다. 구체적인 수치를 비교해 보면 Ang and Piazzesi(2003)의 연구 결과에서 ATSM이 우월한 예측력을 보였지만 Hamilton and Wu(2012)에서는 오히려 예측력이 감소했다. 본 연구의 예측 능력을 보면 단기(3개월물), 장기(60개월물)의 경우 ATSM의 예측력이 높았지만 중기(36개월물)의 경우 VAR의 예측력이 다소 높았다.

한국의 데이터를 통해 도출된 결과를 분석해보면 적정식별 MF 모형의 경우 MAD와 RMSE 둘 다 단기 수익률(3개월), 장기 수익률(60개월), 중기 수익률(36개월) 순으로 예측의 오차가 적었다. 그러나 과대식별 MF 모형의 경우에는 단기 수익률(3개월), 중기 수익률(36개월), 장기 수익률(60개월) 순으로 예측 오차가 적었다. 또한 단기 수익률과 장기 수익률은 적정식별 MF 모형이 더 좋은 예측력을 가지고 있는 반면, 중기 수익률은 과대식별 MF 모형이 더 좋은 예측력을 보여줬다. 종합적으로 Ang

and Piazzesi(2003)는 RMSE 기준으로 0.1851에서 0.2889의 예측치를 가지고 있고 본 연구는 0.2650에서 0.5751의 예측치를 가지고 있어 미국의 데이터를 사용한 경우보다 예측력이 부족함을 볼 수 있다. 하지만 Hamilton and Wu(2012)의 예측치가 모두 1을 넘어 이 모형보다는 본 모형의 예측력이 더 뛰어남을 볼 수 있다.

6. 결론

본 논문은 Affine Term structure model(Gaussian Dynamic Term structure model)을 분석 도구로 이용하여 한국의 수익률과 인플레이션, 산업생산지수 변화율과 같은 거시 경제 변수 간의 관계를 분석하였다. 특히 기존의 추정 방법인 최우추정법이 아닌 최소카이제곱추정법을 이용하여 추정을 시도한 것이 특징이다. 즉, ATSM을 한국 데이터 실증 분석에 적용하기 위해 최소카이제곱추정법이 유용한 방법인가 그리고 그 결과가 의미하는 것이 무엇인가를 보고자 했다.

분석 결과에 의하면, 한국 데이터를 이용한 어파인 이자율기간구조모형은 최소카이제곱추정법으로 간편하게 추정될 수 있다. 이때 수익률 데이터만 사용한 잠재 요인 모형뿐만 아니라 거시 경제 변수를 도입한 거시-금융 모형의 추정 오차도 측정 오차 이내에 존재하여 모형의 실제값에 대한 설명력이 높음을 확인할 수 있었다. 다음으로 충격 반응 분석의 결과는 미국의 데이터를 이용한 선행 연구와 다른 결과를 보여주었다. 미국이 수요 충격에 수익률이 강하게 반응하는 것과 달리 한국은 공급 충격의 수익률 효과가 더 크게 나타났다. 인플레이션의 1% 상승에 대해서 수익률이 음의 반응을 보였고 장기 수익률보다 단기 수익률의 반응이 더 오래 지속되었다. 그리고 산업생산지수 변화율의 1% 상승에 대해서 수익률이 양의 반응을 보였고 전자의 경우 보다 더 크고 즉각적으로 반응했다. 또한 단기 수익률의 최대 반응치는 중장기 수익률의 두 배였다. 또한 분산 분해 분석의 결과에 따르면 거시 경제 변수는 수익률의 분산을 77~96% 설명할 수 있다. 또한 미국의 선행 연구와 유사하게 만기가 짧을 수록 설명해야 하는 기간이 길어질수록 설명력은 높아진다.

전통적인 최우추정법을 이용한 추정이 아닌 최소카이제곱추정법을 이용한 추정에는 몇 가지 문제점이 발견되었다. Hamilton and Wu(2012)에 따르면 최소카이제곱추정법을 두 번 실시하는 multi-step process는 더 쉽게 빨리 추정되지만, 이 방법을 이용한 결과가 one-step process의 결과와 다를 경우 어떤 추정치가 더 적합한지에 대한

문제가 있다. 또한 multi-step의 첫 번째 단계에서 $\rho, \rho^{\ell}, \delta_1$ 를 찾고 나서 이 수치를 이용해 두 번째 단계에서 c, c^{ℓ}, δ_0 를 추정하면 비현실적으로 크거나 작은 수치가 추정되는 문제점이 발생한다. 또한 기존의 ATSM이 가지는 해결되지 않는 문제점도 확인하였다. ATSM 모형에서 수익률 그룹을 ‘무오차가격 수익률’과 ‘오차가격 수익률’로 나누는 명확한 기준을 제시하지 못하고 있다. 이는 ASTM이 아직 해결하지 못한 문제로 이 부분에 관한 구체적인 근거를 제시할 수 있도록 연구가 보충되어야 할 것이다.

추후 연구를 통해 구조적인 거시 경제 모형과 본 연구의 모형을 연결하여 거시 경제 변수와 수익률의 관계를 구조적으로 분석해볼 필요가 있다. 그리고 ATSM에서 도출되는 시간가변적 위험 가격(time-varying price of risk)을 모형의 분석에 이용하여 거시 경제 변수와 수익률의 움직임을 좀 더 정교하게 분석해보는 것도 의미 있을 것이다. 분석에 사용된 거시 경제 변수를 다른 변수로 교체하여 수익률과 더 밀접한 관계를 보이는 변수를 찾거나 포함되는 거시 경제 변수의 시차를 2차 이상으로 늘려 현실 설명력을 높일 수도 있다. 마지막으로 본 모형을 이용하여 미국, 중국, 유럽 등과 같은 타 국가들을 대상으로 거시 경제와 금융 시장의 연관성을 분석하여 시장구조를 비교 분석하는 연구를 통해 모형의 확장시켜 보는 것도 의미 있는 연구가 될 것이다.

서울대학교 사회과학대학원 경제학부 박사과정

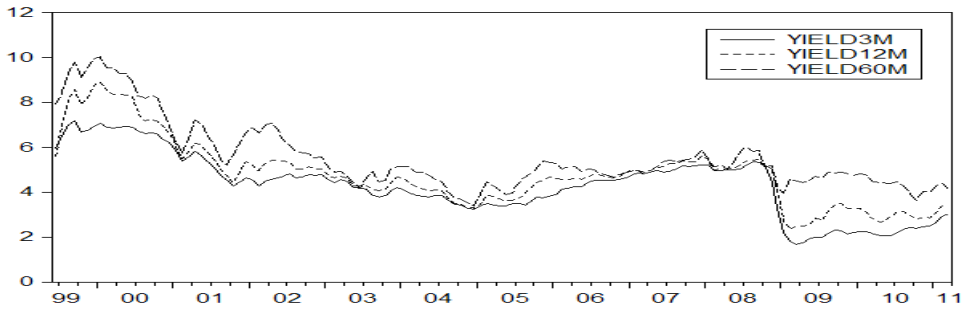
151-742 서울특별시 관악구 대학동 서울대학교 220동 547호

전화: 010-4156-1368

E-mail: docjin.jang@gmail.com

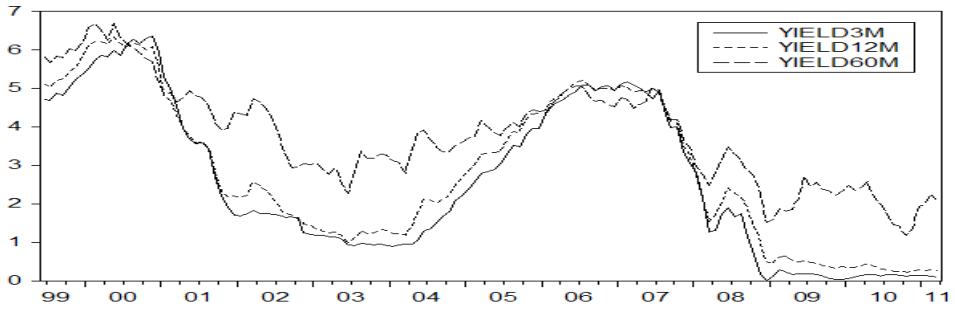
부 록

부록 A. 한국과 미국의 월별 무이표채 수익률



資料: KIS 채권평가.

〈그림 8〉 한국의 잔존만기별 국고채 수익률 (월별)



資料: FRED database of the Federal Reserve Bank of St. Louis.

〈그림 9〉 미국의 잔존만기별 국고채 수익률 (월별)

부록 B. 잔존만기별 한국 국채의 거래 규모

〈표 9〉 한국 잔존만기별 국고채의 거래량, 거래 건, 거래 대금
(2010년 3월~2011년 3월) (단위: 1억달러)

잔존만기	-6개월	6개월-1년	1년-2년	2년-3년	3년-5년	5년-10년	10년-20년
거래량	903010	478714	2392212	9070669	16480873	4686451	515241
거래 건	7153	4261	22429	92096	170201	59545	7308
거래 대금	926042	495492	2454102	9245325	16880183	4953650	471687

資料: 금융투자협회(<http://freesis.kofia.or.kr/>).

부록 C. 거시 경제 변수와 수익률 간의 상관관계

〈표 10〉 거시 경제 변수와 수익률 간의 상관관계

	CPI	IP	3 mth	36 mth	60 mth
IP	-0.4884				
3 mth	-0.1781	0.3240			
36 mth	-0.3593	0.4686	0.8884		
60 mth	-0.3805	0.4797	0.8263	0.9873	
Spread	-0.3854	0.3278	-0.1390	0.3215	0.4426

資料: 한국은행 ECOS, Thomson Reuters Datastream, 자체 분석.

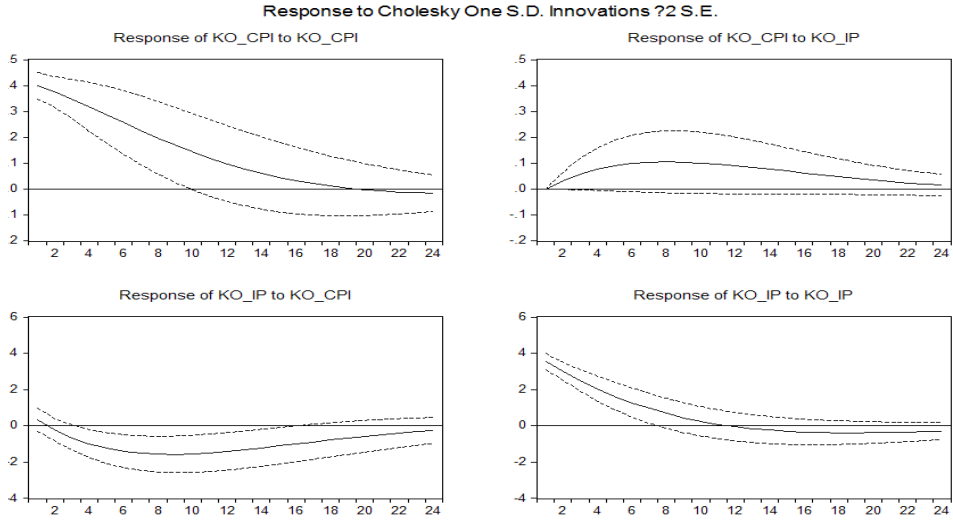
부록 D. CPI와 IP의 VAR 분석 결과

$$f_t^m = \rho_1 f_{t-1}^m + \Omega u_m^t \quad \text{where} \quad u_t^m \sim i.i.d.N(0, I)$$

〈표 11〉 한국의 CPI와 IP의 VAR 분석 결과

	CPI	IP
CPI(-1)	0.9248 -0.0399 [23.1739]	-1.1995 -0.3359 [-3.5706]
IP(-1)	0.0053 -0.0043 [1.2273]	0.8386 -0.0367 [22.8362]
C	0.2079 -0.1476 [1.4081]	4.9037 -1.2431 [3.9445]
R-squared	0.8301	0.8547
Adj. R-squared	0.8276	0.8526
Sum sq. resids	25.1955	1785.311
S.E. equation	0.4272	3.5968
F-statistic	337.169	405.9458
Log likelihood	-78.6628	-379.041
Akaike AIC	1.1583	5.419
Schwarz SC	1.221	5.4817
Mean dependent	3.0403	8.723
S.D. dependent	1.0292	9.3689
Determinant resid covariance(dof adj.)		2.3619
Determinant resid covariance		2.2624
Log likelihood		-457.702
Akaike information criterion		6.5773
Schwarz criterion		6.7028

주: Standard errors in () & t-statistics in [].



〈그림 10〉 한국 CPI와 IP의 충격 반응 분석

한국의 CPI와 IP의 상대 충격에 대한 반응의 크기는 유사한 것으로 나타난다. IP 충격에 CPI는 hump-shaped로 반응하는데, 단기에 양의 반응했다가 시간이 지나면서 양과 음을 진동하다 사라진다. CPI 충격에 IP는 충격 직후 약하게 양의 반응을 하고 바로 크게 음의 반응하고 다시 양과 음을 오가며 진동하다 사라진다. 이는 두 변수가 명확한 시계열 관계를 지니고 있음을 보여준다.

부록 E. 명목 채권 가격 도출 ($x_t = \log X_t$)

$$\begin{aligned}
 p_{n+1,t} &= E_t[m_{t+1}p_{n,t+1}] \\
 &= E_t[-r_t - \frac{1}{2}\lambda'_t\lambda_t - \lambda'_tu_{t+1} + \bar{a}_n + \bar{b}'_nF_{t+1}] \\
 &= (-r_t - \frac{1}{2}\lambda'_t\lambda_t + \bar{a}_n) + E_t[-\lambda'_tu_{t+1} + \bar{b}'_nF_{t+1}] \\
 &= (-r_t - \frac{1}{2}\lambda'_t\lambda_t + \bar{a}_n) + E_t[-\lambda'_tu_{t+1} + \bar{b}'_n(c + \rho F_t + \Sigma u_{t+1})] \\
 &= (-\delta_0 - \delta'_1F_t + \bar{a}_n + \bar{b}'_nc + \bar{b}'_n\rho F_t - \frac{1}{2}\lambda'_t\lambda_t) + E_t[(-\lambda'_t + \bar{b}'_n\Sigma)u_{t+1}] \\
 &= -\delta_0 + \bar{a}_n + \bar{b}'_n(c - \Sigma\lambda) + \frac{1}{2}\bar{b}'_n\Sigma\Sigma'\bar{b}_n - \delta'_1F_t + \bar{b}'_n\rho F_t - \bar{b}'_n\Sigma\Lambda F_t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [\bar{a}_n + \bar{b}'_n(c - \Sigma\lambda) + \frac{1}{2}\bar{b}'_n\Sigma\Sigma'\bar{b}_n - \delta_0] + [\bar{b}'_n(\rho - \Sigma\Lambda) - \delta'_1]F_t \\
 &= \bar{a}_{n+1} + \bar{b}'_{n+1}F_t
 \end{aligned}$$

위의 도출과정에서 $E[u_t] = 0$, $\lambda'_t \lambda_t = \lambda'_t \text{var}(u_t) \lambda_t$ 을 이용하였다[Ang and Piazzesi (2003)].

부록 F. 거시-금융 모형의 축약형 방정식 유도

거시-금융 모형에서 사용되는 정규화 조건은 다양하나, 대부분 공통적으로 $\Sigma_{ll} = I_{N_l}$, $\Sigma_{lm} = \Sigma_{ml} = 0$ 을 가정하므로 이 최소한의 조건을 적용하여 축약형 방정식을 도출한다.

$$f_t^m = c_m + \rho_{mm}f_{t-1}^m + \rho_{ml}f_{t-1}^l + \Sigma_{mm}u_t^m$$

$$f_t^l = c_l + \rho_{lm}f_{t-1}^m + \rho_{ll}f_{t-1}^l + u_t^l$$

ATSM의 거시-금융 모형들은 축약형 방정식으로 ‘Factor 방정식(f_t^m), 무오차가격 수익률($Y_{1,t}$), 오차가격 수익률($Y_{2,t}$)’ 세 그룹의 VAR 방정식을 가진다. 따라서 이를 순서대로 도출하고자 한다.

(1) 가격 결정 방정식의 축약형 방정식

가장 먼저 $Y_{1,t} = A_1 + B_1 F_t$ 로부터 $B_1 = [B_{1m} \ B_{1l}]$ 임을 이용하여 $Y_{1,t} = A_1 + B_{1m}f_t^m + B_{1l}f_t^l$ 를 도출한다. 이 식은 이후에도 계속해서 사용된다. 거시 경제 변수 식에 $f_{t-1}^l = B_{1l}^{-1}(Y_{1,t-1} - A_1 - B_{1m}f_{t-1}^m)$ 을 대입하여 도출된 식은 식(3.27)과 동일하다.

$$\begin{aligned}
 f_t^m &= c_m + \rho_{mm}f_{t-1}^m + \rho_{ml} [B_{1l}^{-1} (Y_{1,t-1} - A_1 - B_{1m}f_{t-1}^m)] + \Sigma_{mm}u_t^m \\
 &= c_m - \rho_{ml} B_{1l}^{-1} A_1 + (\rho_{mm} - \rho_{ml} B_{1l}^{-1} B_{1m})f_{t-1}^m + \rho_{ml} B_{1l}^{-1} Y_{1,t-1} + \Sigma_{mm}u_t^m
 \end{aligned}$$

(2) ‘무오차가격 수익률’의 축약형 방정식

앞의 잠재 요인 식의 양변에 B_{1l} 을 곱한 후 $A_1 + B_{1m}f_t^m$ 을 더하면,

$$A_1 + B_{1m}f_t^m + B_{1l}f_t^l = A_1 + B_{1m}f_t^m + B_{1l}c_l + B_{1l}\rho_{lm}f_{t-1}^m + B_{1l}\rho_{ll}f_{t-1}^l + B_{1l}u_t^l$$

위의 식의 좌변에 $A_1 + B_{1l}f_t^m + B_{1l}f_t^l = Y_{1t}$ 을 대입하고, 우변에 $f_{t-1}^l = B_{1l}^{-1}(Y_{1,t-1} - A_1 - B_{1m}f_{t-1}^m)$ 을 대입하여 도출된 식은 식 (3.28)과 동일하다.

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= A_1 + B_{1m}f_t^m + B_{1l}c_l + B_{1l}\rho_{lm}f_{t-1}^m - B_{1l}\rho_{ll}[B_{1l}^{-1}(A_1 + B_{1m}f_{t-1}^m)] + B_{1l}u_t^l \\ Y_{1t} &= A_1 + B_{1l}c_l - B_{1l}\rho_{ll}B_{1l}^{-1}A_1 + (B_{1l}\rho_{lm} - B_{1l}\rho_{ll}B_{1l}^{-1}B_{1m})f_{t-1}^m \\ &\quad + B_{1l}\rho_{ll}B_{1l}^{-1}Y_{1,t-1} + B_{1m}f_t^m + B_{1l}u_t^l \end{aligned}$$

(3) ‘오차가격 수익률’의 축약형 방정식

$Y_{2,t} = A_2 + B_2 F_t$ 로부터 $B_2 = [B_{2m} \ B_{2l}]$ 임을 이용하여 $Y_{2,t} = A_2 + B_{2m}f_t^m + B_{2l}f_t^l$ 를 도출한다. 이 식의 우변에 $f_t^l = B_{1l}^{-1}(Y_{1,t-1} - A_1 - B_{1m}f_t^m)$ 을 대입하여 도출된 식은 식 (3.29)와 동일하다.

$$Y_{2,t} = [A_2 + B_{2l}B_{1l}^{-1}A_1] + [B_{2m} - B_{2l}B_{1l}^{-1}B_{1m}]f_t^m + B_{2l}B_{1l}^{-1}Y_{1,t} + u_{2t}$$

부록 G. 최소카이제곱추정의 두 가지 알고리즘[Hamilton and Wu(2012)]

(1) One-shot algorithm

Step 1. 거시 경제 변수와 잠재 요인의 독립성 가정으로 인해 거시 경제 변수의 축약형 방정식의 파라미터로부터 직접 ‘ $c_m, \rho_{mm}, \Sigma_{mm}$ ’을 도출할 수 있다. 또한 Σ_e 의 추정 은 $\hat{\Omega}_2^*$ 의 제곱근으로부터 분석적으로 도출한다. 즉, 최적화 도구를 이용하여 가능한 최적값을 찾는다.

Step 2. 나머지 구조 파라미터 $\{c, \rho, \delta_0, \delta_1, \Lambda, \lambda\}$ 30개의 추정은 최소카이제곱추정법을 이용하여 수치적으로 계산된다. 즉, 단순한 행렬 계산을 통해서 정확한 값을 구한다. 구체적으로 $\hat{\Omega}_2^*$ 를 제외한 나머지 3개의 블록을 이용하여 추정을 실행한다. 이

때 서로 다른 블록에 대해 값이 최소카이제곱값으로 사용되므로 정보행렬을 이용하여 적절하게 가중치를 부과하여 추정값을 도출한다.⁽¹⁶⁾

(2) Multi-step algorithm

축약형의 잔차항이 가지는 직교성으로 인해 각각의 블록에서 추정을 분리하여 실행할 수 있다. 추정 과정은 다음의 multi-step algorithm을 통해서 Closeness를 최소화 하는 구조 파라미터를 찾는다.

Step 1. 위의 One-shot algorithm과 동일한 과정을 거쳐 $\{c_m, \rho_{mm}, \Sigma_{mm}, \hat{\Omega}_2^{**}\}$ 을 분석적으로 도출한다.

Step 2. $\{\rho^o, \delta_1\}$ 의 24개 추정치는 최소카이제곱추정법을 이용하여 numerical하게 도출된다. 이때 ρ^o 가 complex root를 가지는 경우에는 최소카이제곱을 최소화할 수 없게 되므로 하삼각행렬이 아닌 다른 적절한 가정(reparameterized)을 통해서 ρ^o 가 complex roots를 가지지 않게 해야 한다.

Step 3. $\{c^o, \delta_0\}$ 의 6개 추정치를 최소카이제곱추정법을 통해서 수치적으로 계산한다.

부록 H. 한국 수익률 데이터에 대한 기본 통계분석

〈표 12〉 수익률 데이터에 대한 기본 통계치와 자기상관

	Mean	Std. Dev.	Skewness	Kurtosis	Lag 1	Lag 2	Lag 3
3 mth	4.3237	1.3874	0.0684	2.4943	0.9800	0.9420	0.8960
6 mth	4.5321	1.4574	0.4019	2.8558	0.9790	0.9400	0.8930
9 mth	4.7078	1.4795	0.6897	3.2563	0.9770	0.9360	0.8880
12 mth	4.8108	1.4936	0.8636	3.5717	0.9750	0.9280	0.8780
18 mth	5.0237	1.4816	1.0579	3.7838	0.9720	0.9230	0.8710
24 mth	5.1482	1.4806	1.1157	3.7833	0.9690	0.9170	0.8620
30 mth	5.2007	1.4781	1.1793	3.8378	0.9680	0.9170	0.8600
36 mth	5.2068	1.4667	1.2576	4.0102	0.9680	0.9150	0.8580
60 mth	5.5542	1.5322	1.4049	4.2569	0.9660	0.9160	0.8640

資料: KIS채권평가, 자체분석.

(16) 적정식별 된 경우 Matlab의 fsolve 사용, 과대식별 된 경우 fminunc 사용.

분석의 대상이 되는 다양한 잔존 만기의 수익률에 대해 기술적인 통계치를 살펴보자. 만기가 길수록 기간 프리미엄이 커져 평균값(Mean)이 증가하는 것을 볼 수 있다. 만기가 길수록 표준편차(Std. Dev.)가 증가하는 경향이 있는데 만기가 짧은 경우 기준금리와 긴밀하게 반응하여 변동성이 낮고 또한 경제 상황에 따른 위험 프리미엄에 영향도 덜 받기 때문에 장기보다 단기에 표준편차가 작은 것으로 보인다. 자기상관이 단기보다 장기에 작아지는 것도 장기 채권의 변동성이 더 큰 것과 일치하는 것으로 분석될 수 있다. 이는 미국의 데이터와 큰 차이를 보이는데 미국의 경우에는 표준편차와 자기상관에 있어서 한국과 반대의 성향을 보여준다. 또한 편도(Skewness)와 첨도(Kurtosis)도 만기가 길수록 커지는 것으로 보아 장기 채권이 단기 채권에 비해서 상당히 불안정한 것을 볼 수 있다. Jarque-Bera 수치에 따르면 3개월, 6개월 만기 수익률을 제외하고 9개월부터 5년 만기 수익률은 모두 정규분포를 따르지 않는 것으로 나타난다.

Ang and Piazzesi(2003)는 ‘무오차가격 수익률(Yields priced without error)’ 그룹과 ‘오차가격 수익률(Yields priced with error)’ 그룹을 나누는 중요한 기준으로 수익률 간 상관관계를 사용했다. 정형화된 사실(stylized fact)의 하나로 가까운 만기일수록 상관관계가 높다는 것은 한국의 데이터도 일치하는 부분이다. 하지만 미국의 경우와 달리 한국의 경우에는 3년과 5년 만기의 수익률 관계를 제외한 모든 인접한 만기의 수익률 간의 상관관계가 0.99가 넘는다. 따라서 Ang and Piazzesi(2003)와 같은 기준으로 수익률을 두 그룹으로 나눌 수 없다.

참 고 문 헌

- 엄영호 · 이준희 · 지현준(2007): “한국의 이자율 기간구조와 통화정책”, 『한국금융학회지』, **12. 4**, 120-166.
- Ang, Andrew, and Monika Piazzesi(2003): “A No-arbitrage Vector Autoregression of Term Structure Dynamics with Macroeconomic and Latent Variables,” *Journal of Monetary Economics*, **50**, 745-787.
- Dai, Qiang, and Kenneth J. Singleton(2000): “Specification Analysis of Affine Term Structure Models,” *The Journal of Finance*, **55, 5**, 1943-1978.
- _____(2002): “Expectation Puzzles, Time-varying Risk Premia, and Affine Models of

- the Term Structure,” *Journal of Financial Economics*, **63**, 415-441.
- Duffee, Gregory R.(2002): “Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models,” *The Journal of Finance*, **57**, **1**, 405-443.
- Duffie, Darrell, and Rui Kan(1996): “A Yield-Factor Model of Interest Rates,” *Mathematical Finance*, **6**, **4**, 379-406.
- Duffie, Darrel, Jun Pan, and Kenneth Singleton(2000): “Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-diffusions,” *Econometrica*, **68**, **6**, 1343-1376.
- Hamilton, James D., and Jing Cynthia Wu(2011): “Testable Implications of Affine Term Structure Models,” Forthcoming in *Journal of Econometrics*.
- _____ (2012): “Identification and Estimation of Gaussian Affine Term Structure Models,” Forthcoming in *Journal of Econometrics*.
- Harrison, J. M., and David M. Kreps(1979): “Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets,” *Journal of Economic theory*, **20**, 381-408.
- Joslin, S., K. J. Singleton, and H. Zhu(2011): “A New Perspective on Gaussian Dynamic Term Structure Models,” *Review of Financial Studies*, **24**, **3**, 926-970.
- Litterman, R., and J.A. Scheinkman(1991): “Common Factors Affecting Bond Returns,” *Journal of Fixed Income*, **1**, 51-61.
- Magnus, Jan R., and Heinz Neudecker(1988): *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, John Wiley and Sons, Ltd.
- Pericoli, M., and M. Taboga(2008): “Canonical Term Structure Models with Observable Factors and the Dynamics of Bond Risk Premia,” *Journal of Money, Credit and Banking*, **40**, **7**, 1471-1488.
- Rothenberg, Thomas J.(1973): *Efficient Estimation with a Priori Information*, New Haven, Yale University Press.
- Vasicek, Oldrich(1977): “An Equilibrium Characterization of the Term Structure,” *Journal of Financial Economics*, **5**, 177-188.

Abstract

An Empirical Analysis of Affine Term Structure Model Using Korean Macroeconomic Variables

Doc-Jin Jang

This paper analyzed short-term relationships between Korean macro-economy and financial market using Affine Term structure model. In this model I used nine yields of Korean Treasury Bonds as financial variables, and adopted Consumption Price Index and Industry Production as macro variables. Data set was collected from June 1999 to March 2011. I estimated models by Minimum-chi-square estimation which was proposed by Hamilton and Wu (2012). Affine Term structure models using Korean data set also can be estimated easily by Minimum-chi-square estimation.

The estimation results showed that: First, American yields response stronger when the shock is from demand side (Ang and Piazzesi, 2003). But Korean yields strongly response when the shock is from supply side. Korean yields show negative responses from CPI shock and positive responses from IP shock. Yields' responses from IP shock are quicker and stronger than those from CPI shock. Short-term yield's response is twice as large as long-term yield's.; Second, CPI and IP explain 77~96% variance of yields. Their explanatory power is improved by shorter maturity yield and longer response period. This result is similar to Ang and Piazzesi (2003)'s result of Variance decomposition analysis.

Keywords: Affine Term structure model, Minimum Chi-square estimation, Macro-Finance model, An empirical analysis, Macroeconomic variables

