Black-Scholes식의 다양한 유도[1]

최 병 선

이 논문의 목적은 유럽형옵션의 공정한 가치를 나타내는 Black-Scholes식을 유도하는 다양한 방법들을 소개하는 것이다. 이 서베이 논문에서는 격자나무와 중심극한정리를 바탕으로 하는 이항나무모형법, 포트폴리오와 복제를 바탕으로 하는 편미분방정식법, 헤징을 이용하는 편미분방정식법, 위험의 시장가격을 이용하는 편미분방정식법, 제2의 금융파생상품을 이용하는 편미분방정식법, Radon-Nikodym정리를 바탕으로 하는 위험중립가치평가법, Girsanov정리를 사용해서 위험중립가치평가식의 계산을 간단히 하는 마팅게일법, 기준재를 치환하는 동치마팅게일법, Feynman-Kac정리를 사용해서 Black-Scholes방정식을 유도하는 방법, Kolmogorov의 후향방정식을 이용해서 Black-Scholes방정식을 유도하는 방법, Kolmogorov의 전향방정식을 이용해서 유럽형콜옵션가치에 대한 새로운 편미분방정식을 유도하는 방법, 지수형 효용함수의 기대값을 최대화하는 방법, 다변량 Girsanov정리를 적용해서 효용함수에 관한 기대값을 간단히 구하는 방법, CAPM을 이용하는 방법, Hamilton-Jacobi-Bellman방정식을 사용하는 방법, 특성함수를 이용하는 방법, Plancharel-Parseval등식을 사용하는 방법, 엔트로피를 최대화하는 방법, Kullback-Leibler정보수를 최소화하는 방법, 그리고 SLSG전략을 사용하는 방법을 적용해서 Black-Scholes식을 유도한다. 이 논문에서 소개한 방법들은 Black-Scholes식을 유도하는 데 사용될 뿐 아니라 금융공학이론을 전개하는 데 사용되는 핵심적인 것들이다.

주제어: Black-Scholes식, 편미분방정식, 이항나무모형, 위험중립, 마팅게일, 동치측도, Feynman-Kac정리, Kolmogorov방정식, 기준재, 효용함수, CAPM, 복소적분, 최대엔트로피, Kullback-Leibler정보량

1. 서론

대표적인 금융파생상품인 옵션은 오래전부터 미래의 불확실성에 동반되는 위험을 헤징하기 위한 수단으로 사용되어 왔다. 그러나 옵션의 합리적 가격을 결정짓는 적절한 이론이 없었기 때문에, 옵션매매자는 경험을 바탕으로 옵션가격을 정했다

(1) 본 논문의 초교를 교정해준 고정훈, 김지운, 노정호, 그리고 변준석군에게 감사의 뜻을 전한다.

고 한다. 이 가치평가문제에 대한 해답을 처음 제시한 사람은 Bachelier(1900)이다. 그러나 그의 업적은 오랫동안 도서관에 묻혀져 있었고, 이를 재조명한 것은 1955년 P. Samuelson이다. 이 역사적 사실에 대해서는 Taqqu(2001), Boyle and Boyle(2001) 그리고 Moore and Juh(2006)를 참조하라. 그 후로도 옵션의 가치평가문제는 오랫동안 풀기 어려운 문제로 알려져 왔으며, 1900년대 말에 들어와서 Black and Scholes(1973)가 이 문제에 대한 해답을 제시하였다. 그들이 확률미적분에서 다루는 Ito-Doeblin보조정리를 적용해서, 오늘날 우리가 Black-Scholes식이라 부르는 옵션의 가치평가식을 발견한 것은 1969년 말이다. 그러나 이 논문은 저명한 2개의 학술잡지들에서 게재를 거절당했다고 한다. Derman(2004)에 의하면, F. Black과 M. Scholes는 Chicago대학의 M. Miller 교수에게 부탁해서 1973년 *Journal of Political Economy*에 게재 허락을 받았다고 한다. 같은 해에 시카고옵션거래소(CBOE: Chicago Board Options Exchange)가 개설되어 주가나 주가지수를 원자산으로 하는 옵션이 활발하게 거래되기 시작하였고, 이후 옵션시장은 눈부시게 발전하였다. 만약 Black-Scholes식이 없었다면, 이러한 옵션시장의 발전은 없었을 것이다. Merton(1973)은 헤징이나 자기금융조건(self-financing condition)과 같은 새로운 재무적 개념을 도입해서 Black-Scholes식을 설명하였고, 또한 Black-Scholes식을 일반화시켜 다른 금융상품의 가치평가에 응용하였다. 그래서 Black-Scholes식을 Black-Scholes-Merton식이라 부르기도 한다. 금융파생상품의 가치평가이론에 관한 업적으로 M. Scholes와 R. Merton은 1997년도 노벨 경제학상을 수상하였다. 불행하게도 F. Black은 암에 걸려 그보다 2년 전인 1995년 55세의 나이로 이 세상을 떠났다.

Black and Scholes(1973) 그리고 Merton(1973) 이후 금융파생상품의 합리적 가치를 평가하는 연구가 활발히 진행되고 이를 바탕으로 금융위기를 관리하는 이론이 발전됨으로써, 금융공학이라는 새로운 학문 분야가 꽃을 피우게 되었다. 다양한 학문 분야에서 종사하던 인재들이 금융공학을 연구하게 됨으로써, 금융공학은 다른 어떤 실용학문 분야에 못지않게 폭이 넓고 깊이가 깊게 되었다. 가장 대표적인 결과가 Black-Scholes식을 유도하는 다양한 방법들이 제시되었다는 것이다. 예를 들어, Black-Scholes식을 유도하는 가장 간단한 방법이라고 할 수 있는 이항나무모형법, 편미분방정식을 사용하는 방법, 마팅게일을 사용하는 방법, Kolmogorov방정식이나 Feynman-Kac정리와 같은 편미분방정식과 기대값 사이의 관계를 이용하는 방법, 효용함수나 CAPM을 사용한 균형이론적 접근법, 특성함수나 복소적분을 이용하

는 방법, 엔트로피나 Kullback-Leibler정보량 등 정보이론을 바탕으로 하는 방법, 자기금융조건을 부과하지 않는 SLSG전략에 의한 방법, 그리고 표준적 미적분이 아닌 비표준적 해석(NSA: nonstandard analysis)을 이용하는 방법 등이 있다. Andreasen, Jensen, and Poulsen(1998)은 이 중에서 여덟 가지 방법을 소개하였다. 본 논문의 목적은 Black-Scholes식을 유도하는 더 많은 방법들을 조사하고 정리함으로써 금융공학에 나타나는 다양한 기법들을 소개하는 데 있다.

2. Black-Scholes식

본 논문에서 우리가 고찰하는 시장모형은 배당이 없는 주식, 이 주식의 주가를 원자산으로 하는 유럽형콜옵션과 유럽형풋옵션, 그리고 무위험채권으로 구성되어 있다. 이 시장모형은 다음과 같은 조건들을 만족하는 완전시장을 나타낸다고 가정하자. 거래에는 세금, 수수료, 매수호가와 매도호가 차이 등과 같은 거래비용이 존재하지 않으며, 각 금융상품을 무한하게 분할할 수 있고, 공매(short-selling)에 대한 제약이 없다. 즉, 이 시장모형에는 마찰이 없다. 시점 u에서 주가를 S_u라 하고, $\{S_u \mid u \geq 0\}$가 확률공간 $(\Omega, \mathbb{F}, P)$에서 정의되는 증대정보계(filtration) $\{\mathbb{F}_u \mid u \geq 0\}$에 적합하며 다음 확률미분방정식을 만족한다고 하자.

$$dS_u = \mu S_u du + \sigma S_u dW_u, \quad (u \geq 0) \tag{2.1}$$

여기서 추세모수(drift coefficient) μ와 변동성(volatility) σ는 상수들이고, $\{W_u \mid u \geq 0\}$는 Brown운동이다. 식 (2.1)을 만족하는 확률과정 $\{S_u\}$를 기하Brown운동(GBM: geometric Brown motion)이라 한다. 이 무위험채권의 만기시점은 T이고 연속복리(continuously compounded)로 계산되는 이자율이 상수 r이라고 하자. 이 무위험채권의 시점 $t(\leq T)$에서 가격 $B(t, T)$는 다음과 같다.

$$B(t, T) = e^{-r\tau} \tag{2.2}$$

여기서 $\tau \doteq T - t$이다. 원자산이 S_u이고 만기시점 T에서 행사가격이 K인 유럽형콜옵션과 유럽형풋옵션의 지불금액함수들 C_T와 P_T는 각각 다음과 같다.

(2.3) $$C_T \doteq [S_T - K]^+$$

(2.4) $$P_T \doteq [K - S_T]^+$$

여기서 $A^+ \doteq \max\{A, 0\}$이다. 지금까지 언급된 모든 조건들을 만족하는 시장모형을 Black-Scholes 환경하에 있다고 한다.

현재시점을 t라 하고, 각 시점 $u(\in [t, T])$에서 원자산 α_u단위와 무위험채권 β_u단위로 포트폴리오를 구성하자. 여기서 무위험채권 1단위의 가치는 1이라 하자. 이 포트폴리오의 시점 u에서 가치 V_u는 다음과 같다.

(2.5) $$V_u = \alpha_u S_u + \beta_u B(u, T)$$

만약 투자전략 $\{(\alpha_u, \beta_u) \mid t \le u \le T\}$가 다음 식을 만족하면, 이 투자전략은 자기금융조건을 만족한다고 한다.

(2.6) $$dV_u = \alpha_u dS_u + \beta_u dB(u, T), \quad (t \le u < T)$$

식 (2.6)에서 알 수 있듯이, 자기금융조건을 만족하는 시장모형에서는 각 시점에서 외부로 자금이 유출되거나 외부로부터 새로운 자금이 유입되지 않는다. 자기금융조건하에서 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

(2.7) $$S_u d\alpha_u + B(u, T)d\beta_u = 0, \quad (t \le u < T)$$

만약 이 포트폴리오의 가치과정 $\{V_u \mid t \le u \le T\}$가 자기금융조건을 만족하는 동시에 다음 두 조건들 중 하나를 만족하면, 이 포트폴리오에는 재정기회(arbitrage opportunity)가 존재한다고 한다.

(2.8) $$V_t \le 0, \quad P(V_T \ge 0) = 1, \quad P(V_T > 0) > 0$$

(2.9) $$V_t < 0, \quad P(V_T \ge 0) = 1$$

어떤 경제의 균형상태에서는 재정기회가 존재할 수 없다. 따라서 이 시장모형은 무재정조건을 만족한다고 가정하자.

Black-Scholes 환경하에서 주가 S_u를 원자산으로 하고 만기시점 T에서 행사가격이 K인 유럽형콜옵션과 유럽형풋옵션의 시점 t에서 무재정가치를 각각 C_t와 P_t라고 하자. Black and Scholes(1973)는 다음과 같이 이 무재정가치들의 해석해(closed form solution)를 제시하였다. 이 해석해를 Black-Scholes식이라 부른다.

[정리 2.1] Black-Scholes식

Black-Scholes환경하에서 유럽형콜옵션과 유럽형풋옵션의 무재정가치들 C_t와 P_t는 각각 다음 식을 만족한다.

$$C_t = S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2)$$
$$P_t = Ke^{-r\tau} N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

여기서 d_1, d_2 그리고 표준정규분포함수 $N(x)$는 각각 다음과 같다.

$$d_1 \doteq \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left\{\ln\frac{S_t}{K} + \left[r + \frac{\sigma^2}{2}\right]\tau\right\}$$
$$d_2 \doteq \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left\{\ln\frac{S_t}{K} + \left[r - \frac{\sigma^2}{2}\right]\tau\right\} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$
$$N(x) \doteq \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz$$

□

다음 식이 성립함을 쉽게 증명할 수 있다.

$$S_T - K = C_T - P_T \tag{2.10}$$

유럽형옵션들은 만기시점 T 전에 권리를 행사할 수 없다. 따라서 각 시점 u ($\in [t, T)$)에서 좌변의 가치와 우변의 가치가 동일하지 않으면, 재정기회가 발생한다. 즉, 시점 t에서 다음 식이 성립한다.

$$S_t - Ke^{-r\tau} = C_t - P_t \tag{2.11}$$

식 (2.11)을 유럽형옵션들의 풋콜패리티(put · call parity)라 부른다. [정리 2.1]에서 이 풋콜패리티가 성립함을 확인할 수 있다. 풋콜패리티에 대한 좀 더 자세한 내용은 최병선(2009)의 제2.1절을 참조하라. 식 (2.11)에서 알 수 있듯이, 유럽형콜옵션의 무재정가치 C_t를 알면, 유럽형풋옵션의 무재정가치 P_t를 알 수 있다. 따라서 이후 본 논문에서는 유럽형콜옵션의 무재정가치 C_t만을 다루기로 하자.

유럽형콜옵션의 현재시점 t에서 무재정가치 C_t를 $[S_t - K]^+$와 $C_t - [S_t - K]^+$로 나눌 수 있다. 이 중에서, $[S_t - K]^+$는 시점 t에서 이 유럽형콜옵션이 행사되었다고 가정하는 경우 가치로서 내재가치(intrinsic value)라고 한다. 그 나머지인 $C_t - [S_t - K]^+$를 시간가치(time value)라고 한다. 시간가치는 유럽형콜옵션이 미래시점에서 추가적인 이익을 창출할 가능성을 반영한다.

[정리 2.1]의 Black-Scholes식을 약간 변형하면, 다른 종류의 원자산에 대한 유럽형옵션의 무재정가치를 구할 수 있다. Merton(1973)은 중간배당을 하는 주식의 주가를 원자산으로 하는 유럽형옵션의 무재정가치를 제시하였고, Garman and Kolhagen(1983)은 환율을 원자산으로 하는 유럽형옵션의 무재정가치를 제시하였으며, Black(1976)은 선물을 원자산으로 하는 유럽형옵션의 무재정가치를 제시하였다.

Black-Scholes식을 유도하기 위해서는 Ito보조정리라고도 불리는 Ito-Doeblin보조정리를 알아야 한다. 다음 명제의 증명은 최병선(2004a)의 제7.6절을 참조하라.

[명제 2.1] Ito-Doeblin보조정리

함수 $F(S_t, t)$가 변수 S_t에 대해서 C^2급이며 변수 t에 대해서 C^1급이고, 확률과정 $\{S_t\}$가 다음 확률미분방정식을 만족한다고 하자.

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)\, dW_t, \quad (t \geq 0)$$

여기서 $\{W_t \mid t \geq 0\}$는 표준Brown운동이고, $\mu_t \doteq \mu(S_t, t)$와 $\sigma_t \doteq \sigma(S_t, t)$는 각각 추세계수와 확산계수이다. 이러한 조건하에서, 다음 식들이 성립한다.

$$dF(S_t,t)=\frac{\partial F}{\partial S_t}dS_t+\frac{\partial F}{\partial t}dt+\frac{1}{2}\sigma_t^2\frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2}dt$$
$$dF(S_t,t)=\left[\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma_t^2\frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2}+\frac{\partial F}{\partial S_t}\mu_t\right]dt+\frac{\partial F}{\partial S_t}\sigma_t dW_t$$

여기서 각 등호는 L^2공간에서 성립한다. □

다음 명제들은 Black-Scholes식을 도출하는 데 매우 유용하다. 이 명제들의 증명에 대해서도 최병선(2004a)의 제7.6절을 참조하라.

[명제 2.2] 확률과정 $\{S_t \mid 0 \le t \le T\}$가 다음 확률미분방정식을 만족한다고 하자.

$$dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t, \quad (0 \le t \le T)$$

여기서 μ와 σ는 상수들이고, $\{W_t \mid t \ge 0\}$는 Brown운동이다. 이러한 조건하에서, 다음 식들이 성립한다.

$$S_t = S_0 \exp\left(\left[\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right]t+\sigma W_t\right),\ (0 \le t \le T)$$
$$\ln\frac{S_t}{S_0}\overset{d}{\sim}N\left(\left[\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right]t,\sigma^2 t\right),\ (0 \le t \le T)$$
□

[명제 2.3] 상수들 ν와 σ 그리고 Brown운동 $\{W_t \mid 0 \le t \le T\}$에 대해서, 확률과정 $\{S_t = \exp(\nu t + \sigma W_t) \mid 0 \le t \le T\}$는 다음 식을 만족한다.

$$E(S_t \mid S_s) = S_s \exp\left(\nu[t-s]+\frac{1}{2}\sigma^2[t-s]\right),\ (0 \le s < t \le T)$$
□

3. 이항나무모형

이항나무모형(binomial tree model)을 사용하면, Black-Scholes식을 쉽게 유도할 수 있다. Cox, Ross, and Rubinstein(1979)이 처음으로 이항나무모형을 사용해서 옵션가

치를 평가한 것으로 알려져 있으나, Rendleman and Bartter(1979)도 같은 해에 동일한 결과를 발표하였다. 그러나 그보다 훨씬 전에 Bachelier(1901)가 이항나무모형을 재무이론에 적용하였다. Higham(2002)은 이항나무모형을 사용한 옵션의 가치평가에 대해 자세히 설명하고 있다. 이 절에서는 이항나무모형을 사용해서 Black-Scholes식을 유도하기로 하자.

이항나무모형를 사용해서 금융파생상품의 가치를 평가하는 첫 번째 단계는 원자산의 움직임을 이항나무로 표현하는 것이다. 이 유럽형콜옵션의 만기시점이 T이고 잔존기간은 τ이다. 다음 상수들을 정의하자.

(3.1) $$\Delta t \doteq \frac{\tau}{M}, \quad t_k \doteq t + k\Delta t, \quad (k = 0, 1, \ldots, M)$$

여기서 M은 자연수이다. 제k기의 시작점 t_k에서 원자산은 S_{t_k}이다. 소구간 $[t_k, t_{k+1}]$에서 원자산이 상승하면 시점 t_{k+1}에서 원자산이 $S_{t_k}u$이고, 원자산이 하락하면 시점 t_{k+1}에서 원자산이 $S_{t_k}d$라고 하자. 이 상수들 u와 d가 다음과 같은 조건을 만족한다고 가정하자.

(3.2) $$u > 1 + r\Delta t > d$$

또한, 다음과 같은 재결합조건(recombining condition)이 만족된다고 가정하자.

(3.3) $$ud = 1$$

시간구간 $[t_0, t_k]$에서 원자산이 상승하는 횟수를 j 그리고 하락하는 횟수를 $k - j$라고 하면, 시점 t_k에서 원자산 $S_{k,j}$는 다음과 같다.

(3.4) $$S_{k,j} \doteq S_{t_0}u^j d^{k-j} = S_{t_0}d^{k-2j} = S_{t_0}u^{2j-k}$$

여기서 두 번째와 세 번째 등호들은 식 (3.3)에 의해서 성립한다.

현재시점이 t_k라고 하고, 원자산이 S_u이고 만기시점 t_{k+1}에서 행사가격이 K_{k+1}인 유럽형콜옵션의 가치평가에 대해서 생각해보자. 시점 t_{k+1}에서 경제상태에 따른 유럽형

콜옵션가치들을 각각 $C^u_{t_{k+1}}$과 $C^d_{t_{k+1}}$이라 하면, 다음 식들이 성립한다.

(3.5) $$C^u_{t_{k+1}} = [S_{t_k}u - K_{k+1}]^+, \quad C^d_{t_{k+1}} = [S_{t_k}d - K_{k+1}]^+$$

시점 t_k에서 무위험채권을 θ_1만큼 공매하는 동시에 원자산 θ_2단위를 매입하면, 이 포트폴리오 $[-\theta_1, \theta_2]^t$의 시점 t_k에서 가치 V_{t_k}는 $\theta_2 S_{t_k} - \theta_1$이고, 시점 t_{k+1}에서 가치 $V_{t_{k+1}}$은 경제상태에 따라 각각 다음과 같다.

(3.6) $$V^u_{t_{k+1}} = \theta_2 S_{t_k}u - [1 + r\Delta t]\theta_1, \quad V^d_{t_{k+1}} = \theta_2 S_{t_k}d - [1 + r\Delta t]\theta_1$$

이 포트폴리오 $[-\theta_1, \theta_2]^t$가 유럽형콜옵션 1단위를 복제한다고 하면, 시점 t_{k+1}에서 다음 식들이 성립한다.

(3.7) $$C^u_{t_{k+1}} = -[1 + r\Delta t]\theta_1 + \theta_2 S_{t_k}u$$

(3.8) $$C^d_{t_{k+1}} = -[1 + r\Delta t]\theta_1 + \theta_2 S_{t_k}d$$

식 (3.7)과 식 (3.8)로 이루어진 연립방정식을 풀면, θ_1과 θ_2는 각각 다음과 같다.

(3.9) $$\theta_1 = \frac{C^u_{t_{k+1}}d - C^d_{t_{k+1}}u}{[u-d]}\frac{1}{[1+r\Delta t]}, \quad \theta_2 = \frac{C^u_{t_{k+1}} - C^d_{t_{k+1}}}{[u-d]}\frac{1}{S_{t_k}}$$

이 시장모형이 무재정조건을 만족하므로, 시점 t_k에서도 이 포트폴리오의 가치와 유럽형콜옵션의 가치 C_{t_k}는 같아야 한다. 즉, 다음 식이 성립한다.

(3.10) $$C_{t_k} = \theta_2 S_{t_k} - \theta_1$$

식 (3.9)를 식 (3.10)에 대입하면, 다음과 같은 유럽형콜옵션의 가치평가식을 얻는다.

(3.11) $$C_{t_k} = \frac{1}{1+r\Delta t}\left\{\frac{[1+r\Delta t]-d}{u-d}C^u_{t_{k+1}} + \frac{u-[1+r\Delta t]}{u-d}C^d_{t_{k+1}}\right\}$$

다음 상수를 정의하자.

(3.12) $$q \doteq \frac{[1+r\Delta t]-d}{u-d}$$

식 (3.2)에서 알 수 있듯이, q는 구간 (0, 1)에 속한다. 따라서 q를 확률로 간주할 수 있다. 이 q에 대응하는 확률측도를 Q로 표기하자. 식 (3.12)를 식 (3.11)에 대입하면, 다음과 같은 유럽형콜옵션의 가치평가식을 얻는다.

(3.13) $$C_{t_k} = \frac{1}{1+r\Delta t}\{qC^u_{t_{k+1}} + [1-q]C^d_{t_{k+1}}\}$$

가치평가식 (3.13)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

(3.14) $$C_{t_k} = \frac{1}{1+r\Delta t}E^Q_{t_k}(C_{t_{k+1}})$$

식 (3.14)에서 알 수 있듯이, 원자산의 상승확률을 q로 해서 미래시점 t_{k+1}에서 유럽형콜옵션가치의 기대값을 구한 다음, 이 기대값을 무위험이자율 r로 할인한 값이 현재시점 t_k에서 무재정가치이다.

시점 t_{k+1}에서 경제상태에 따른 원자산을 각각 $S^u_{t_{k+1}}$과 $S^d_{t_{k+1}}$이라 하면, 다음 식이 성립한다.

(3.15) $$S_{t_k} = \frac{1}{1+r\Delta t}\{qS^u_{t_{k+1}} + [1-q]S^d_{t_{k+1}}\}$$

식 (3.15)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

(3.16) $$S_{t_k} = \frac{1}{1+r\Delta t}E^Q_{t_k}(S_{t_{k+1}})$$

식 (3.14)와 식 (3.16)에 알 수 있듯이, 확률측도 Q하에서 유럽형콜옵션의 기대수익률과 원자산의 기대수익률은 무위험이자율 r과 같다. 따라서 q를 위험중립확률(risk-neutral probability), 그리고 Q를 위험중립확률측도(risk-neutral probability measure)라고 한다. 또한, 이 위험중립확률측도 Q하에서 계산된 기대값을 위험중립기대값

(risk-neutral expectation value)이라 부른다.

각 $k(=0, 1, \ldots, M-1)$에 대해서 식 (3.13)이 성립하므로, 만기시점 T에서 행사가격이 K인 유럽형콜옵션의 현재시점 t에서 무재정가치 C_t는 다음과 같다.

$$C_t = \frac{1}{[1+r\Delta t]^M}\sum_{j=0}^{M}\binom{M}{j}q^j[1-q]^{M-j}[S_t u^j d^{M-j}-K]^+ \tag{3.17}$$

식 (3.17)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C_t = \frac{1}{[1+r\Delta t]^M}E_t^Q([S_T-K]^+) \tag{3.18}$$

식 (3.18)을 위험중립가치평가식(risk-neutral pricing formula)이라 부른다.

식 (3.17)을 사용해서 유럽형콜옵션의 현재시점 t에서 무재정가치 C_t를 계산하기 위해서는 모수들 u, d와 q를 알아야만 한다. 원자산과정 $\{S_u\}$가 기하Brown운동을 하므로, [명제 2.2]에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\ln\frac{S_T}{S_t} \sim N\left(\left[\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right]\tau, \sigma^2\tau\right), \ (t \geq 0) \tag{3.19}$$

식 (3.4)에서 알 수 있듯이, 각 $j(=0, 1, \ldots, M)$에 대해서 $S_{M,j} = S_t u^j d^{M-j}$이다. 따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\ln\frac{S_{M,j}}{S_t} = j\ln u + [M-j]\ln d = [2j-M]\ln u \tag{3.20}$$

또한, 원자산이 $S_{M,j}$일 확률은 $\binom{M}{j}p^j[1-p]^{M-j}$이다. 확률변수 J가 모수들이 M과 p인 이항확률분포를 따른다면, 다음 식들이 성립한다.

$$E(J) = Mp, \quad \mathrm{Var}(J) = Mp[1-p] \tag{3.21}$$

식 (3.20)과 식 (3.21)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

(3.22)
$$E_t\left(\ln\frac{S_{M,j}}{S_t}\right)=M[2p-1]\ln u$$

(3.23)
$$\mathrm{Var}_t\left(\ln\frac{S_{M,j}}{S_t}\right)=4Mp[1-p]\ln^2 u$$

여기서 아래첨자 t는 현재시점 t까지 정보가 주어졌다는 조건하에서 기대값을 의미한다. 식 (3.19), 식 (3.22), 그리고 식 (3.23)에서 알 수 있듯이, 다음과 같은 적률방정식들이 점근적으로 성립해야 한다.

(3.24)
$$M[2p-1]\ln u=\left[\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right]\tau$$

(3.25)
$$4Mp[1-p]\ln^2 u=\sigma^2\tau$$

식 (3.3), 식 (3.24)와 식 (3.25)로 구성된 연립방정식의 해가 다음과 같음을 알 수 있다.

(3.26)
$$u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}},\ d=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}},\ q=\frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}\simeq\frac{[1+r\Delta t]-d}{u-d}$$

식 (3.17)에 중심극한정리를 적용하면, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

(3.27)
$$\lim_{M\to\infty} C_t=S_tN(d_1)-Ke^{-r\tau}N(d_2),\quad (0\le t\le T)$$

식 (3.27)의 유도에 관한 자세한 내용은 최병선(2007)의 제2.1절을 참조하라. 식 (3.27)의 우변은 [정리 2.1]에 기술한 유럽형콜옵션의 가치평가식인 Black-Scholes식이다.

4. 편미분방정식

4.1. Black-Scholes법

Black and Scholes(1973)가 제시한 편미분방정식(PDE: partial differential equation)

을 유도하고, 이로부터 Black-Scholes식을 유도하는 방법을 살펴보자.

원자산과정 $\{S_u\}$가 다음 확률미분방정식을 만족한다고 하자.

$$dS_u = \mu(S_u, u)du + \sigma(S_u, u)dW_u, \quad (u \geq 0) \tag{4.1}$$

여기서 $\{W_u \mid u \geq 0\}$는 표준Brown운동이고, $\mu_u \doteq \mu(S_u, u)$와 $\sigma_u \doteq \sigma(S_u, u)$는 각각 추세계수와 확산계수이다. 확률미분방정식 (4.1)은 확률미분방정식 (2.1)을 확장한 것이다.

원자산이 S_u인 금융파생상품의 무재정가치 $F = F(S_u, u)$가 원자산 S_u에 대해서 C^2급이고 또한 시점 u에 대해서 C^1급이라고 하자. Ito-Doeblin보조정리를 사용하면, 다음 식을 얻는다.

$$dF(S_u, u) = F_S(S_u, u)dS_u + F_u(S_u, u)du + \frac{1}{2}F_{SS}(S_u, u)\sigma_u^2 du \tag{4.2}$$

식 (4.1)과 식 (4.2)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$dF(S_u, u) = \left[\mu_u F_S + \frac{1}{2}\sigma_u^2 F_{SS} + F_u\right]du + \sigma_u F_S dW_u \tag{4.3}$$

식 (4.1)과 식 (4.3)에서 알 수 있듯이, 다음 식을 만족하는 자기금융과정 $\{(\alpha_u, \beta_u) \mid t \leq u \leq T\}$가 존재한다.

$$F(S_u, u) = \alpha_u S_u + \beta_u B(u, T), \quad (t \leq u \leq T) \tag{4.4}$$

다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} dF(S_u, u) &= \alpha_u dS_u + \beta_u dB(u, T) \\ &= [\alpha_u \mu_u + \beta_u rB(u, T)]du + \alpha_u \sigma_u dW_u \end{aligned} \tag{4.5}$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (4.4)와 자기금융조건 (2.6)에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 식 (4.1)에 의해서 성립한다.

식 (4.3)과 식 (4.5)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\alpha_u = F_S = \frac{\partial F(S_u, u)}{\partial S_u} \tag{4.6}$$

$$\beta_u r B(u,T) = \frac{1}{2}\sigma_u^2 F_{SS} + F_u \tag{4.7}$$

또한, 식 (4.4)와 식 (4.6)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\beta_u = \frac{1}{B(u,T)}\left[F(S_u, u) - \frac{\partial F(S_u, u)}{\partial S_u} S_u\right] \tag{4.8}$$

식 (4.7)과 식 (4.8)에서 알 수 있듯이, 이 금융파생상품의 현재시점 t에서 가치 $F(S_t, t)$는 다음 편미분방정식을 만족한다.

$$-rF(S_t, t) + \frac{\partial F(S_t, t)}{\partial t} + rS_t \frac{\partial F(S_t, t)}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 F(S_t, t)}{\partial S_t^2} = 0 \tag{4.9}$$

편미분방정식 (4.9)를 Black-Scholes방정식 또는 자산가치평가(asset pricing)의 근본적 편미분방정식(fundamental PDE)이라 부른다.

Black-Scholes방정식 (4.9)를 풀기 위해서는 경계조건(boundary condition)이 있어야 한다. Black-Scholes방정식에 해당하는 경계조건은 각 금융파생상품의 지불금액함수이다. 유럽형콜옵션의 경우에는 식 (2.3)이 경계조건이다. 엄격히 말하면, 식 (2.3)은 경계조건이라기보다는 말기조건(terminal condition)이다. 그러나 Black-Scholes방정식 (4.9)를 후향으로(backward) 푸는 경우가 일반적이기 때문에, 이 말기조건을 초기조건(initial condition)이라 부르기도 한다. 편미분방정식과 경계조건 (2.3)으로 이루어진 경계값문제를 직접 풀어서 해석해를 구할 수 있는 경우는 드물다.

원자산과정 $\{S_u\}$가 확률미분방정식 (2.1)을 만족하는 기하Brown운동을 하면, Black-Scholes방정식 (4.9)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$-rF(S_t, t) + \frac{\partial F(S_t, t)}{\partial t} + rS_t \frac{\partial F(S_t, t)}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F(S_t, t)}{\partial S_t^2} = 0 \tag{4.10}$$

식 (4.10)은 원자산이 기하Brown운동을 하는 Black-Scholes방정식이다. 제4.5절에서 알 수 있듯이, 편미분방정식 (4.10)과 말기조건 (2.3)으로 이루어진 경계값문제의 해가 [정리 2.1]에 기술한 유럽형콜옵션의 Black-Scholes식이다.

4.2. Merton법

Merton(1973)이 제시한 유럽형콜옵션을 원자산으로 헤징하는 방법을 사용해서 Black-Scholes방정식을 유도하기로 하자.

원자산과정 $\{S_u\}$가 확률미분방정식 (4.1)을 만족한다고 하자. 또한, 원자산이 S_u인 금융파생상품의 무재정가치 $F = F(S_u, u)$가 원자산 S_u에 대해서 C^2급이고 또한 시점 u에 대해서 C^1급이라고 하자. 시점 t에서 이 금융파생상품 $\theta_{1,t}$단위와 원자산 $\theta_{2,t}$단위로 구성된 포트폴리오의 가치 V_t는 다음과 같다.

(4.11) $$V_t = \theta_{1,t} F(S_t, t) + \theta_{2,t} S_t$$

이 포트폴리오가 자기금융조건 (2.6)을 만족하면, 다음 식이 성립한다.

(4.12) $$dV_t = \theta_{1,t} dF(S_t, t) + \theta_{2,t} dS_t$$

식 (4.2)를 식 (4.12)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

(4.13) $$dV_t = \theta_{1,t}\left[F_t + \frac{1}{2}F_{SS}\sigma_t^2\right]dt + [\theta_{1,t}F_S + \theta_{2,t}]dS_t$$

식 (4.11)에서 $\theta_{1,t}$값과 $\theta_{2,t}$값을 임의로 정할 수 있으므로, 다음 값들을 선택하자.

(4.14) $$\theta_{1,t} = 1, \quad \theta_{2,t} = -F_S$$

식 (4.14)를 식 (4.13)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

(4.15) $$dV_t = \left[F_t + \frac{1}{2}F_{SS}\sigma_t^2\right]dt$$

식 (4.15)에서 알 수 있듯이, 이 포트폴리오 $(\theta_{1,t}, \theta_{2,t})$는 무위험이다.

무재정조건이 만족되기 위해서는, 시간구간 $(t, t + dt]$에서 무위험채권가격의 증분과 이 무위험포트폴리오가치 V_t의 증분 dV_t는 같아야 한다. 즉, 시간구간 $(t, t + dt]$에서 이 무위험포트폴리오의 수익은 다음과 같다.

(4.16) $$dV_t = rV_t dt$$

식 (4.15)와 식 (4.16)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

(4.17) $$rV_t dt = F_t dt + \frac{1}{2} F_{SS} \sigma_t^2 dt$$

식 (4.11)과 식 (4.14)를 식 (4.17)에 적용하면, 다음 편미분방정식을 얻는다.

(4.18) $$-rF + F_t + rF_S S_t + \frac{1}{2} F_{SS} \sigma_t^2 = 0, \ \ (0 \le t \le T)$$

편미분방정식 (4.18)이 식 (4.9)에서 기술한 Black-Scholes방정식이다.

4.3. 위험의 시장가격

위험의 시장가격(market price of risk)이라는 개념을 이용해서, Black-Scholes방정식을 유도하기로 하자.

원자산과정 $\{S_u\}$가 확률미분방정식 (2.1)을 만족하는 기하Brown운동을 한다고 하자. 유럽형옵션의 시점 t에서 가치 $F = F(S_t, t)$에 Ito-Doeblin보조정리를 적용하면, 다음 식을 얻는다.

(4.19) $$\frac{dF}{F} = \mu_F dt + \sigma_F dW_t$$

여기서 μ_F와 σ_F는 각각 다음과 같다.

(4.20) $$\mu_F \doteq \frac{1}{F}\left[F_t(S_t, t) + F_S(S_t, t)\mu S_t + \frac{1}{2} F_{SS}(S, t)\sigma^2 S_t^2 \right]$$

$$\sigma_F \doteq \frac{1}{F} F_S(S_t, t)\sigma S_t \tag{4.21}$$

자기금융조건 (2.6)을 이용하면, 원자산과 이 유럽형옵션에 투자하는 비율을 θ 대 $1-\theta$로 하는 포트폴리오의 시점 t에서 가치 V_t가 다음 식을 만족함을 알 수 있다.

$$\frac{dV_t}{V_t} = \theta \frac{dS_t}{S_t} + [1-\theta]\frac{dF}{F} \tag{4.22}$$

식 (4.19)를 식 (4.22)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\frac{dV_t}{V_t} = \{\theta\mu + [1-\theta]\mu_F\}dt + \{\theta\sigma + [1-\theta]\sigma_F\}dW_t \tag{4.23}$$

식 (4.23)에서 알 수 있듯이, 이 포트폴리오가 무위험이기 위해서는 다음 식이 성립해야 한다.

$$\theta = -\frac{\sigma_F}{\sigma - \sigma_F} \tag{4.24}$$

다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{dV_t}{V_t} = \left[-\frac{\mu\sigma_F}{\sigma - \sigma_F} + \frac{\mu_F\sigma}{\sigma - \sigma_F}\right]dt = rdt \tag{4.25}$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (4.23)과 식 (4.24)에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 무재정조건에 의해서 성립한다. 식 (4.25)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{\mu_F - r}{\sigma_F} \tag{4.26}$$

식 (4.26)에서 알 수 있듯이, 원자산의 위험 1단위당 초과수익률과 이 유럽형옵션의 위험 1단위당 초과수익률은 같다. 이 위험 1단위당 초과수익률을 위험의 시장가격이라 부른다.

식 (4.20)과 식 (4.21)을 식 (4.26)에 대입하면, 다음 편미분방정식을 얻는다.

$$(4.27)\qquad -rF(S_t,t)+\frac{\partial F(S_t,t)}{\partial t}+rS_t\frac{\partial F(S_t,t)}{\partial S_t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 F(S_t,t)}{\partial S_t^2}=0$$

편미분방정식 (4.27)은 원자산이 기하Brown운동을 하는 Black-Scholes방정식 (4.10)이다.

4.4. Heston법

Heston(1993)이 확률변동성모형의 해석해를 구하는 데 사용한 방법을 응용해서 Black-Scholes방정식을 유도하기로 하자.

원자산과정 $\{S_u\}$가 확률미분방정식 (2.1)을 만족하는 기하Brown운동을 한다고 하자. 원자산이 S_u인 금융파생상품 A의 매도포지션을 헤지하기 위해서, 동일한 원자산에 대한 다른 금융파생상품 B를 사용하기로 하자. 금융파생상품 A 1단위의 시점 t에서 가치를 $V_A \doteq V_A(S_t, t)$라 하고, 금융파생상품 B 1단위의 시점 t에서 가치를 $V_B \doteq V_B(S_t, t)$라 하자. 금융파생상품 A 1단위의 매도포지션과 금융파생상품 B Δ_B단위의 매입포지션으로 이루어진 포트폴리오의 가치 Π는 다음과 같다.

$$(4.28)\qquad \Pi = -V_A + V_B\,\Delta_B$$

식 (4.28)에 Ito-Doeblin보조정리를 적용하면, 이 포트폴리오 가치 Π의 시간구간 $(t, t + dt]$에서 변화량이 다음과 같음을 알 수 있다.

$$(4.29)\qquad \begin{aligned} d\Pi = &-\left[\frac{\partial V_A}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 V_A}{\partial S_t^2}\right]dt+\Delta_B\left[\frac{\partial V_B}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 V_B}{\partial S_t^2}\right]dt \\ &-\left[\frac{\partial V_A}{\partial S_t}-\Delta_B\frac{\partial V_B}{\partial S_t}\right]dS_t \end{aligned}$$

이 확률증분 $d\Pi$에서 확률성을 제거하기 위해서는 다음 식이 성립해야 한다.

$$(4.30)\qquad \Delta_B=\frac{\dfrac{\partial V_A}{\partial S_t}}{\dfrac{\partial V_B}{\partial S_t}}$$

식 (4.30)을 식 (4.29)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$(4.31) \qquad d\Pi = -\left[\frac{\partial V_A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V_A}{\partial S_t^2}\right]dt + \Delta_B\left[\frac{\partial V_B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V_B}{\partial S_t^2}\right]dt$$

식 (4.31)이 성립한다면, 이 포트폴리오의 수익률은 무위험이자율 r과 같다. 즉, 다음 식들이 성립한다.

$$(4.32) \qquad d\Pi = r\Pi dt = r[-V_A + V_B\,\Delta_B]\,dt$$

여기서 첫 번째 등호는 무재정조건에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 식 (4.28)에 의해서 성립한다.

식 (4.30)−식 (4.32)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$(4.33) \qquad \frac{1}{\frac{\partial V_A}{\partial S_t}}\left[\frac{\partial V_A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V_A}{\partial S_t^2} - rV_A\right] = \frac{1}{\frac{\partial V_B}{\partial S_t}}\left[\frac{\partial V_B}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V_B}{\partial S_t^2} - rV_B\right]$$

식 (4.33)의 좌변이나 우변은 금융파생상품의 종류로부터 자유롭다. 따라서 식 (4.33)의 양변은 S_t, σ, 그리고 t만의 함수이어야 하므로, 다음 식을 만족하는 $c = c(S_t, t, \sigma)$가 존재한다.

$$(4.34) \qquad \frac{1}{\frac{\partial V_A}{\partial S_t}}\left[\frac{\partial V_A}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V_A}{\partial S_t^2} - rV_A\right] = cS_t$$

원자산 S_u로만 구성된 포트폴리오도 식 (4.34)을 만족해야 하므로, 다음 식이 성립한다.

$$(4.35) \qquad \frac{\partial S_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 S_t}{\partial S_t^2} - rS_t = cS_t \frac{\partial S_t}{\partial S_t}$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$c = -r \tag{4.36}$$

식 (4.36)을 식 (4.34)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$-rV_A + \frac{\partial V_A}{\partial t} + rS_t \frac{\partial V_A}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V_A}{\partial S_t^2} = 0 \tag{4.37}$$

편미분방정식 (4.37)은 원자산이 기하Brown운동을 하는 Black-Scholes방정식 (4.10)이다.

4.5. Black-Scholes방정식의 해

원자산이 기하Brown운동을 하는 Black-Scholes방정식 (4.10)과 말기조건 (2.3)으로 이루어진 경계값문제를 여러 가지 방법들을 사용해서 풀 수 있다. 이에 관한 자세한 내용은 최병선(2013)의 제3.12절을 참조하라. 이 절에서는 가장 일반적인 방법인 Fourier변환을 사용해서 이 경계값문제를 푸는 방법을 살펴보자. 이 방법에 대한 자세한 내용은 최병선(2004a)의 제9장을 참조하라.

첫째로, 원자산이 기하Brown운동을 하는 Black-Scholes방정식 (4.10)의 계수들에서 S_t를 제거하기로 하자. 다음 변수들을 정의하자.

$$y \doteq y_t \doteq \ln\frac{S_t}{K},\ \ v(y,\tau) \doteq \frac{1}{K}F(S_t,t) \tag{4.38}$$

식 (4.38)을 편미분방정식 (4.10)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right]\frac{\partial v}{\partial y} - rv \tag{4.39}$$

편미분방정식 (4.10)과 달리, 식 (4.39)는 계수들이 상수들인 편미분방정식이다.

둘째로, 식 (4.39)에서 v항과 $\partial v/\partial y$항을 소거해서 열전도방정식의 형태로 나타내기로 하자. 다음 함수를 정의하자.

(4.40) $$w(y,\tau) \doteq v(y,\tau)e^{-\alpha y-\beta\tau}$$

여기서 α와 β는 각각 다음과 같다.

(4.41) $$\alpha \doteq -\frac{1}{2}[k-1],\ \beta \doteq -\frac{\sigma^2[k+1]^2}{8}$$

단, $k \doteq 2r/\sigma^2$이다. 식 (4.41)을 식 (4.39)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

(4.42) $$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

식 (4.42)를 열전도방정식(heat transfer equation) 또는 확산방정식(diffusion equation)이라 부른다. 식 (4.38), 식 (4.40), 그리고 (4.41)에서 알 수 있듯이, 유럽형콜옵션의 말기조건 (2.3)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

(4.43) $$w(y_T,0) = \left[\exp\left(\frac{1}{2}[k+1]y_T\right) - \exp\left(\frac{1}{2}[k-1]y_T\right)\right]^+$$

셋째로, Fourier변환을 적용해서 편미분방정식 (4.42)와 말기조건 (4.43)으로 이루어진 경계값문제를 풀면, 그 해는 다음과 같다.

(4.44) $$w(y,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w(u,0)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}}\exp\left(-\frac{[y-u]^2}{2\sigma^2\tau}\right)du$$

식 (4.44)의 유도에 대해서는 Evans(1998)의 제2.3절을 참조하라.

넷째로, 식 (4.43)를 식 (4.44)에 대입해서 $w(y,\tau)$를 구하기로 하자. 다음 식이 성립한다.

(4.45) $$w(y,\tau) = I_1 - I_2$$

여기서 I_1과 I_2는 각각 다음과 같다.

$$(4.46) \qquad I_1 \doteq \int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{2}[k+1]u\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}}\exp\left(-\frac{[y-u]^2}{2\sigma^2\tau}\right)du$$

$$(4.47) \qquad I_2 \doteq \int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{2}[k-1]u\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}}\exp\left(-\frac{[y-u]^2}{2\sigma^2\tau}\right)du$$

정규확률밀도함수의 성질을 이용해서, 다음 식들을 유도할 수 있다.

$$(4.48) \qquad I_1 = \exp\left(\frac{1}{2}[k+1]y + \frac{1}{8}[k+1]^2\sigma^2\tau\right)N(d_1)$$

$$(4.49) \qquad I_2 = \exp\left(\frac{1}{2}[k-1]y + \frac{1}{8}[k-1]^2\sigma^2\tau\right)N(d_2)$$

다섯째로, 정적분들 I_1과 I_2를 사용해서 유럽형콜옵션가치 C_t를 표현하자. 식 (4.38), 식 (4.40), 식 (4.41), 그리고 식 (4.45)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$(4.50) \qquad C_t = K\exp\left(-\frac{1}{2}[k-1]y - \frac{\sigma^2[k+1]^2}{8}\tau\right)[I_1 - I_2]$$

식 (4.38)과 식 (4.48)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$(4.51) \qquad KI_1\exp\left(-\frac{1}{2}[k-1]y - \frac{\sigma^2[k+1]^2}{8}\tau\right) = S_tN(d_1)$$

식 (4.49)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$(4.52) \qquad KI_2\exp\left(-\frac{1}{2}[k-1]y - \frac{\sigma^2[k+1]^2}{8}\tau\right) = Ke^{-r\tau}N(d_2)$$

식 (4.51)과 식 (4.52)를 식 (4.50)에 대입하면, 원자산이 기하Brown운동을 하는 유럽형콜옵션의 무재정가치를 나타내는 Black-Scholes식이 다음과 같음을 확인할 수 있다.

$$(4.53) \qquad C_t = S_tN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)$$

5. 마팅게일법

유럽형콜옵션의 가치과정을 마팅게일(martingale)로 변환해서 그 가치를 평가하는 마팅게일법을 살펴보자. 이 방법을 적용해서 금융상품의 가치를 평가하기 위해서는 Girsanov정리를 알아야 하고, Girsanov정리를 이해하기 위해서는 동치확률측도(equivalent measure)라는 개념을 알아야 한다. 이에 대한 자세한 내용은 최병선(2013)의 제4.9절을 참조하라.

[정의 5.1] 가측공간 $(\Omega, \mathbb{F})$에서 정해지는 확률측도들 P와 Q를 살펴보자. 만약 임의의 사건 $A(\in \mathbb{F})$에 대해서 다음 명제가 성립하면, Q는 P에 대해서 절대연속(absolutely continuous)이라고 하고 식 $Q \ll P$로 표기한다.

$$P(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0$$

만약 $Q \ll P$이고 또한 $P \ll Q$이면, 두 확률측도들 P와 Q는 동치라고 한다. □

Girsanov정리는 어떤 확률측도를 동치확률측도로 변환하는 데 사용하는 주요한 도구이다. 어떤 기대값을 계산해야 하는 경우에, 원래 확률측도 대신에 동치확률측도를 사용해서 이 기대값을 계산하는 것이 편리한 경우도 있다. 이러한 경우에 Girsanov정리는 매우 편리한 도구이다.

[정리 5.1] Girsanov정리

확률공간 $(\Omega, \mathbb{F}, P)$에서 정의된 연속시간형 확률과정 $\{\theta_t \mid 0 \le t \le T\}$가 증대정보계 $\{\mathbb{F}_t \mid 0 \le t \le T\}$에 대해 적합이라고 하자. 여기서 T는 고정된 상수이다. 또한, $\{W_t \mid 0 \le t \le T\}$는 확률측도 P하에서 Brown운동이다. 다음 확률변수들과 함수를 정의하자.

$$\xi_t \doteq \exp\left(-\int_0^t \theta_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_u^2 du\right),\ (0 \le t \le T)$$

$$W_t^Q \doteq W_t + \int_0^t \theta_u du,\ (0 \le t \le T)$$

$$Q(A) \doteq E^P(1_A \xi_T),\ (A \in \mathbb{F}_T)$$

여기서 1_A는 집합 A 상에서 1을 취하고, 그렇지 않으면 0을 취하는 지시함수이다. 만약 확률과정 $\{\theta_t\}$가 Novikov조건 $E(\int_0^T \theta_u^2 \xi_u^2 du) < \infty$을 만족하면, 다음 식이 성립한다.

$$E(\xi_T) = 1$$

즉, Q는 확률측도이다. 또한, $\{W_t^Q \mid 0 \le t \le T\}$는 확률측도 Q와 증대정보계 $\{\mathbb{F}_t \mid 0 \le t \le T\}$에 대한 Brown운동이다. □

[정리 5.1]의 확률측도 Q는 원래 확률측도 P와 동치이다. 또한, 각 가측집합 $A(\in \mathbb{F}_T)$에 대해서 다음 식이 성립함은 명백하다.

$$Q(A) \doteq \int_A \xi_T dP(\omega) \tag{5.1}$$

식 (5.1)을 만족하는 ξ_T가 존재한다는 것이 Radon-Nikodym정리이다. 또한, 이 ξ_T를 확률측도 Q의 확률측도 P에 대한 Radon-Nikodym밀도라고 한다.

5.1. 위험중립가치평가

위험중립가치평가법에서는 다양한 구적법들(quadratures)과 시뮬레이션기법들을 적용할 수 있다. 위험중립가치평가법을 처음 연구한 것은 Cox and Ross(1976)로 알려져 있다. 그러나 위험중립확률이 상태가격이란 점을 고려한다면, Debreu(1959)와 Arrow(1964)로부터 위험중립가치평가법이 연구되기 시작했다고 할 수 있을 것이다. 그 후, Harrison and Kreps(1979)와 Harrison and Pliska(1981)가 위험중립가치평가식을 정교한 이론으로 발전시켰다. 이 절에서는 위험중립가치평가법을 사용해서 유럽형콜옵션의 Black-Scholes식을 유도하기로 하자.

원자산과정 $\{S_t \mid 0 \le t \le T\}$가 확률미분방정식 (2.1)을 만족하는 기하Brown운동을 하고, 식 (4.26)에서 정의한 위험의 시장가격을 λ로 표기하자. 즉, 다음 식이 성립한다.

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} \tag{5.2}$$

각 시점 $t(\in [0, T])$에서 다음 확률변수를 정의하자.

(5.3) $$\xi_t \doteq \exp\left(-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right)$$

또한, 다음 함수를 정의하자.

(5.4) $$Q(A) \doteq \int_A \xi_T dP(\omega), \quad (A \in \mathbb{F}_T)$$

[명제 2.3]을 이용해서, 다음 식들이 성립함을 증명할 수 있다.

(5.5) $$Q(\Omega) = \int_\Omega \xi_T dP(\omega) = 1, \quad Q(A) \geq 0 \quad (A \in \mathbb{F}_T)$$

즉, Q는 확률측도이다. 확률측도 Q가 확률측도 P와 동치임은 자명하다. 따라서, 확률측도 Q는 확률측도 P의 동치마팅게일측도(equivalent martingale measure)이다. 다음 확률변수를 정의하자.

(5.6) $$W_t^Q \doteq W_t + \lambda t, \quad (0 \leq t \leq T)$$

[정리 5.1]의 Girsanov정리에서 알 수 있듯이, $\{W_t^Q \mid 0 \leq t \leq T\}$는 동치확률측도 Q와 증대정보계 $\{\mathbb{F}_t \mid 0 \leq t \leq T\}$에 대한 Brown운동이다.

식 (2.1), 식 (5.2), 그리고 식 (5.6)에서 알 수 있듯이, 원자산과정 $\{S_t\}$는 다음 확률미분방정식을 만족한다.

(5.7) $$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^Q, \quad (0 \leq t \leq T)$$

식 (5.7)과 [명제 2.2]에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

(5.8) $$S_t = S_0 \exp\left(\left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right]t + \sigma W_t^Q\right), \quad (0 \leq t \leq T)$$

식 (5.8)과 [명제 2.3]에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

(5.9) $$E^Q(e^{-rt}S_t \mid S_s) = e^{-rs}S_s, \quad (0 \le s < t \le T)$$

식 (5.9)에서 알 수 있듯이, 할인된 원자산과정 $\{e^{-rt}S_t \mid 0 \le t \le T\}$는 동치확률측도 Q 하에서 마팅게일이다.

금융파생상품가치 $V(S_t, t)$의 확률적 움직임의 원인은 원자산이다. 따라서 이 금융파생상품을 원자산과 무위험채권으로 복제할 수 있다. 즉, 다음 식을 만족하는 자기금융과정 $\{(\alpha_t, \beta_t) \mid 0 \le t \le T\}$가 존재한다.

(5.10) $$V(S_t, t) = \alpha_t S_t + \beta_t B(t, T), \quad (0 \le t \le T)$$

식 (5.10)에 Ito-Doeblin보조정리, 자기금융조건, 그리고 식 (2.1)을 적용하면, 다음 식을 얻는다.

(5.11) $$dV(S_t, t) = [\alpha_t \mu S_t + \beta_t rB(t, T)]dt + \alpha_t \sigma S_t dW_t$$

Ito-Doeblin보조정리와 식 (5.11)을 사용해서, 다음 식을 유도할 수 있다.

(5.12) $$d[e^{-rt}V(S_t, t)] = e^{-rt}[\alpha_t \mu S_t + \beta_t rB(t, T) - rV(S_t, t)]dt + e^{-rt}\alpha_t \sigma S_t dW_t$$

식 (5.2)와 식 (5.6)을 식 (5.12)에 적용하면, 다음 식을 얻는다.

(5.13) $$d[e^{-rt}V(S_t, t)] = \sigma \alpha_t e^{-rt} S_t dW_t^Q$$

식 (5.13)에서 알 수 있듯이, $\{e^{-rt}V(S_t, t) \mid t \ge 0\}$는 동치마팅게일측도 Q하에서 마팅게일이다. 즉, 다음 식이 성립한다.

(5.14) $$V(S_t, t) = e^{-r\tau}E_t^Q(V(S_T, T))$$

식 (5.14)를 위험중립가치평가식(risk-neutral pricing formula)이라 부른다.

식 (5.14)에서 알 수 있듯이, 유럽형콜옵션에 대한 위험중립가치평가식은 다음과

같다.

$$C_t = E_t^Q(e^{-r\tau}[S_T - K]^+), \quad (0 \le t \le T) \tag{5.15}$$

원자산 S_T의 위험중립확률측도 Q하에서 확률밀도함수를 $f^Q(S_T)$로 표기하면, 식 (5.15)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C_t = e^{-r\tau}\int_0^\infty [S_T - K]^+ f^Q(S_T)dS_T = I_3 - I_4 \tag{5.16}$$

여기서 I_3과 I_4는 각각 다음과 같다.

$$I_3 \doteq e^{-r\tau}\int_K^\infty S_T f^Q(S_T)dS_T \tag{5.17}$$

$$I_4 \doteq Ke^{-r\tau}\int_K^\infty f^Q(S_T)dS_T \tag{5.18}$$

식 (5.18)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_4 = Ke^{-r\tau}Q(S_T > K) \tag{5.19}$$

다음과 같은 확률변수를 정의하자.

$$z \doteq \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left\{\ln\frac{S_T}{S_t} - \left[r - \frac{\sigma^2}{2}\right]\tau\right\} \tag{5.20}$$

식 (5.8)에서 알 수 있듯이, 확률변수 z는 위험중립확률측도 Q하에서 표준정규분포를 따른다. 따라서 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} I_4 &= Ke^{-r\tau}Q(S_T > K) = Ke^{-r\tau}Q\left(z > \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left\{\ln\frac{K}{S_t} - \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right]\tau\right\}\right) \\ &= Ke^{-r\tau}\left[1 - N\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left\{\ln\frac{K}{S_t} - \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right]\tau\right\}\right)\right] = Ke^{-r\tau}N(d_2) \end{aligned} \tag{5.21}$$

식 (5.20)의 확률변수 z를 이용하면, 정적분 I_3을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_3 = \int_{-d_2}^{\infty} S_t \exp\left(z\sigma\sqrt{\tau} - \frac{\sigma^2}{2}\tau \right) n(z)dz \tag{5.22}$$

다음 식들이 성립한다.

$$I_3 = S_t \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}[z - \sigma\sqrt{\tau}]^2 \right) dz = S_t N(d_2 + \sigma\sqrt{\tau}) = S_t N(d_1) \tag{5.23}$$

식 (5.21)과 식 (5.23)을 식 (5.16)에 대입하면, 유럽형콜옵션의 Black-Scholes식이 다음과 같음을 확인할 수 있다.

$$C_t = S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2) \tag{5.24}$$

5.2. Girsanov정리와 정적분

Girsanov정리를 사용해서 식 (5.17)의 정적분 I_3를 간편하게 계산해서, 유럽형콜옵션의 Black-Scholes식을 유도하기로 하자.

원자산과정 $\{S_u\}$가 확률미분방정식 (2.1)을 만족하는 기하Brown운동을 한다고 하고, 각 $t(\leq T)$에 대해서 다음 확률변수를 정의하자.

$$\xi_t^U \doteq \exp\left(\sigma W_t^Q - \frac{1}{2}\sigma^2 t \right) \tag{5.25}$$

[명제 2.3]에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$E(\xi_t^U) = 1, \quad (0 \leq t \leq T) \tag{5.26}$$

$$E\left(\int_0^T \sigma^2 [\xi_u^U]^2 du \right) = E\left(\sigma^2 \int_0^T \exp(2\sigma W_u^Q - \sigma^2 u)\, du \right) < \infty \tag{5.27}$$

식 (5.27)에서 알 수 있듯이, Novikov조건이 만족된다. 다음 함수를 정의하자.

(5.28) $$Q^U(A) \doteq \int_A \xi_T^U \, dQ(\omega), \quad (A \in \mathbb{F}_T)$$

식 (5.26)과 식 (5.28)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

(5.29) $$Q^U(\Omega) = \int_\Omega \xi_T^U \, dQ(\omega) = 1, \quad Q^U(A) \geq 0, \quad (A \in \mathbb{F}_T)$$

즉, Q^U는 확률측도이다. 다음과 같은 확률과정 $\{W_t^U \mid 0 \leq t \leq T\}$를 정의하자.

(5.30) $$W_t^U \doteq W_t^Q - \sigma t, \quad (0 \leq \mathrm{t} \leq T)$$

Girsanov정리에서 알 수 있듯이, $\{W_t^U\}$는 확률측도 Q^U와 증대정보계 $\{\mathbb{F}_t \mid 0 \leq t \leq T\}$에 대한 Brown운동이다.

식 (5.7)과 식 (5.30)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

(5.31) $$dS_t = [r + \sigma^2]S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t^U$$

식 (5.31)과 [명제 2.2]에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

(5.32) $$S_t = S_0 \exp\left(\left[r + \frac{1}{2}\sigma^2\right]t + \sigma W_t^U\right)$$

식 (5.8), 식 (5.25), 그리고 식 (5.28)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

(5.33) $$dQ^U = e^{-r\tau} \frac{S_T}{S_t} dQ$$

식 (5.33)을 위험중립가치평가식 (5.14)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

(5.34) $$\frac{V(S_t, t)}{S_t} = E_t^{Q^U}\left(\frac{V(S_T, T)}{S_T}\right)$$

즉, 동치마팅게일측도 Q^U하에서 $\{V(S_t, t)/S_t \mid 0 \leq t \leq T\}$는 마팅게일이다. 따라서 유럽

형콜옵션의 시점 t에서 무재정가치 C_t는 다음 식을 만족한다.

(5.35)
$$C_t = S_t E_t^{Q^U}\left(\frac{[S_T - K]^+}{S_T}\right)$$

정적분 I_3는 다음과 같다.

(5.36)
$$I_3 = S_t E_t^{Q}\left(e^{-r\tau}\frac{S_T}{S_t}1_{(S_T>K)}\right) = S_t E_t^{Q^U}(1_{\{S_T>K\}}) = S_t Q^U(S_T > K)$$

다음 확률변수를 정의하자.

(5.37)
$$z_U \doteq \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left\{\ln\frac{S_T}{S_t} - \left[r + \frac{\sigma^2}{2}\right]\tau\right\}$$

식 (5.32)에서 알 수 있듯이, 동치마팅게일측도 Q^U하에서 확률변수 z_U는 표준정규분포를 따른다. 따라서 다음 식들이 성립한다.

(5.38)
$$\begin{aligned} I_3 &= S_t Q^U(S_T > K) = S_t Q^U\left(z_U > \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left\{\ln\frac{K}{S_t} - \left[r + \frac{1}{2}\sigma^2\right]\tau\right\}\right) \\ &= S_t\left[1 - N\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left\{\ln\frac{K}{S_t} - \left[r + \frac{1}{2}\sigma^2\right]\tau\right\}\right)\right] = N(d_1) \end{aligned}$$

식 (5.21)과 식 (5.38)을 식 (5.16)에 대입하면, 유럽형콜옵션의 Black-Scholes식이 다음과 같음을 확인할 수 있다.

(5.39)
$$C_t = S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)$$

5.3. 기준재

기준재(numéraire)를 바꾸어서 옵션가치를 평가하는 기본적 아이디어는 의외로 간단하다. 예를 들어, 금융파생상품가치 $V(S_t, t)$를 무위험채권가치 $B(t, T)$로 나눈 상대가치과정 $\{V(S_t, t)/B(t, T)\}$를 마팅게일로 만드는 동치마팅게일측도 Q를 찾아내어, $V(S_t, t)$의 무재정가치를 평가하는 것이 위험중립가치평가이다. 이 무위험채권과 같이 상대가치를 만드는 기준으로 사용되는 금융상품을 기준재라고 한다. 금융파생상품가

치 $V(S_t, t)$를 새로운 기준재의 가치 N_t로 나눈 상대가치과정 $\{V(S_t, t)/N_t \mid 0 \le t \le T\}$를 마팅게일로 만드는 동치마팅게일측도 Q^N을 찾아낼 수 있다면, 이로부터 새로운 가치평가식을 유도할 수 있다. 직관적으로 보아, 식 (5.34)는 원자산을 기준재로 하는 동치마팅게일가치평가식이다. 이 절에서는 기준재라는 개념을 사용해서 상대가치과정 $\{V(S_t, t)/S_t\}$가 마팅게일이 되는 동치마팅게일측도 Q^S를 구하고, 이를 사용해서 유럽형콜옵션의 Black-Scholes식을 유도하기로 하자.

이러한 목표를 달성하기 위해서는 다음과 같은 2변량 Ito-Doeblin보조정리가 필요하다.

[명제 5.1] 확률벡터과정 $\{[x_t, y_t]^t \mid t \ge 0\}$가 다음 연립확률미분방정식을 만족한다고 하자.

$$dx_t = \mu_t^x dt + \sigma_t^x dW_t$$
$$dy_t = \mu_t^y dt + \sigma_t^y dW_t$$

여기서 $\{W_t \mid t \ge 0\}$는 Brown운동이다. 만약 함수 $F = F(x_t, y_t, t)$가 t에 관해서 C^1급이고 또한 x와 y에 대해서 C^2급이면, 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} dF(x_t, y_t, t) &= \frac{\partial F}{\partial x} dx_t + \frac{\partial F}{\partial y} dy_t + \frac{\partial F}{\partial t} dt \\ &\quad + \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} [\sigma_t^x]^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \sigma_t^x \sigma_t^y + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} [\sigma_t^y]^2 \right\} dt \end{aligned}$$

□

확률미분방정식 (2.1)를 만족하는 기하Brown운동 $\{S_u\}$를 원자산과정으로 하는 금융파생상품의 시점 t에서 무재정가치를 $V(S_t, t)$라 하자. 무위험채권가격과정 $\{B(t, T) \mid 0 \le t \le T\}$가 다음 확률미분방정식을 만족하는 것은 명백하다.

(5.40) $$dB(t, T) = rB(t, T)dt + 0 \cdot B(t, T)dW_t^Q$$

다음 식들이 성립한다.

$$d\left[\frac{B(t,T)}{S_t}\right]=\frac{1}{S_t}dB(t,T)-\frac{B(t,T)}{S_t^2}dS_t+\frac{1}{S_t^3}\sigma^2 S_t^2 B(t,T)dt$$
$$(5.41)\qquad =-\frac{B(t,T)}{S_t}\sigma[dW_t^Q-\sigma dt]$$

여기서 첫 번째 등호는 [명제 5.1]의 2변량 Ito-Doeblin보조정리에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 식 (2.1)과 식 (5.40)에 의해서 성립한다. 다음 확률변수들을 정의하자.

$$(5.42)\qquad dW_t^S \doteq dW_t^Q-\sigma dt$$

$$(5.43)\qquad \xi_t^S \doteq \exp\left(\sigma W_t^Q-\frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

[명제 2.3]에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$(5.44)\qquad E(\xi_t^S)=1,\quad (0\le t\le T)$$

$$(5.45)\qquad E\left(\int_0^T \sigma^2[\xi_u^S]^2 du\right)=E\left(\sigma^2\int_0^T \exp(2\sigma W_u^Q-\sigma^2 u)du\right)<\infty$$

식 (5.45)에서 알 수 있듯이, Novikov조건이 만족된다. 다음 함수를 정의하자.

$$(5.46)\qquad Q^S(A)\doteq\int_A \xi_T^S dQ(\omega),\quad A(\in \mathbb{F}_T)$$

식 (5.44)와 식 (5.46)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$(5.47)\qquad Q^S(\Omega)=\int_\Omega \xi_T^S dQ(\omega)=1,\ Q^S(A)\ge 0,\quad A(\in \mathbb{F}_T)$$

즉, Q^S는 확률측도이다. Girsanov정리에서 알 수 있듯이, $\{W_t^S \mid 0\le t\le T\}$는 확률측도 Q^S와 증대정보계 $\{\mathbb{F}_t \mid 0\le t\le T\}$에 대한 Brown운동이다. 식 (5.41)과 식 (5.42)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$d\left[\frac{B(t,T)}{S_t}\right] = -\frac{B(t,T)}{S_t}\sigma dW_t^S \tag{5.48}$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$E_u^{Q^S}\left(\frac{B(t,T)}{S_t}\right) = \frac{B(u,T)}{S_u}, \quad (u \le t) \tag{5.49}$$

즉, 동치마팅게일측도 Q^S하에서 확률과정 $\{B(t, T)/S_t \mid 0 \le t \le T\}$는 마팅게일이다.

이 시장모형이 완비이므로, 시점 t에서 가치가 $V(S_t, t)$인 금융파생상품을 원자산과 무위험채권으로 복제할 수 있다. 즉, 식 (5.10)을 만족하는 자기금융과정 $\{(\alpha_t, \beta_t) \mid 0 \le t \le T\}$가 존재한다. 이 $V(S_t, t)$는 다음 식들을 만족한다.

$$\begin{aligned} d\left[\frac{V(S_t,t)}{S_t}\right] &= d\alpha_t + \frac{B(t,T)}{S_t}d\beta_t + \beta_t d\left[\frac{B(t,T)}{S_t}\right] \\ &= \frac{1}{S_t}[S_t d\alpha_t + B(t,T)d\beta_t] - \beta_t \frac{B(t,T)}{S_t}\sigma dW_t^S \\ &= -\beta_t \frac{B(t,T)}{S_t}\sigma dW_t^S \end{aligned} \tag{5.50}$$

여기서 첫 번째 등호는 Ito-Doeblin보조정리에 의해서, 두 번째 등호는 식 (5.48)에 의해서, 그리고 세 번째 등호는 자기금융조건 (2.7)에 의해서 성립한다. 식 (5.50)에서 알 수 있듯이, $\{V(S_t, t)/S_t \mid 0 \le t \le T\}$는 동치마팅게일측도 Q^S하에서 마팅게일이다. 즉, 다음 식이 성립한다.

$$E_u^{Q^S}\left(\frac{V(S_t,t)}{S_t}\right) = \frac{V(S_u,u)}{S_u}, \quad (u < t) \tag{5.51}$$

식 (5.51)은 식 (5.34)와 일치한다. 이 시장모형은 완비이므로, 식 (5.34)의 동치마팅게일측도 Q^U와 식 (5.51)의 동치마팅게일측도 Q^S는 같다. 식 (5.51)에서 알 수 있듯이, 만기시점 T에서 행사가격이 K인 유럽형콜옵션의 시점 t에서 무재정가치 C_t는 다음 식을 만족한다.

(5.52)
$$C_t = S_t E_t^{Q^S}\left(\frac{[S_T - K]^+}{S_T}\right)$$

식 (5.52)는 식 (5.35)와 동일하다. 따라서 식 (5.39)에서 알 수 있듯이, 유럽형콜옵션의 Black-Scholes식이 다음과 같다.

(5.53)
$$C_t = S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)$$

6. Feynman–Kac정리와 Kolmogolov방정식

6.1. Feynman-Kac정리

Feynman(1948)과 Kac(1951)에 의해 제시된 Feynman-Kac정리를 사용해서, 유럽형옵션의 Black-Scholes방정식을 유도하기로 하자.

Feynman-Kac정리는 양자역학이나 통계물리에 나타나는 편미분방정식의 해를 양자역학적 진화(evolution)로 보는 Feynman의 관점에서 다루는 도구이다. 다음 정리의 증명은 최병선(2013)의 제5.7절을 참조하라.

[정리 6.1] Feynman-Kac정리

확률과정 $\{S_u \mid u \geq 0\}$가 다음 확률미분방정식을 만족한다고 하자.

$$dS_u = \mu(S_u, u)du + \sigma(S_u, u)dW_u$$

고정된 T와 주어진 $t(\in [0, T])$, 그리고 Borel가측인 함수 $h(y)$에 대해서 다음 함수를 정의하자.

$$g(x, t) \doteq E_t^x(h(S_T))$$

여기서 $E_t^x(\cdot)$는 시점 t에서 $S_t = x$라는 조건하에서 기대값연산자이다. 또한, 각 x에 대해서 다음 식이 성립한다고 가정하자.

$$E_t^x(|h(S_T)|) < \infty$$

이러한 조건하에서, $g(x, t)$는 다음 편미분방정식을 만족한다.

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} + \mu(x,t)\frac{\partial g(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 g(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

또한, 말기조건은 다음과 같다.

$$g(y, T) = h(y) \qquad \square$$

원자산과정 $\{S_u\}$가 확률미분방정식 (2.1)을 만족하는 기하Brown운동이라고 하면, 이 $\{S_u\}$는 위험중립확률측도 Q하에서 확률미분방정식 (5.7)을 만족한다. 식 (5.7)과 [정리 6.1]의 Feynman-Kac정리에서 알 수 있듯이, 함수 $g(S_t, t) = E_t^Q([S_T - K]^+)$는 다음 확률미분방정식을 만족한다.

$$\frac{\partial g(S_t,t)}{\partial t} + rS_t\frac{\partial g(S_t,t)}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 g(S_t,t)}{\partial S_t^2} = 0 \tag{6.1}$$

유럽형콜옵션가치 C_t의 위험중립가치평가식은 다음과 같다.

$$C_t = e^{-r\tau}E_t^Q([S_T - K]^+) = e^{-r\tau}g(S_t, t) \tag{6.2}$$

식 (6.2)를 식 (6.1)에 대입하면, 다음 편미분방정식이 성립함을 알 수 있다.

$$-rC_t + \frac{\partial C_t}{\partial t} + rS_t\frac{\partial C_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} = 0 \tag{6.3}$$

편미분방정식 (6.3)은 Black-Scholes방정식 (4.10)과 같다. 즉, 위험중립가치평가식 (6.2)에 의해 계산된 유럽형콜옵션가치 C_t는 원자산이 기하Brown운동을 하는 Black-Scholes방정식을 만족한다.

6.2. Kolmogorov의 후향미분방정식

Kolmogorov의 후향미분방정식을 사용해서, 유럽형옵션의 Black-Scholes방정식을 유도하기로 하자.

다음 정리는 Kolmogorov의 후향미분방정식에 관한 것이다. 이 정리의 증명과 이에 대한 자세한 내용은 최병선(2013)의 제5.7절을 참조하라.

[정리 6.2] Kolmogorov의 후향미분방정식

다음 확률미분방정식을 살펴보자.

$$dS_u = \mu(S_u, u)du + \sigma(S_u, u)dW_u, \quad (u \geq 0)$$

여기서 $\{W_u \mid u \geq 0\}$는 Brown운동이다. 확률과정 $\{S_u \mid u \geq 0\}$의 추이확률밀도함수를 $p(t, T; x, y)$라고 하고, 다음 식이 성립한다고 가정하자.

$$p(t, T; x, y) = 0, \quad (0 \leq t < T \text{ and } y \leq 0)$$

이러한 조건하에서, 추이확률밀도함수 $p(t, T; x, y)$는 다음 편미분방정식을 만족한다.

$$-\frac{\partial p(t,T;x,y)}{\partial t} = \mu(x,t)\frac{\partial p(t,T;x,y)}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 p(t,T;x,y)}{\partial x^2}$$

이 편미분방정식에서 t와 x는 변수들로 T와 y는 상수들로 간주된다. 이 t와 x를 후행변수들(backward variables)이라고 한다. □

원자산과정 $\{S_u\}$가 확률미분방정식 (2.1)을 만족하는 기하Brown운동이면, 이 $\{S_u\}$는 위험중립확률측도 Q하에서 확률미분방정식 (5.7)을 만족한다. 식 (5.7)과 [정리 6.2]의 Kolmogorov의 후향미분방정식에서 알 수 있듯이, Borel가측인 함수 $h(y)$에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\text{(6.4)} \qquad \int_0^\infty h(y)\left[q_t(t,T;S_t,y) + rS_t q_S(t,T;S_t,y) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 q_{SS}(t,T;S_t,y)\right]dy = 0$$

여기서 $q(t, T; x, y)$는 위험중립확률측도 Q에 해당하는 추이확률밀도함수이다. 식 (6.4)에서 알 수 있듯이, 함수 $\hat{h}(S_t, t) \doteq E_t^Q(h(S_T))$는 다음 식을 만족한다.

$$\hat{h}_t(S_t, t) + rS_t\hat{h}_S(S_t, t) + \frac{1}{2}\hat{h}_{SS}(S_t, t)\sigma^2 S_t^2 = 0 \tag{6.5}$$

만기시점 T에서 지불금액함수가 $V(S_T, T)$인 유럽형옵션의 시점 t에서 무재정가치는 $V(S_T, t) = e^{-r\tau}E_t^Q(V(S_T, T))$이다. 식 (6.5)에 함수 $\hat{h}(S_t, t) = e^{r\tau}V(S_t, t)$를 대입하면, 다음 편미분방정식을 얻는다.

$$-rV(S_t, t) + V_t(S_t, t) + rS_tV_S(S_t, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 V_{SS}(S_t, t) = 0 \tag{6.6}$$

편미분방정식 (6.6)은 원자산이 기하Brown운동을 하는 Black-Scholes방정식 (4.10)과 같다.

6.3. Kolmogorov의 전향미분방정식

Kolmogorov의 전향미분방정식을 사용해서, 유럽형콜옵션의 Black-Scholes식을 유도하기로 하자.

Kolmogorov의 전향미분방정식을 Fokker-Planck방정식이라고도 부른다. 다음 정리는 Kolmogorov의 전향미분방정식에 관한 것이다. 이 정리의 증명과 이에 대한 자세한 내용은 최병선(2013)의 제5.7절을 참조하라.

[정리 6.3] Kolmogorov의 전향미분방정식

다음 확률미분방정식을 살펴보자.

$$dS_u = \mu(S_u, u)du + \sigma(S_u, u)dW_u, \quad (u \ge 0)$$

여기서 $\{W_u \mid u \ge 0\}$는 Brown운동이다. 확률과정 $\{S_u \mid u \ge 0\}$의 추이확률밀도함수를 $p(t, T; x, y)$라고 하고, 다음 식이 성립한다고 가정하자.

$$p(t, T; x, y) = 0, \quad (0 < t \le T \text{ and } y \le 0)$$

이러한 조건하에서, 추이확률밀도함수 $p(t, T; x, y)$는 다음 편미분방정식을 만족한다.

$$\frac{\partial p(t,T;x,y)}{\partial T} = -\frac{\partial}{\partial y}[\mu(y,T)p(t,T;x,y)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\sigma^2(y,T)p(t,T;x,y)]$$

여기서 t와 x는 상수들로 T와 y는 변수들로 간주된다. 이 T와 y를 선행변수들(forward variables)이라 한다. □

원자산과정 $\{S_u\}$가 확률미분방정식 (2.1)을 만족하는 기하Brown운동이라고 하면, 이 $\{S_u\}$는 위험중립확률측도 Q하에서 확률미분방정식 (5.7)을 만족한다. 현재시점 t에서 원자산 S_t가 주어진 조건하에 원자산 S_T의 위험중립확률측도 Q하에서 확률밀도함수를 $f^Q(S_T)$라 하자. [정리 6.3]에서 알 수 있듯이, 확률밀도함수를 $f^Q(S_T)$는 다음과 같은 Kolmogorov의 전향미분방정식을 만족한다.

(6.7)
$$-\frac{\partial f^Q(S_T)}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial S_T}[rS_T f^Q(S_T)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S_T^2}[\sigma^2 S_T^2 f^Q(S_T)] = 0$$

이 편미분방정식의 초기조건은 다음과 같다.

(6.8)
$$f^Q(S_t) = \delta(S_T - S_t)$$

즉, 시점 t에서 추이확률밀도함수 f^Q는 점 S_T에 모든 질량이 모여 있는 Dirac델타함수이다.

Black-Scholes환경하에서 다음 식들이 성립한다.

(6.9)
$$\lim_{S_T \to \infty} rS_T f^Q(S_T) = 0$$

(6.10)
$$\lim_{S_T \to \infty} \sigma^2 S_T^2 f^Q(S_T) = 0$$

(6.11)
$$\lim_{S_T \to \infty} \frac{\partial}{\partial S_T}[\sigma^2 S_T^2 f^Q(S_T)] = 0$$

식 (6.7)의 양변을 구간 $[y, \infty)$에서 S_T에 대해 적분한 다음, 식 (6.9)와 식 (6.11)을 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$-\frac{\partial}{\partial T}\int_y^\infty f^Q(S_T)dS_T + ryf^Q(y) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}[\sigma^2 y^2 f^Q(y)] = 0 \tag{6.12}$$

식 (6.12)의 양변을 구간 $[K, \infty)$에서 y에 대해 적분한 다음, 식 (6.10)을 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$-\frac{\partial}{\partial T}\int_K^\infty\int_y^\infty f^Q(S_T)dS_T dy + r\int_K^\infty S_T f^Q(S_T)dS_T + \frac{1}{2}\sigma^2 K^2 f^Q(K) = 0 \tag{6.13}$$

Fubini정리나 부분적분을 사용하면, 유럽형콜옵션의 시점 t에서 무재정가치 C_t가 다음 식을 만족함을 알 수 있다.

$$e^{r\tau}C_t = \int_K^\infty\int_y^\infty f^Q(S_T)dS_T dy \tag{6.14}$$

식 (6.14)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\frac{\partial}{\partial T}\int_K^\infty\int_y^\infty f^Q(S_T)dS_T dy = e^{r\tau}\frac{\partial C_t}{\partial T} + re^{r\tau}C_t \tag{6.15}$$

$$\int_K^\infty f^Q(S_T)dS_T = -\frac{\partial}{\partial K}\int_K^\infty\int_y^\infty f^Q(S_T)dS_T dy = -e^{r\tau}\frac{\partial C_t}{\partial K} \tag{6.16}$$

위험중립가치평가식 (5.16)에서 알 수 있듯이, 유럽형콜옵션의 시점 t에서 무재정가치 C_t는 다음 식을 만족한다.

$$e^{r\tau}C_t = \int_K^\infty S_T f^Q(S_T)dS_T - K\int_K^\infty f^Q(S_T)dS_T \tag{6.17}$$

식 (6.16)을 식 (6.17)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\int_K^\infty S_T f^Q(S_T)dS_T = e^{r\tau}C_t - Ke^{r\tau}\frac{\partial C_t}{\partial K} \tag{6.18}$$

식 (6.16)의 각 변을 K에 대해서 미분하면, 다음 식을 얻는다.

(6.19)
$$f^Q(K) = -e^{r\tau}\frac{\partial^2 C_t}{\partial K^2}$$

유럽형콜옵션의 무재정가치 C_t를 행사가격 K와 만기시점 T의 함수로 보고, $C(K, T)$로 표기하자. 식 (6.15), 식 (6.18), 그리고 식 (6.19)를 식 (6.13)에 대입하면, 다음 편미분방정식을 얻는다.

(6.20)
$$-\frac{\partial C(K,T)}{\partial T} - rK\frac{\partial C(K,T)}{\partial K} + \frac{1}{2}\sigma^2 K^2\frac{\partial^2 C(K,T)}{\partial K^2} = 0$$

이 편미분방정식의 초기조건은 다음과 같다.

(6.21)
$$C(S_T, T) = [S_T - K]^+$$

편미분방정식 (6.20)와 초기조건 (6.21)로 이루어진 경계값문제의 해가 [정리 2.1]에 기술한 유럽형콜옵션의 가치평가식인 Black-Scholes식이다.

식 (6.20)은 Dupire(1994)가 제시한 것이다. 이 식에서 알 수 있듯이, 변동성 σ를 행사가격 K와 만기시점 T의 함수인 $\sigma(K, T)$로 간주할 수 있다. 이 $\sigma(K, T)$를 국소변동성(local volatility)이라 한다. 국소변동성은 시장에서 옵션의 가치를 평가하는 데 중요한 역할을 한다.

7. 효용함수와 CAPM

7.1. 지수형 효용함수

Rubinstein(1976)은 지수형의 효용함수를 갖는 대표적 투자자가 존재한다는 가정하에 Black-Scholes식을 유도하였다. 이 방법에 대해서 살펴보자.

완비시장에 N개의 금융상품들이 존재하고, 시점 $u(\in [t, T])$에서 이들의 가치를 $S_u^{(1)}, S_u^{(2)}, \cdots, S_u^{(N)}$이라 하고, 이들로 이루어진 확률벡터를 $\boldsymbol{S}_u \doteq [S_u^{(1)}, S_u^{(2)}, \cdots, S_u^{(N)}]^t$라고 하자. 어떤 투자자가 시점 t에서 제i번째 상품을 $x^{(i)}$단위 보유하고 있다고 하면, 이 투자자의 시점 t에서 포트폴리오는 $\boldsymbol{x} = [x^{(1)}\ x^{(2)} \cdots x^{(N)}]^t$이다. 이 투자자가 시간구간 $(t, T]$

에서 포트폴리오를 재구성하지 않는다고 가정하면, 이 투자자의 초기시점 t에서 부(wealth)는 $v_t = \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{S}_t$이고, 말기시점 T에서 부는 $v_T = \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{S}_T$이다. 이 투자자의 말기시점 T에서 효용함수를 $u(v_T)$로 표기하고, 이 효용함수의 기대값 $E^P(u(v_T))$를 최대화하기로 하자. 여기서 제약조건은 초기시점 t에서 부 v_t가 주어진 것이다. 즉, 이 최적화문제를 다음과 같이 쓸 수 있다.

(7.1) $$\max_{\boldsymbol{x}} E_t^P(u(\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{S}_T)) \quad s.t. \quad \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{S}_t = v_t$$

최적화문제 (7.1)을 풀기 위해서, 다음 Lagrange함수를 정의하자.

(7.2) $$L \doteq E_t^P(u(\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{S}_T)) + \lambda[v_t - \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{S}_t]$$

최적화의 1차조건은 다음과 같다.

(7.3) $$\boldsymbol{S}_t = \frac{1}{\lambda} E_t^P(u'(\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{S}_T)\boldsymbol{S}_T)$$

이 시장모형이 완비이므로, 만기시점 T에서 가치가 1인 무위험채권의 시점 u에서 가치를 $\boldsymbol{\alpha}^t\boldsymbol{S}_u$로 나타낼 수 있는 포트폴리오 $\boldsymbol{\alpha}$가 존재한다. 따라서 다음 식들이 성립한다.

(7.4) $$e^{-r\tau} = \boldsymbol{\alpha}^t\boldsymbol{S}_t = \frac{1}{\lambda} E_t^P(u'(\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{S}_T)\boldsymbol{\alpha}^t\boldsymbol{S}_T) = \frac{1}{\lambda} E_t^P(u'(\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{S}_T))$$

여기서 두 번째 등호는 식 (7.3)에 의해서 성립한다. 식 (7.3)과 식 (7.4)에서 알 수 있듯이, 다음 가치평가식이 성립한다.

(7.5) $$\boldsymbol{S}_t = e^{-r\tau} E_t^P\left(\frac{u'(v_T)}{E^P(u'(v_T))}\boldsymbol{S}_T\right)$$

대표적 투자자가 다음과 같은 지수효용함수를 갖는다고 가정하자.

(7.6) $$u(x) = \frac{1}{1+\gamma} x^{1+\gamma}$$

여기서 γ는 $(-1, 0)$에 속한다. 이 효용함수는 HARA함수(hyperbolic absolute risk aversion function)이다. HARA함수에 대해서는 최병선(2004b)의 제5.4절을 참조하라.

원자산과정 $\{S_u\}$가 다음 확률미분방정식을 따르는 기하Brown운동이라고 하자.

(7.7) $$\frac{dS_u}{S_u} = \mu_S du + \sigma_S dW_{S,u}, \ (u \ge 0)$$

또한, 대표적 투자자의 부(wealth) v_u는 다음 확률미분방정식을 만족한다고 하자.

(7.8) $$\frac{dv_u}{v_u} = \mu_v du + \sigma_v dW_{v,u}, \ (u \ge 0)$$

여기서 Brown운동들 $\{W_{S, u}\}$와 $\{W_{v, u}\}$는 다음 식을 만족한다고 하자.

(7.9) $$\mathrm{Corr}(dW_{S, u}, dW_{v, u}) = \rho du$$

식 (7.7)과 [명제 2.2]에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

(7.10) $$S_T = S_t \exp\left(\left[\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right]\tau + \sigma_S[W_{S,T} - W_{S,t}]\right)$$

또한, 식 (7.8)과 [명제 2.2]에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

(7.11) $$v_T = v_t \exp\left(\left[\mu_v - \frac{1}{2}\sigma_v^2\right]\tau + \sigma_v[W_{v,T} - W_{v,t}]\right)$$

식 (7.6)과 식 (7.11)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

(7.12) $$u'(v_T) = v_t^\gamma \exp\left(\gamma\left[\mu_v - \frac{1}{2}\sigma_v^2\right]t + \gamma\sigma_v[W_{v,T} - W_{v,t}]\right)$$

식 (7.12)와 [명제 2.3]에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

(7.13) $$E_t^P(u'(v_T)) = v_t^\gamma \exp\left(\gamma\left[\mu_v - \frac{1}{2}\sigma_v^2\right]\tau + \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_v^2\tau\right)$$

식 (7.12)와 식 (7.13)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\text{(7.14)} \qquad \frac{u'(v_T)}{E_t^P(u'(v_T))} = \exp\left(\gamma\sigma_v[W_{v,T} - W_{v,t}] - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_v^2\tau\right)$$

식 (7.5)에 식 (7.14)를 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\text{(7.15)} \qquad S_t = e^{-r\tau}E_t^P\left(\exp\left(\gamma\sigma_v[W_{v,T} - W_{v,t}] - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_v^2\tau\right)S_T\right)$$

식 (7.10)과 식 (7.15)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\text{(7.16)} \qquad \begin{aligned} &E_t^P(\exp(\gamma\sigma_v[W_{v,T} - W_{v,t}] + \sigma_S[W_{S,T} - W_{S,t}])) \\ &\cdot\exp\left(\left\{-r - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_v^2 + \left[\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right]\right\}\tau\right) = 1 \end{aligned}$$

평균벡터가 $\boldsymbol{\mu}$이고 분산공분산행렬이 Σ인 정규확률벡터 $\boldsymbol{x}$의 적률모함수는 다음과 같다.

$$\text{(7.17)} \qquad E(\exp(\boldsymbol{\lambda}^t\boldsymbol{x})) = \exp\left(\boldsymbol{\lambda}^t\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^t\Sigma\boldsymbol{\lambda}\right)$$

식 (7.9)와 식 (7.17)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\text{(7.18)} \qquad \begin{aligned} &E_t^P(\exp(\gamma\sigma_v[W_{v,T} - W_{v,t}] + \sigma_S[W_{S,T} - W_{S,t}])) \\ &= \exp\left(\frac{\tau}{2}[\gamma^2\sigma_v^2 + 2\gamma\sigma_v\sigma_S\rho + \sigma_S^2]\right) \end{aligned}$$

식 (7.18)을 식 (7.16)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\text{(7.19)} \qquad -r - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_v^2 + \left[\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right] + \frac{1}{2}[\gamma^2\sigma_v^2 + 2\gamma\sigma_v\sigma_S\rho + \sigma_S^2] = 0$$

식 (7.19)를 정리하면, 다음과 같다.

$$\text{(7.20)} \qquad \frac{\mu_S - r}{\sigma_S} = -\gamma\sigma_v\rho$$

식 (7.20)은 어떤 금융상품에 대해서도 성립한다. 따라서 $-\gamma\sigma_v\rho$는 위험의 시장가격이다.

시장모형이 완비이므로, 만기시점 T에서 지불금액이 K인 유럽형콜옵션의 시점 u에서 가치 C_u를 $\boldsymbol{\beta}^t S_u$로 쓸 수 있는 포트폴리오 $\boldsymbol{\beta}$가 존재한다. 식 (7.5)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{S}_t = e^{-r\tau} E_t^P \left(\frac{u'(v_T)}{E^P(u'(v_T))} \boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{S}_T \right) \tag{7.21}$$

즉, 이 유럽형콜옵션의 시점 t에서 무재정가치 C_t는 다음과 같다.

$$C_t = e^{-r\tau} E_t^P \left(\frac{u'(v_T)}{E^P(u'(v_T))} C_T \right) \tag{7.22}$$

식 (7.14)를 식 (7.22)에 대입하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$C_t = e^{-r\tau} E_t^P \left(\exp\left(\gamma\sigma_v [W_{v,T} - W_{v,t}] - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_v^2\tau \right) [S_T - K]^+ \right) = I_5 - I_6 \tag{7.23}$$

여기서 I_5과 I_6는 각각 다음과 같다.

$$I_5 \doteq e^{-r\tau} E_t^P \left(\exp\left(\gamma\sigma_v [W_{v,T} - W_{v,t}] - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_v^2\tau \right) S_T 1_{\{S_T \geq K\}} \right) \tag{7.24}$$

$$I_6 \doteq e^{-r\tau} E_t^P \left(\exp\left(\gamma\sigma_v [W_{v,T} - W_{v,t}] - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_v^2\tau \right) K 1_{\{S_T \geq K\}} \right) \tag{7.25}$$

정적분들 I_5와 I_6를 계산하기 위해서, 다음 확률변수들을 정의하자.

$$z_S \doteq \frac{1}{\sqrt{\tau}} [W_{S,T} - W_{S,t}],\ z_v \doteq \frac{1}{\sqrt{\tau}} [W_{v,T} - W_{v,t}] \tag{7.26}$$

식 (7.9)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} z_S \\ z_v \end{bmatrix} \overset{d}{\sim} N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \right) \tag{7.27}$$

따라서 확률벡터 $\boldsymbol{z} = [z_S\, z_v]^t$의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f_z(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2[1-\rho^2]}[z_S^2 - 2\rho z_S z_v + z_v^2] \right) \tag{7.28}$$

식 (7.10)과 식 (7.26)에서 알 수 있듯이, 다음 명제가 성립한다.

$$S_T \geq K \Leftrightarrow z_S \geq -\frac{1}{\sigma_S\sqrt{\tau}}\left\{ \ln\frac{S_t}{K} + \left[\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2 \right]\tau \right\} \tag{7.29}$$

식 (7.20)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{1}{\sigma_S\sqrt{\tau}}\left\{ \ln\frac{S_t}{K} + \left[\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2 \right]\tau \right\} = d_{S,2} - \gamma\rho\sigma_v\sqrt{\tau} \tag{7.30}$$

여기서 $d_{S,2}$는 다음과 같다.

$$d_{S,2} \doteq \frac{1}{\sigma_S\sqrt{\tau}}\left\{ \ln\frac{S_t}{K} + \left[r - \frac{1}{2}\sigma_S^2 \right]\tau \right\} \tag{7.31}$$

식 (7.29)와 식 (7.31)에서 알 수 있듯이, 다음 명제가 성립한다.

$$S_T \geq K \Leftrightarrow z_S \geq -[d_{S,2} - \gamma\rho\sigma_v\sqrt{\tau}] \tag{7.32}$$

식 (7.25), 식 (7.28), 그리고 식 (7.32)에서 알 수 있듯이, 정적분 I_6를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} I_6 = Ke^{-r\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} & \exp\left(\gamma\sigma_v\sqrt{\tau}z_v - \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_v^2\tau \right) 1(\{z_S \geq -d_{S,2} + \gamma\rho\sigma_v\sqrt{\tau}\}) \\ & \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2[1-\rho^2]}[z_S^2 - 2\rho z_S z_v + z_v^2] \right) dz_S dz_v \end{aligned} \tag{7.33}$$

식 (7.33)의 우변을 z_v에 대해서 적분하면, 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} I_6 = Ke^{-r\tau}\int_{-\infty}^{\infty} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}[z_S - \gamma\rho\sigma_v\sqrt{\tau}]^2 \right) \\ & \cdot 1(\{z_S \geq -d_{S,2} + \gamma\rho\sigma_v\sqrt{\tau}\}) dz_S \end{aligned} \tag{7.34}$$

식 (7.34)의 우변의 정적분에 변수변환 $x_S = z_S - \gamma\rho\sigma_v\sqrt{\tau}$을 적용하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$I_6 = Ke^{-r\tau}\int_{-d_{S,2}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}x_S^2\right)dx_S = Ke^{-r\tau}N(-d_{S,2}) \tag{7.35}$$

식 (7.10), 식 (7.24), 그리고 식 (7.26)에서 알 수 있듯이, 정적분 I_5를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_5 = S_t e^{-r\tau}\exp\left(-\frac{1}{2}\gamma^2\sigma_v^2\tau + \left[\mu_S - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right]\tau\right)J_3 \tag{7.36}$$

여기서 J_3는 다음과 같다.

$$J_3 \doteq E_t^P(\exp(\gamma\sigma_v\sqrt{\tau}z_v + \sigma_S\sqrt{\tau}z_S)1(\{z_S \geq -d_{S,2} + \gamma\rho\sigma_v\sqrt{\tau}\})) \tag{7.37}$$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} J_3 = &\exp\left(\frac{1}{2}\tau[\sigma_S^2 + 2\rho\sigma_S\gamma\sigma_v + \gamma^2\sigma_v^2]\right) \\ &\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \\ &\cdot\exp\left(-\frac{1}{2[1-\rho^2]}[z_v - \{\rho z_S + [1-\rho^2]\gamma\sigma_v\sqrt{\tau}\}]^2\right)dz_v \\ &\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\{z_S - [\rho\gamma\sigma_v + \sigma_s]\sqrt{\tau}\}^2\right) \\ &\cdot 1(\{z_S \geq -d_{S,2} + \gamma\rho\sigma_v\sqrt{\tau}\})dz_S \end{aligned} \tag{7.38}$$

식 (7.38)의 우변을 z_v에 대해서 적분하면, 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} J_3 = &\exp\left(\frac{1}{2}\tau[\sigma_S^2 + 2\rho\sigma_S\gamma\sigma_v + \gamma^2\sigma_v^2]\right) \\ &\cdot\int_{-\infty}^{\infty}1(\{z_S \geq -d_{S,2} + \gamma\rho\sigma_v\sqrt{\tau}\})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\{z_S - [\rho\gamma\sigma_v + \sigma_s]\sqrt{\tau}\}^2\right)dz_S \end{aligned} \tag{7.39}$$

식 (7.39)의 우변의 정적분에 변수변환 $y_S = z_S - [\rho\gamma\sigma_v + \sigma_s]\sqrt{\tau}$를 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$(7.40) \qquad J_3 = \exp\left(\frac{1}{2}\tau[\sigma_S^2 + 2\rho\sigma_S\gamma\sigma_v + \gamma^2\sigma_v^2]\right)\int_{-d_{S,1}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}y_S^2\right)dy_S$$

여기서 $d_{S,1}$은 다음과 같다.

$$(7.41) \qquad d_{S,1} \doteq d_{S,2} + \sigma_S\sqrt{\tau}$$

다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$(7.42) \qquad I_5 = S_t e^{-r\tau}\exp([\mu_S + \rho\gamma\sigma_S\sigma_v]\tau)N(d_{S,1}) = S_t N(d_{S,1})$$

여기서 첫 번째 등호는 식 (7.36)과 식 (7.40)에 의해서, 그리고 두 번째 등호는 식 (7.20)에 의해서 성립한다.

식 (7.35)와 식 (7.42)를 식 (7.23)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$(7.43) \qquad C_t = S_t N(d_{S,1}) - K\exp(-r\tau)N(d_{S,2})$$

식 (7.43)의 우변이 [정리 2.1]에 기술한 유럽형콜옵션의 가치평가식인 Black-Scholes 식이다.

7.2. 다변량 Girsanov정리와 정적분

다변량 Girsanov정리를 사용해서 식 (7.24)의 정적분 I_5와 식 (7.25)의 정적분 I_6를 간편하게 계산함으로써 유럽형콜옵션의 Black-Scholes식을 유도하기로 하자.

다변량 Brown운동과 다변량 Girsanov정리를 살펴보자. 이에 대한 자세한 내용은 최병선(2013)의 제4.6절을 참조하라.

[정의 7.1] 확률공간 $(\Omega, \mathbb{F}, P)$에서 서로 독립인 Brown운동과정들 $\{W_t^{(1)}\}$, $\{W_t^{(2)}\}$, $\cdots$, $\{W_t^{(d)}\}$에 대해서 다음과 같은 확률벡터를 정의하자.

$$\boldsymbol{W}_t \doteq [W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, \cdots, W_t^{(d)}]^t, \quad (t \geq 0)$$

다변량확률과정 $\{\boldsymbol{W}_t \mid t \geq 0\}$를 표준적 d변량 Brown운동이라 한다. □

[정리 7.1] 다변량 Girsanov정리

고정된 T와 $t(< T)$에 대해 확률공간 $(\Omega, \mathbb{F}, P)$에서 연속시간형 확률과정 $\{\theta_u \mid t \leq u \leq T\}$가 증대정보계 $\{\mathbb{F}_u \mid t \leq u \leq T\}$에 대해 적합이라고 하자. 또한, $\{\boldsymbol{W}_u \mid t \leq u \leq T\}$는 확률측도 P하에서 표준적 d변량 Brown운동이라고 하고, 다음 확률변수들과 함수를 정의하자.

$$\xi_u \doteq \exp\left(-\int_t^u \theta_v^t d\boldsymbol{W}_v - \frac{1}{2}\int_t^u \| \theta_v \|^2 \, dv\right), \ (t \leq u \leq T)$$

$$\boldsymbol{W}_u^Q \doteq \boldsymbol{W}_u + \int_t^u \theta_v \, dv, \ (t \leq u \leq T)$$

$$Q(A) \doteq E^P(1_A \xi_T), \quad (A \in \mathbb{F}_T)$$

확률과정 $\{\theta_u\}$가 다음과 같은 Novikov조건을 만족한다고 가정하자.

$$E\left(\int_t^T \| \theta_u \|^2 \, \xi_u^2 du\right) < \infty$$

이러한 조건하에서, 다음 식이 성립한다.

$$E(\xi_T) = 1$$

즉, Q는 확률측도이다. 또한, $\{\boldsymbol{W}_u^Q \mid t \leq u \leq T\}$는 확률측도 Q와 증대정보계 $\{\mathbb{F}_t \mid t \leq u \leq T\}$에 대한 표준적 d변량 Brown운동이다. □

각 $u(\geq t)$에 대해서, 다음 확률변수들을 정의하자.

(7.44) $$U_{1,u} \doteq \frac{W_{S,u} + W_{V,u}}{\sqrt{2[1+\rho]}}, \ U_{2,u} \doteq \frac{W_{S,u} - W_{V,u}}{\sqrt{2[1-\rho]}}$$

확률벡터 $\boldsymbol{U}_u = [U_{1,u}\ \ U_{2,u}]^t$는 다음 식을 만족한다.

(7.45) $$\boldsymbol{U}_u \overset{d}{\sim} N(\mathbf{0}, uI)$$

여기서 I는 2차원 단위행렬이다. 식 (7.45)에서 알 수 있듯이, $\{\boldsymbol{U}_u \mid u \geq 0\}$는 표준적 2변량 Brown운동이다. 식 (7.44)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

(7.46) $$W_{S,u} = \begin{bmatrix} \sqrt{\dfrac{1+\rho}{2}} & \sqrt{\dfrac{1-\rho}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,u} \\ U_{2,u} \end{bmatrix}$$

(7.47) $$W_{V,u} = \begin{bmatrix} \sqrt{\dfrac{1+\rho}{2}} & -\sqrt{\dfrac{1-\rho}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,u} \\ U_{2,u} \end{bmatrix}$$

식 (7.10)과 식 (7.24)에서 알 수 있듯이, 정적분 I_5는 다음과 같다.

(7.48) $$\begin{aligned} I_5 = S_t E_t^P \Bigg(\exp\Bigg(& -\frac{1}{2}\int_t^T [\sigma_S^2 + 2\rho\sigma_S\gamma\sigma_V + \gamma^2\sigma_V^2] dt \\ & + \int_t^T [\sigma_S dW_{S,u} + \gamma\sigma_V dW_{V,u}] \Bigg) 1_{\{S_T \geq K\}} \Bigg) \end{aligned}$$

다음 확률벡터를 정의하자.

(7.49) $$\boldsymbol{\theta}_u^{(1)} \doteq \begin{bmatrix} \sqrt{\dfrac{1+\rho}{2}} & \sqrt{\dfrac{1+\rho}{2}} \\ \sqrt{\dfrac{1-\rho}{2}} & -\sqrt{\dfrac{1-\rho}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_S \\ \gamma\sigma_V \end{bmatrix}$$

다음 식들이 성립한다.

(7.50) $$[\boldsymbol{\theta}_u^{(1)}]^t\, d\boldsymbol{U}_u = \sigma_S dW_{S,u} + \gamma\sigma_V dW_{V,u}$$

(7.51) $$\| \boldsymbol{\theta}_u^{(1)} \| = \sqrt{\sigma_S^2 + 2\rho\sigma_S\gamma\sigma_V + \gamma^2\sigma_V^2}$$

다음과 같은 확률변수, 함수 그리고 확률벡터를 정의하자.

$$(7.52) \qquad \xi_t^{(1)} \doteq \exp\left(-\int_0^t [\boldsymbol{\theta}_u^{(1)}]^t d\boldsymbol{U}_u - \frac{1}{2}\int_0^t \| \boldsymbol{\theta}_u^{(1)} \|^2 du\right), \ (0 \le t \le T)$$

$$(7.53) \qquad Q^{(1)}(A) \doteq E^P(1_A \, \xi_T^{(1)}), \quad (\mathrm{A} \in \mathbb{F}_T)$$

$$(7.54) \qquad \boldsymbol{W}_t^{Q^{(1)}} \doteq \boldsymbol{U}_t + \int_0^t \boldsymbol{\theta}_u^{(1)} du, \ (0 \le t \le T)$$

식 (7.50)과 식 (7.51)을 식 (7.52)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$(7.55) \qquad \xi_t^{(1)} = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_t^T [\sigma_S^2 + 2\rho\sigma_S\gamma\sigma_V + \gamma^2\sigma_V^2]du + \int_t^T [\sigma_S dW_{S,u} + \gamma\sigma_V dW_{V,u}]\right)$$

식 (7.51)과 식 (7.55)에서 알 수 있듯이, 다음과 같이 Novikov조건이 만족된다.

$$(7.56) \qquad E\left(\int_0^T \| \boldsymbol{\theta}_u^{(1)} \|^2 \, [\xi_u^{(1)}]^2 du\right) < \infty$$

다변량 Girsanov정리에서 알 수 있듯이, $\{\boldsymbol{W}_t^{Q^{(1)}} \mid 0 \le t \le T\}$는 확률측도 $Q^{(1)}$과 증대정보계 $\{\mathbb{F}_t \mid 0 \le t \le T\}$에 대한 표준적 2변량 Brown운동이다. 식 (7.48)과 식 (7.55)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

$$(7.57) \qquad I_5 = S_t E_t^P(\xi_T^{(1)} 1_{\{S_T \ge K\}})$$

식 (7.53)과 식 (7.57)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$(7.58) \qquad I_5 = S_t E_t^{Q^{(1)}}(1_{\{S_T \ge K\}}) = S_t Q^{(1)}(S_T \ge K)$$

식 (7.46), 식 (7.49), 그리고 식 (7.54)를 식 (7.7)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$(7.59) \qquad \frac{dS_u}{S_u} = [\mu_S + \rho\gamma\sigma_S\sigma_V + \sigma_S^2]du + \sigma_S\left[\sqrt{\frac{1+\rho}{2}} \ \sqrt{\frac{1-\rho}{2}}\right] d\boldsymbol{W}_u^{Q^{(1)}}$$

식 (7.59)에 식 (7.20)을 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$\frac{dS_u}{S_u} = [r + \sigma_S^2]du + \sigma_S \left[\sqrt{\frac{1+\rho}{2}} \ \ \sqrt{\frac{1-\rho}{2}} \right] d\boldsymbol{W}_u^{Q^{(1)}} \tag{7.60}$$

[명제 2.2]에서 알 수 있듯이, 확률미분방정식 (7.60)으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$S_T = S_t \exp\left(r\tau + \frac{1}{2}\sigma_S^2 \tau + \sigma_S \left[\sqrt{\frac{1+\rho}{2}} \ \ \sqrt{\frac{1-\rho}{2}} \right] [\boldsymbol{W}_T^{Q^{(1)}} - \boldsymbol{W}_t^{Q^{(1)}}] \right) \tag{7.61}$$

확률측도 $Q^{(1)}$하에서 $\{\boldsymbol{W}_t^{Q^{(1)}}\}$가 표준적 2변량 Brown운동이므로, 다음 식이 성립한다.

$$\left[\sqrt{\frac{1+\rho}{2}} \ \ \sqrt{\frac{1-\rho}{2}} \right] [\boldsymbol{W}_T^{Q^{(1)}} - \boldsymbol{W}_t^{Q^{(1)}}] \overset{d}{\sim} N(0, \tau) \tag{7.62}$$

식 (7.61)과 식 (7.62)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} &Q^{(1)}(S_T > K) \\ &= Q^{(1)}\left(\frac{1}{\sigma_S\sqrt{\tau}} \left\{ \ln\frac{S_T}{S_t} - \left[r + \frac{1}{2}\sigma_S^2 \right]\tau \right\} > \frac{1}{\sigma_S\sqrt{\tau}} \left\{ \ln\frac{K}{S_t} - \left[r + \frac{1}{2}\sigma_S^2 \right]\tau \right\} \right) \\ &= N\left(\frac{1}{\sigma_S\sqrt{\tau}} \left\{ \ln\frac{S_t}{K} + \left[r + \frac{1}{2}\sigma_S^2 \right]\tau \right\} \right) = N(d_{S,1}) \end{aligned} \tag{7.63}$$

식 (7.58)과 식 (7.63)에서 알 수 있듯이, 식 (7.24)의 정적분 I_5는 다음과 같다.

$$I_5 = S_t N(d_{S,\,1}) \tag{7.64}$$

같은 방법으로, 식 (7.25)의 정적분 I_6가 다음과 같음을 증명할 수 있다.

$$I_6 = Ke^{-r\tau} N(d_{S,\,2}) \tag{7.65}$$

식 (7.64)와 (7.65)를 식 (7.23)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

(7.66) $$C_t = S_t N(d_{S,1}) - K\exp(-r\tau)N(d_{S,2})$$

식 (7.66)의 우변이 [정리 2.1]에 기술한 유럽형콜옵션의 가치평가식인 Black-Scholes 식이다.

7.3. CAPM

Black and Scholes(1973)는 자본자산가치평가모형(CAPM: capital asset pricing model)을 이용해서 Black-Scholes식을 유도하였다. 이 절에서는 이 방법을 살펴보자. 이에 관한 좀 더 자세한 내용은 Steele(2000)의 제10.4절을 참조하라.

CAPM이론에 의하면, 시간구간 $[t, t+\Delta t]$에서 원자산의 수익률은 다음 식을 만족한다.

(7.67) $$E\left(\frac{\Delta S_t}{S_t}\right) - r\Delta t = \beta_S\left[E\left(\frac{\Delta M_t}{M_t}\right) - r\Delta t\right]$$

여기서 M_t는 시점 t에서 시장포트폴리오의 가치이고, β_S는 다음과 같다.

(7.68) $$\beta_S \doteq \frac{1}{\mathrm{Var}\left(\frac{\Delta M_t}{M_t}\right)}\mathrm{Cov}\left(\frac{\Delta S_t}{S_t}, \frac{\Delta M_t}{M_t}\right)$$

식 (7.67)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

(7.69) $$E(\Delta S_t) = rS_t\Delta t + \beta_S\left[E\left(\frac{\Delta M_t}{M_t}\right) - r\Delta t\right]S_t$$

Ito-Doeblin보조정리에서 알 수 있듯이, 원자산을 S_u로 하는 금융파생상품의 시점 t에서 가치 $F \doteq F(S_t, t)$는 다음 식을 만족한다.

(7.70) $$\Delta F(S_t, t) = F_S(S_t, t)\Delta S_t + F_t(S_t, t)\Delta t + \frac{1}{2}F_{SS}(S_t, t)\sigma^2 S_t^2\Delta t$$

식 (7.69)와 식 (7.70)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

(7.71) $$E(\Delta F) = F_S \left\{ rS_t\Delta t + \beta_S \left[E\left(\frac{\Delta M_t}{M_t} \right) - r\Delta t \right] S_t \right\} + F_t\Delta t + \frac{1}{2} F_{SS}\sigma^2 S_t^2 \Delta t$$

식 (7.70)에서 알 수 있듯이, 이 금융파생상품의 수익률은 다음 식을 만족한다.

(7.72) $$\frac{\Delta F}{F} = \left[S_t \frac{F_S}{F} \right] \frac{\Delta S_t}{S_t} + \left[\frac{F_t}{F} + \frac{1}{2} \frac{F_{SS}}{F} \sigma^2 S_t^2 \right] \Delta t$$

원자산과정 $\{S_u\}$가 기하Brown운동을 하면, 식 (7.72)의 우변에서 첫 번째 항의 차원은 두 번째 항의 차원보다 낮다. 따라서 두 번째 항을 오차항으로 간주할 수 있다. 즉, 식 (7.72)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

(7.73) $$\frac{\Delta F}{F} = \left[S_t \frac{F_S}{F} \right] \frac{\Delta S_t}{S_t} + \varepsilon_t$$

여기서 ε_t는 평균이 0이고 분산이 $[\Delta t]^2$에 비례하는 정규확률변수라고 하자. 다음 상수를 정의하자.

(7.74) $$\beta_F \doteq S_t \frac{F_S(S_t, t)}{F(S_t, t)} \beta_S$$

식 (7.68), 식 (7.73), 그리고 식 (7.74)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

(7.75) $$\frac{\mathrm{Cov}\left(\frac{\Delta F_t}{F_t}, \frac{\Delta M_t}{M_t} \right)}{\mathrm{Var}\left(\frac{\Delta M_t}{M_t} \right)} = S_t \frac{F_S(S_t, t)}{F(S_t, t)} \beta_S = \beta_F$$

즉, β_F는 옵션가치의 베타계수이다. CAPM이론에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

(7.76) $$E\left(\frac{\Delta F}{F} \right) - r\Delta t = \beta_F \left[E\left(\frac{\Delta M_t}{M_t} \right) - r\Delta t \right]$$

식 (7.75)를 식 (7.76)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$E(\Delta F(S_t, t)) = rF(S_t, t)\Delta t + \beta_S S_t F_S(S_t, t)\left[E\left(\frac{\Delta M_t}{M_t}\right) - r\Delta t\right] \tag{7.77}$$

식 (7.71)과 식 (7.77)을 비교하면, 다음 식이 성립함을 알 수 있다.

$$-rF(S_t, t) + rS_t \frac{\partial F(S_t, t)}{\partial S_t} + \frac{\partial F(S_t, t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F(S_t, t)}{\partial S_t^2} = 0 \tag{7.78}$$

편미분방정식 (7.78)은 원자산이 기하Brown운동을 하는 Black-Scholes방정식 (4.10)이다.

7.4. Hamilton-Jacobi-Bellman방정식

Merton(1971)은 Hamilton-Jacobi-Bellman방정식(HJB equation)을 이용해서 금융시장에서 증권들 사이에 발생하는 일반균형관계를 유도하였다. 이 Merton이론을 바탕으로 Black-Scholes방정식을 유도하기로 하자. 이 방법에 대한 자세한 내용은 Ingersoll(1987)을 참조하라.

완비인 시장모형에서 N개의 중간배당이 없는 위험금융상품들이 거래되고, 시점 s에서 이들의 가치를 $S_s^{(1)}, S_s^{(2)}, \cdots, S_s^{(N)}$라 하자. 또한, 이 시장모형에서 무위험수익율이 r인 무위험채권이 거래된다고 하자. 이 위험금융상품가치들로 이루어진 확률벡터과정 $\{\boldsymbol{S}_s = [S_s^{(1)}\ S_s^{(2)} \cdots S_s^{(N)}]^t \mid s \geq 0\}$가 다음 확률미분방정식을 만족한다고 하자.

$$d\boldsymbol{S}_s = A_s[\boldsymbol{\mu} ds + \Sigma^{1/2} d\boldsymbol{W}_s] \tag{7.79}$$

여기서 $\boldsymbol{\mu} \doteq [\mu^{(1)}\ \mu^{(2)} \cdots \mu^{(N)}]^t$는 결정적 열벡터이고, $\Sigma = [\sigma_{i,j}]$는 $N \times N$ 차원 결정적 행렬이며, $\{\boldsymbol{W}_s\}$는 표준적 N변량 Brown운동이고, 대각행렬 A_s는 다음과 같다.

$$A_s \doteq \mathrm{diag}(S_s^{(1)}\ S_s^{(2)} \cdots S_s^{(N)}) \tag{7.80}$$

또한, 행렬 Σ의 랭크가 N이라고 가정하자. 시점 s에서 투자자의 소비액을 x_s, 부(wealth)를 w_s, 그리고 위험금융상품들에 투자한 포트폴리오를 $\boldsymbol{a}_s \doteq [a_s^{(1)}\ a_s^{(2)} \cdots a_s^{(N)}]^t$라 하자. 이 투자자의 부는 다음과 같은 자기금융조건을 만족한다고 가정하자.

(7.81) $$dw_s = \boldsymbol{a}_s^t d\boldsymbol{S}_s + [w_s - \boldsymbol{a}_s^t \boldsymbol{S}_s]rds - x_s ds$$

시점 s에서 이 투자자가 제n번째 위험금융상품에 투자하는 비율을 $\theta_s^{(n)}$이라 하면, 다음 식이 성립한다.

(7.82) $$\theta_s^{(n)} \doteq \frac{S_s^{(n)} a_s^{(n)}}{w_s}$$

다음 벡터를 정의하자.

(7.83) $$\boldsymbol{\theta}_s \doteq [\theta_s^{(1)} \ \ \theta_s^{(2)} \cdots \theta_s^{(N)}]^t$$

식 (7.79)를 식 (7.81)에 대입하면, 다음 제약조건을 얻는다.

(7.84) $$dw_s = \{w_s \boldsymbol{\theta}_s^t [\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}] + rw_s - x_s\}ds + w_s \boldsymbol{\theta}_s^t \Sigma^{1/2} d\boldsymbol{W}_s$$

여기서 **1**은 모든 원소들이 1인 열벡터이다.

투자자가 시간구간 $[t, T]$에서 효용함수 u의 기대값을 최대화한다고 하자. 즉, 제약조건 (7.84)하에서 다음 함수를 구하기로 하자.

(7.85) $$J(w_t, t) \doteq \max_{\{\boldsymbol{\theta}_u | t \le u \le T\}} E_t\left(\int_t^T u(x_s, s)ds\right)$$

여기서 효용함수 $u(x_s, s)$ (≥ 0)는 시점 s에 대해서 가산적(time-additive)이고 또한 상태로부터 독립(state-independent)이라고 가정하자.

다음 식들을 만족하는 시간구간 $[t, T]$의 분할 $\Pi \doteq \{t = t_0 < t_1 < \cdots < t_M = T\}$을 정의하자.

(7.86) $$\Delta t \doteq \frac{T-t}{M}, \ \ t_j \doteq t + j\Delta t, \ \ (j = 0, 1, \ldots, M)$$

제약조건 (7.84)를 다음과 같이 이산화할 수 있다.

(7.87) $$\Delta w_{t_j} = \{w_{t_j}\boldsymbol{\theta}_{t_j}^t[\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}] + rw_{t_j} - x_{t_j}\}\Delta t + w_{t_j}\boldsymbol{\theta}_{t_j}^t\Sigma^{1/2}\Delta \boldsymbol{W}_{t_j}$$

여기서 $\Delta \boldsymbol{W}_{t_j} \doteq \boldsymbol{W}_{t_{j+1}} - \boldsymbol{W}_{t_j}$이다. 식 (7.87)에서 알 수 있듯이, 다음 식들이 성립한다.

(7.88) $$E_{t_j}(\Delta w_{t_j}) = \{\mathrm{w}_{t_j}\boldsymbol{\theta}_{t_j}^t[\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}] + rw_{t_j} - x_{t_j}\}\Delta t + o(\Delta t)$$

(7.89) $$\mathrm{Var}_{t_j}(\Delta w_{t_j}) = w_{t_j}^2\boldsymbol{\theta}_{t_j}^t\Sigma\boldsymbol{\theta}_{t_j}\Delta t + o(\Delta t)$$

식 (7.85)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

(7.90) $$J(w_t, t_t) \doteq \max_{\{\boldsymbol{\theta}_u | t_j \le u \le t_{j+1}\}} E_{t_j}\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} u(x_s, s)\,ds + J(w_{t_{j+1}}, t_{j+1})\right)$$

Taylor정리에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

(7.91) $$\begin{aligned} E_{t_j}(J(w_{t_{j+1}}, t_{j+1})) &= J(w_t, t_t) + \frac{\partial J}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial J}{\partial w_t}E_{t_j}(\Delta w_t) \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial w_t^2}\mathrm{Var}_{t_j}(\Delta w_t) + O([\Delta t]^2) \end{aligned}$$

또한, 다음 식이 성립한다.

(7.92) $$\frac{1}{\Delta t}E_{t_j}\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} u(x_s, s)\,ds\right) = u(x_{t_j}, t_j) + o(\Delta t)$$

식 (7.88), 식 (7.89), 식 (7.91)과 식 (7.92)를 식 (7.90)에 대입하면, 다음과 같이 이산화된 식을 얻는다.

(7.93) $$\begin{aligned} 0 = \max\Bigg\{ & u(x_{t_j}, t_j) + \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial w_t}\{w_{t_j}\boldsymbol{\theta}_{t_j}^t[\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}] + rw_{t_j} - x_{t_j}\} \\ & + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial w_t^2}w_{t_j}^2\boldsymbol{\theta}_{t_j}^t\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\theta}_{t_j}t + O(\Delta t)\Bigg\} \end{aligned}$$

식 (7.93)의 양변에서 극한 $\Delta t \to 0$을 취하고, 또한 $s = t_j$라 하면, 다음과 같은 HJB방정

식이 성립한다.

$$-\frac{\partial J}{\partial s}=\max_{\boldsymbol{\theta}_s,\,x_s}\left[u(x_s,s)+\frac{\partial J}{\partial w_s}\{w_s\boldsymbol{\theta}_s^t[\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1}]+rw_s-x_s\}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial w_s^2}w_s^2\boldsymbol{\theta}_s^t\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\theta}_s\right] \tag{7.94}$$

식 (7.85)에서 알 수 있듯이, 이 HJB방정식의 초기조건은 다음과 같다.

$$J(w_T,T)=0 \tag{7.95}$$

이산시간형 HJB방정식에 대해서는 최병선(2004b)의 제8장을 참조하라.

식 (7.94)와 식 (7.95)로 구성된 최적화문제를 변분법(calculus of variations)을 사용해서 풀기로 하자. 식 (7.94)의 우변의 최대값이 존재한다고 가정하면, 최대화의 필요조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}s}\left[u(x_s,s)+\frac{\partial J}{\partial w_s}\{w_s,\boldsymbol{\theta}_s^t[\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1}]+rw_s-x_s\}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial w_s^2}w_s^2\boldsymbol{\theta}_s^t\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\theta}_s\right]=\mathbf{0} \tag{7.96}$$

식 (7.96)에서 알 수 있듯이, 식 (7.94)의 우변을 최대화하는 $\boldsymbol{\theta}_s$, 즉 최적포트폴리오 $\boldsymbol{\theta}_s^*$는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\theta}_s^*=-\frac{\dfrac{\partial J}{\partial w_s}}{w_s\dfrac{\partial^2 J}{\partial w_s^2}}\Sigma^{-1}[\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1}] \tag{7.97}$$

식 (7.97)을 식 (7.94)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

$$-\frac{\partial J}{\partial s}=u(x_s,s)+\left\{-\frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial J}{\partial w_s}}{\dfrac{\partial^2 J}{\partial w_s^2}}[\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1}]^t\Sigma^{-1}[\boldsymbol{\mu}-r\mathbf{1}]+rw_s-x_s\right\}\frac{\partial J}{\partial w_s} \tag{7.98}$$

식 (7.95)를 초기조건으로 해서 편미분방정식 (7.98)을 풀면, J를 구할 수 있다. 그러나 이 경계값문제의 해를 직접 구하는 것은 그리 쉬운 일이 아니다.

지금부터 CAPM이론을 적용해서 식 (7.97)로부터 유럽형옵션의 Black-Scholes방정식을 유도하기로 하자. 시장포트폴리오(market portfolio) $\boldsymbol{\theta}_t^{(M)}$는 최적포트폴리오 $\boldsymbol{\theta}_s^*$이다. 이 성질에 대해서는 최병선(2004b)의 제3.7절을 참조하라. 따라서 식 (7.97)에서 알 수 있듯이, 시점 t에서 시장포트폴리오 $\boldsymbol{\theta}_t^{(M)}$을 다음과 같이 쓸 수 있다.

(7.99) $$\boldsymbol{\theta}_t^{(M)} = \alpha_t \Sigma^{-1} [\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}]$$

여기서 $\{\alpha_t\}$는 1차원 수열이다. 시장포트폴리오 $\boldsymbol{\theta}_t^{(M)}$의 기대수익률 $\mu_t^{(M)}$은 다음 식들을 만족한다.

(7.100) $$\mu_t^{(M)} - r = [\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}]^t \boldsymbol{\theta}_t^{(M)} = \alpha_t [\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}]^t \Sigma^{-1} [\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}]$$

여기서 두 번째 등호는 식 (7.99)에 의해서 성립한다. 시장포트폴리오 $\boldsymbol{\theta}_t^{(M)}$의 수익률분산 σ_M^2는 다음과 같다.

(7.101) $$\sigma_M^2 = \alpha_t^2 [\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}]^t \Sigma^{-1} [\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}]$$

또한, 시장포트폴리오 $\boldsymbol{\theta}_t^{(M)}$의 수익률과 위험금융상품벡터 $\boldsymbol{S}_t$의 수익률벡터의 공분산벡터 $\boldsymbol{\sigma}^{(M)}$은 다음과 같다.

(7.102) $$\boldsymbol{\sigma}^{(M)} \doteq [\sigma_{1,M} \ \ \sigma_{2,M} \cdots \sigma_{N,M}]^t = \alpha_t [\boldsymbol{\mu} - r\mathbf{1}]$$

식 (7.67)에서 알 수 있듯이, 시장에 존재하는 어떤 위험금융상품의 시점 t에서 가치가 S_t이고 이 위험금융상품의 기대수익률을 $\mu_{S;t}$라 하면, 다음 식이 성립한다.

(7.103) $$\mu_{S;t} - r = \frac{\sigma_{S,M}}{\sigma_M^2}[\mu_{M;t} - r]$$

여기서 $\sigma_{S,M}$은 이 위험금융상품의 수익률과 시장포트폴리오의 수익률의 공분산이다.

이 시장모형에 원자산을 S_u로 하는 유럽형옵션을 도입하고, 이 유럽형옵션의 시점 t에서 무재정가치를 $F = F(S_t, t)$라 하자. 시장모형의 완비성에 의해서 다음 식이 성립

한다.

(7.104)
$$\mu_{F;t} - r = \frac{\sigma_{F,M}}{\sigma_M^2}[\mu_{M;t} - r]$$

여기서 $\mu_{F;\,t}$는 이 유럽형옵션의 기대수익률이고, $\sigma_{F,\,M}$은 시장포트폴리오 $\boldsymbol{\theta}_t^{(M)}$의 수익률과 이 유럽형옵션의 수익률의 공분산이다. 식 (7.79)에서 알 수 있듯이, 원자산과정 $\{S_u\}$는 기하Brown운동을 한다. 따라서 [명제 5.1]의 2변량 Ito-Doeblin보조정리를 사용해서, 다음 식을 유도할 수 있다.

(7.105)
$$\sigma_{F,M} = \frac{S_t}{F}\frac{\partial F}{\partial S_t}\sigma_{S,M}$$

식 (4.20)과 식 (7.104)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

(7.106)
$$\frac{1}{F}\left[\frac{\partial F}{\partial t} + \mu_{S;t}S_t\frac{\partial F}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S_t^2\frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2}\right] = r + \frac{\sigma_{F,M}}{\sigma_M^2}[\mu_{M;t} - r]$$

식 (7.103)과 식 (7.105)를 식 (7.106)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

(7.107)
$$-rF + \frac{\partial F}{\partial t} + rS_t\frac{\partial F}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S_t^2\frac{\partial^2 F}{\partial S_t^2} = 0$$

편미분방정식 (7.107)이 원자산이 기하Brown운동을 하는 Black-Scholes방정식 (4.10)이다.

8. 복소함수

8.1. 특성함수

Heston(1993)은 확률변동성모형의 해석해를 구하는 데 특성함수를 사용하였다. 이 절에서는 이 방법을 사용해서 Black-Scholes방정식을 유도하기로 하자.

원자산과정 $\{S_u\}$가 확률미분방정식 (2.1)을 만족하는 기하Brown운동을 하면, 이 원자산과정은 식 (5.7)을 만족한다. 식 (5.7)에 Ito-Doeblin정리를 적용하면, 확률과정 $\{x_u \doteq \ln S_u\}$가 다음 확률미분방정식을 만족함을 알 수 있다.

$$dx_u = \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] du + \sigma dW_u^Q, \ (u \geq 0) \tag{8.1}$$

즉, 위험중립확률측도 Q하에서 확률변수 x_T의 확률분포는 다음과 같다.

$$x_T \overset{d}{\sim} N\left(x_t + \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \tau, \sigma^2 \tau \right) \tag{8.2}$$

식 (5.16), 식 (5.19), 그리고 식 (5.36)에서 알 수 있듯이, 원자산이 S_u이고 만기시점 T에서 행사가격이 K인 유럽형콜옵션의 현재시점 t에서 공정한 가치 C_t는 다음과 같다.

$$C_t = S_t Q^U(x_T > k) - e^{-r\tau} K Q(x_T > k) \tag{8.3}$$

여기서 $k \doteq \ln K$이고, 식 (5.34)에서 알 수 있듯이 Q^U는 원자산을 기준재로 하는 동치마팅게일측도이다.

식 (8.2)에서 알 수 있듯이, 위험중립확률측도 Q하에서 확률변수 x_T의 특성함수 $\phi^Q(\theta)$는 다음과 같다.

$$\phi^Q(\theta) \doteq E_t^Q(\exp(i\theta x_T)) = \exp(i\theta[x_t + r\tau]) \exp\left(i\theta \left[-\frac{\sigma^2 \tau}{2} \right] - \frac{1}{2}\theta^2 [\sigma^2 \tau] \right) \tag{8.4}$$

식 (5.33)에서 알 수 있듯이, 동치마팅게일측도 Q^U의 위험중립확률측도 Q에 대한 Radon-Nikodym밀도는 다음과 같다.

$$\frac{dQ^U}{dQ} = \exp(x_T - x_t - r\tau) \tag{8.5}$$

따라서 동치마팅게일측도 Q^U 하에서 확률변수 x_T의 특성함수 $\phi^U(\theta)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi^U(\theta) &\doteq E_t^{Q^U}(\exp(i\theta x_T)) = E_t^Q(\exp(x_T - x_t - r\tau)\exp(i\theta x_T)) \\ &= \exp(i\theta[x_t + r\tau]) \exp\left(i\theta \left[\frac{\sigma^2 \tau}{2} \right] - \frac{1}{2}\theta^2 \sigma^2 \tau \right) \end{aligned} \tag{8.6}$$

여기서 두 번째 등호는 식 (8.5)에 의해서, 그리고 세 번째 등호는 식 (8.4)에 의해서

성립한다.

확률측도들 Q와 Q^U에 해당하는 확률밀도함수들을 각각 q와 q^U라고 하면, 다음 식들이 성립한다.

(8.7) $$q(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\theta x}\phi^{Q}(\theta)d\theta,\quad q^{U}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\theta x}\phi^{U}(\theta)d\theta$$

Lévy(1925), Gurland(1948), 그리고 Gil-Pelaez(1951) 등이 식 (8.7)로부터 다음 식들을 유도했다.

(8.8) $$Q^{U}(x_T>k)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}Re\left(\frac{\exp(-i\theta k)\phi^{U}(\theta)}{i\theta}\right)d\theta$$

(8.9) $$Q(x_T>k)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}Re\left(\frac{\exp(-i\theta k)\phi^{Q}(\theta)}{i\theta}\right)d\theta$$

식 (8.6)과 식 (8.8)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

(8.10) $$\begin{aligned}&Q^{U}(x_T>k)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}Re\left(\frac{1}{i\theta}\exp\left(i\theta\left\{-k+[x_t+r\tau]+\frac{\sigma^2\tau}{2}\right\}-\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2\tau\right)\right)d\theta\end{aligned}$$

복소적분을 사용해서 식 (8.10)의 우변을 계산하면, 다음 식을 얻는다.

(8.11) $$Q^{U}(x_T>k)=N(d_1)$$

식 (8.7)과 식 (8.9)에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

(8.12) $$\begin{aligned}&Q(x_T>k)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}Re\left(\frac{1}{i\theta}\exp\left(i\theta\left\{-k+[x_t+r\tau]-\frac{\sigma^2\tau}{2}\right\}-\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2\tau\right)\right)d\theta\end{aligned}$$

복소적분을 사용해서 식 (8.12)의 우변을 계산하면, 다음 식을 얻는다.

(8.13) $$Q(x_T > k) = N(d_2)$$

식 (8.11)과 식 (8.13)을 식 (8.3)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

(8.14) $$C_t = S_t N(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2)$$

식 (8.14)가 [정리 2.1]에 기술한 유럽형콜옵션의 Black-Scholes식이다.

8.2. Plancharel-Parseval등식

Fourier변환은 직교변환(orthonormal transform)이므로, 상대적 길이(relative length)와 각(angle)이 보존된다. 이러한 성질을 나타내는 것이 Plancharel-Parseval등식이다. 만약 f를 확률밀도함수라 하고 함수 g를 옵션의 지불금액함수라고 하면, 만기시점에서 옵션가치를 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$로 나타낼 수 있다. 이 절에서는 이 성질과 Plancharel-Parseval등식을 이용해서 유럽형콜옵션의 Black-Scholes식을 구해보자. 이 방법에 대한 자세한 내용은 Carr and Madan(1999)을 참조하라.

[명제 8.1] Plancharel-Parseval등식

함수들 $f(x)$와 $g(x)$의 Fourier변환을 각각 $\hat{f}(\theta)$와 $\hat{g}(\theta)$라 하자. 다음 등식이 성립한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} \hat{f}(\theta)\hat{g}(-\theta)d\theta$$

여기서 α는 상수이다. □

원자산과정 $\{S_u\}$가 확률미분방정식 (2.1)을 만족하는 기하Brown운동을 하면, 위험중립확률측도 Q하에서 확률변수 $x_T = \ln S_T$의 확률분포는 식 (8.2)를 만족한다. 이 위험중립확률측도 Q에 대응하는 확률밀도함수를 $f_T(x)$로 표기하면, 유럽형콜옵션의 현재시점 t에서 무재정가치 C_t는 다음과 같다.

(8.15) $$C_t = e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{\infty} [e^x - e^k]^+ f_T(x)dx$$

여기서 $k = \ln K$이다.

확률밀도함수 $f_T(x)$의 Fourier변환 $\hat{f}_T(\theta)$는 다음과 같다.

$$\hat{f}_T(\theta) = \exp\left(-i\left\{\ln S_t + \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right]\tau\right\}\theta - \frac{1}{2}\sigma^2\tau\theta^2\right) \tag{8.16}$$

함수 $g(x) = [e^x - e^k]^+$의 Fourier변환은 다음과 같다.

$$\hat{g}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta x}[e^x - e^k]^+ dx = -\frac{1}{\theta[\theta + i]} e^{k[1-i\theta]} \tag{8.17}$$

식 (8.16), 식 (8.17), 그리고 [명제 8.1]을 식 (8.15)에 적용하면, 다음 식을 얻는다.

$$C_t = -e^{-r\tau}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} \hat{f}_T(\theta)\frac{1}{\theta[\theta - i]} e^{k[1+i\theta]} d\theta \tag{8.18}$$

여기서 적분의 궤적을 결정하는 자유모수 α는 이 복소적분에서 아주 중요한 역할을 한다.

식 (8.18)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C_t = I_1 - I_2 \tag{8.19}$$

여기서 I_1과 I_2는 각각 다음과 같다.

$$I_1 \doteq -e^{-r\tau}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} \frac{1}{\theta - i}\hat{f}_T(\theta) e^{k[1+i\theta]} d\theta \tag{8.20}$$

$$I_2 \doteq -e^{-r\tau}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} \frac{1}{\theta}\hat{f}_T(\theta) e^{k[1+i\theta]} d\theta \tag{8.21}$$

복소적분을 적용하면 I_1과 I_2가 각각 다음과 같음을 알 수 있다.

$$I_1 = S_t N(d_1), \quad I_2 = e^{-r\tau} K N(d_2) \tag{8.22}$$

식 (8.22)를 식 (8.19)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

(8.23) $$C_t = S_t N(d_1) - e^{-r\tau} KN(d_2)$$

식 (8.23)이 [정리 2.1]에 기술한 유럽형콜옵션의 Black-Scholes식이다.

9. 정보이론

9.1. 최대엔트로피

연속시간형 확률밀도함수 $\{g(x)\}$에 대한 엔트로피(entropy) E_g를 다음과 같이 정의한다.

(9.1) $$E_g \doteq -\int g(x)\ln g(x)dx$$

주어진 조건을 만족하며 엔트로피를 최대화하는 확률분포는 주어지지 않은(unknown) 또는 없어진(missing) 정보에 대해서 가정을 가장 적게 하는 확률분포이다. 이러한 확률분포를 최대엔트로피확률분포(maximum entropy probability distribution)라 하고, 이 확률분포를 사용해야 편의(bias)가 없다는 것이 최대엔트로피원칙(maximum entropy principle)이다. 최대엔트로피원칙에 대해서는 Cover and Thomas(2006)를 참조하라. 또한, 엔트로피를 바탕으로 한 금융상품의 가치평가에 대해서는 Buchen and Kelly(1996), Stutzer(1996), 그리고 Gulko(1997)를 참조하라.

다음과 같은 확률변수를 정의하자.

(9.2) $$z \doteq \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left\{\ln\frac{S_T}{S_t} - \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2\right]\tau\right\}$$

확률변수 z는 다음 식들을 만족한다고 가정하자.

(9.3) $$\int zf(z)dz = 0,\ \int z^2 f(z)dz = 1$$

이러한 조건하에서 엔트로피를 최대화하는 확률밀도함수 $f(z)$를 구해보자. 즉, 조건

(9.3)하에서 다음과 같은 최적화문제를 풀어보자.

(9.4)
$$f = \arg\max_{g}\left[-\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\ln g(z)dz\right]$$

다음과 같은 Lagrange함수를 정의하자.

(9.5)
$$\begin{aligned} L \doteq & -\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\ln g(z)dz \\ & +[1+\lambda_0]\int_{-\infty}^{\infty} g(z)dz + \lambda_1\int_{-\infty}^{\infty} zg(z)dz + \lambda_2\int_{-\infty}^{\infty} z^2 g(z)dz \end{aligned}$$

여기서 λ_0, λ_1와 λ_2는 Lagrange모수들이다. 확률밀도함수가 $g(z)$에서 $g(z) + \delta g(z)$으로 움직이는 변동에 의한 Lagrange함수 L의 1차 변분(variation) δL은 다음과 같다.

(9.6)
$$\delta L = \int_{-\infty}^{\infty} \{-\ln g(z) - 1 + [1+\lambda_0] + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2\}dz$$

만약 다음 식이 성립하면, δL이 0이다.

(9.7)
$$\ln g(z) = \lambda_0 + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2$$

즉, 변분법(calculus of variations)에 의해서 Lagrange함수의 1차조건이 다음과 같음을 알 수 있다.

(9.8)
$$f(z) = \frac{\exp(\lambda_1 z + \lambda_2 z^2)}{\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\lambda_1 x + \lambda_2 x^2)dx}$$

식 (9.8)에서 알 수 있듯이, 최대엔트로피확률밀도함수 $f(z)$는 표준정규확률밀도함수이다. 즉, 최대엔트로피확률밀도함수는 다음과 같다.

(9.9)
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) = n(z)$$

식 (5.20), 식 (9.2), 그리고 식 (9.9)에서 알 수 있듯이, 최대엔트로피확률측도는 위험중립확률측도 Q이다. 즉, 엔트로피를 최대화하는 유럽형콜옵션가치는 $E^Q(e^{-r\tau}[S_T -$

$K]^{+}$)이다. 따라서 제5.1절에서 알 수 있듯이, 엔트로피를 최대화하는 유럽형콜옵션가치는 Black-Scholes가치 C_t이다.

9.2. Kullback-Leibler정보수

확률변수 x의 확률밀도함수 $g(x)$와 추가 정보가 주어졌을 때, 이 추가 정보를 만족하면서 확률밀도함수 $g(x)$에 가까운 확률밀도함수 $f(x)$를 구하는 척도로서 다음과 같이 정의되는 Kullback-Leibler정보량(information number)을 사용하기도 한다.

$$D(f \| g) \doteq \int f(x) \ln \frac{f(x)}{g(x)} dx \tag{9.10}$$

이 $D(f \| g)$를 교차엔트로피(cross-entropy) 또는 상대엔트로피(relative entropy)라고도 부른다. Kullback-Leibler정보량에 대해서는 Cover and Thomas(2006)의 제2장과 Cont(2010, pp. 567-571, 1195-1200)를 참조하라. 이 소절에서는 Kullback-Leibler정보량을 최소화하는 유럽형콜옵션가치가 Black-Scholes식을 만족함을 보이자.

확률측도 P하에서 확률미분방정식 (2.1)을 만족하는 기하Brown운동 $\{S_u \mid u \geq 0\}$를 살펴보자. 식 (2.1)에 Ito-Doeblin보조정리를 적용하면, 확률변수 $y_T \doteq \ln(S_T/S_t)$가 확률측도 P하에서 평균이 $[\mu - \sigma^2/2]\tau$이고 분산이 $\sigma^2\tau$인 정규분포를 따른다는 것을 알 수 있다. 즉, 다음 식이 성립한다.

$$dP = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\tau} \left\{ y_T - \left[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right]\tau \right\}^2 \right) dy_T \tag{9.11}$$

다음 제약조건을 만족하는 확률측도 A를 생각해보자.

$$E^A\left(\frac{dS_u}{S_u} \right) = r du \tag{9.12}$$

우리의 문제는 조건 (9.12)하에서 Kullback-Leibler정보량을 최소화하는 확률측도 B를 구하는 것이다. 즉, 분할 $\Pi = \{t = t_0 < t_1 < \cdots < t_M = T\}$의 각 소구간 $[t_k, t_{k+1})$ 에서 조건 (9.12)하에 다음 역문제(inverse problem)를 푸는 것이다.

$$\frac{dB_{t_k}}{dP_{t_k}} = \arg\min_{\frac{dA_{t_k}}{dP_{t_k}}} \left[-\int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{dA_{t_k}(z)}{dP_{t_k}(z)} dA_{t_k}(z) \right] \tag{9.13}$$

여기서 P_{t_k}, B_{t_k}, 그리고 A_{t_k}는 이 소구간에서 정의되는 확률측도들이다. Csiszár(1975)에서 알 수 있듯이, 이 역문제의 해는 다음과 같은 Gibbs정준밀도(Gibbs canonical density) 또는 Esscher변환밀도(Esscher transformed density)이다.

$$\frac{dB_{t_k}}{dP_{t_k}} = \frac{1}{E\left(\exp\left(\hat{\zeta}\,\frac{dS_{t_k}}{S_{t_k}}\right)\right)} \exp\left(\hat{\zeta}\,\frac{dS_{t_k}}{S_{t_k}}\right) \tag{9.14}$$

여기서 $\hat{\zeta}$는 다음과 같다.

$$\hat{\zeta} \doteq \arg\max_{\zeta} \left[\zeta\, r du - \ln E\left(\exp\left(\zeta\,\frac{dS_{t_k}}{S_{t_k}}\right)\right)\right] \tag{9.15}$$

식 (2.1)을 식 (9.15)에 대입하면, 다음 식들이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{\zeta} &= \arg\max_{\zeta} [\zeta\, r du - \ln E(\exp(\zeta \mu du + \zeta \sigma dW_{t_k}))] \\ &= \arg\max_{\zeta} [\zeta\, r du - \zeta \mu du - \ln E(\exp(\zeta \sigma dW_{t_k}))] \\ &= \arg\max_{\zeta} \left\{ \zeta [r-\mu] - \frac{1}{2}\zeta^2 \sigma^2 \right\} du \end{aligned} \tag{9.16}$$

식 (9.16)에서 알 수 있듯이, $\hat{\zeta}$는 다음과 같다.

$$\hat{\zeta} = \frac{r-\mu}{\sigma^2} = -\frac{\lambda}{\sigma} \tag{9.17}$$

여기서 두 번째 등호는 식 (5.2)에 의해서 성립한다. 식 (9.17)을 식 (9.14)에 대입하면, 다음 식을 얻는다.

(9.18)
$$\frac{dB_{t_k}}{dP_{t_k}} = \frac{1}{E(\exp(-\lambda dW_{t_k}))}\exp(-\lambda dW_{t_k})$$

[명제 2.3]을 식 (9.18)에 적용하면, 다음 식을 얻는다.

(9.19)
$$\frac{dB_{t_k}}{dP_{t_k}} = \exp\left(-\lambda dW_{t_k} - \frac{1}{2}\lambda^2[t_{k+1} - t_k]\right)$$

따라서 제약조건 (9.12)를 만족하면서 Kullback-Leibler정보량을 최소화하는 확률측도 B는 다음 식들을 만족한다.

(9.20)
$$\begin{aligned}\frac{dB}{dP} &= \prod_{k=0}^{M-1}\frac{dB_{t_k}}{dP_{t_k}} = \prod_{k=0}^{M-1}\exp\left(-\lambda dW_{t_k} - \frac{1}{2}\lambda^2[t_{k+1} - t_k]\right)\\ &= \exp\left(-\lambda\sum_{k=0}^{M-1}dW_{t_k} - \frac{1}{2}\lambda^2\sum_{k=0}^{M-1}[t_{k+1} - t_k]\right) = \exp\left(-\lambda W_\tau - \frac{1}{2}\lambda^2\tau\right)\end{aligned}$$

여기서 $\tau = T - t$이고, 두 번째 등호는 식 (9.19)에 의해서 성립한다. 식 (9.20)에서 알 수 있듯이, 임의의 가측집합 G에 대해서 다음 식들이 성립한다.

(9.21)
$$B(G) = \int_G \frac{dB}{dP}dP = \int_G \exp\left(-\lambda W_\tau - \frac{1}{2}\lambda^2\tau\right)dP$$

식 (5.3), 식 (5.4), 식 (9.21), 그리고 시장모형의 완비성에서 알 수 있듯이, 다음 식이 성립한다.

(9.22)
$$B(A) = Q(A)$$

식 (9.22)에서 알 수 있듯이, Kullback-Leibler정보량을 최소화하는 확률측도는 위험중립확률측도 Q이다. 즉, 최소상대엔트로피 유럽형콜옵션가치는 $E^Q(e^{-r\tau}[S_T - K]^+)$이다. 따라서 제5.1절에서 알 수 있듯이, 이 최소상대엔트로피 유럽형콜옵션가치는 Black-Scholes가치 C_t이다.

10. SLSG전략

Carr & Jarrow(1990)는 국소시간(local time)을 이용해서 Black-Scholes식을 유도하였다. 이 소절에서는 이 방법에 대해서 살펴보자.

만약 시점 $s(\geq t)$에서 원자산인 주가 S_s가 유럽형콜옵션의 행사가격 K의 할인가치 $KB(s, T) = Ke^{-r[T-s]}$보다 높다면, 시점 s에서 무위험채권을 $KB(s, T)$어치 공매하고 주식 1단위를 매입하는 포지션을 취한다. 만약 시점 $u(> s)$에서 주가 S_u가 행사가격 K의 할인가치 $KB(u, T) = Ke^{-r[T-u]}$ 아래로 떨어지면, 시점 u에서 이 주식 1단위를 파는 동시에 공매했던 무위험채권을 청산(clearing)한다. 이러한 전략을 SLSG전략(SLSG strategy: the stop-loss start-gain strategy)이라 한다. 각 시점 $u(\in[t, T])$에 대해서, 다음 함수들을 정의하자.

(10.1) $$\alpha_u \doteq 1_{\{S_u > KB(u, T)\}}$$

(10.2) $$\beta_u \doteq -1_{\{S_u > KB(u, T)\}}K$$

시점 u에서 SLSG전략에 의한 포트폴리오 (α_u, β_u)의 가치 V_u는 다음과 같다.

(10.3) $$V_u = [S_u - KB(u, T)]^+$$

식 (10.3)에서 알 수 있듯이, 만기시점 T에서 다음 식이 성립한다.

(10.4) $$V_T = [S_T - K]^+$$

즉, SLSG전략은 만기시점 T에서 유럽형콜옵션을 복제한다. 반면에, 만약 현재시점 t에서 주가 S_t가 행사가격 K의 할인가치 $KB(t, T)$보다 낮으면, 이 SLSG전략에서는 아무런 매매가 일어나지 않으므로 비용이 들지 않는다. 따라서 만약 SLSG전략이 자기금융적이라면, Black-Scholes경제에서 재정기회가 존재한다.

원자산과정 $\{S_u\}$가 확률미분방정식 (2.1)을 만족하는 기하Brown운동을 한다고 하자. 식 (5.8)에서 알 수 있듯이, 만기시점이 T인 무위험채권을 기준재로 하는 원자산

의 시점 u에서 가치, 즉 선도가치(forward value) $F_{u,T} = S_u e^{r[T-u]}$는 다음 식을 만족한다.

$$F_{u,T} = F_{t,T} \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2[u-t] + \sigma[W_u^Q - W_t^Q]\right),\ (t \le u \le T) \tag{10.5}$$

여기서 $\{W_t^Q\}$는 위험중립확률측도 Q하에서 Brown운동이다. 따라서 시점 t의 상태 $F_{t,T}$에서 시점 u의 상태 $F_{u,T}$로 가는 추이확률밀도함수(transition probability density) $p(t, u; F_{t,T}, F_{u,T})$는 다음과 같다.

$$p(t,u;F_{t,T},F_{u,T}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{u-t}F_{u,T}} n\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{u-t}}\left\{\ln\frac{F_{t,T}}{F_{u,T}} - \frac{1}{2}\sigma^2[u-t]\right\}\right) \tag{10.6}$$

여기서 $n(x)$는 표준정규확률밀도함수이다.

각 $u(\in [t, T])$에 대해서 다음 식들을 만족하는 L_u^K가 존재한다.

$$\begin{aligned} L_u^K &= [F_{u,T} - K]^+ - [F_{t,T} - K]^+ = \int_t^u 1_{\{F_{z,T} > K\}} dF_{z,T} \\ &= [F_{u,T} - K]^+ - [F_{t,T} - K]^+ = \int_t^u 1_{\{F_{z,T} > K\}} p(t,z;F_{t,T},F_{z,T})dz \end{aligned} \tag{10.7}$$

$$L_u^K \ge 0 \tag{10.8}$$

여기서 L_u^K를 행사가격 K에서 시점 u까지 국소시간(local time at K by time u)이라고 한다. Carr and Jarrow(1990)이 증명했듯이, SLSG전략이 자기금융조건을 만족하기 위한 필요충분조건은 각 $u \in [t, T]$에 대해서 국소시간 L_u^K가 0인 것이다. 그러나 식 $P(L_\eta^K > 0) > 0$를 만족하는 시점 η $(\in [t, T])$가 존재한다. 따라서, SLSG전략이 자기금융조건을 만족하지 못한다. 식 (10.7)과 식 (10.8)의 증명에 대해서는 최병선(2013)의 제3.11절과 제4.10절을 참조하라.

시점 u에서 원자산이 S_u이고 만기시점 T에서 행사가격이 K인 유럽형콜옵션의 현재 시점 t에서 공정한 가치 $C_t(\sigma)$는 다음 식들을 만족함을 알 수 있다.

$$C_t(\sigma) = [S_t - e^{-r\tau}K]^+ + e^{-r\tau}E_t^Q(L_T^K) \tag{10.9}$$

(10.10) $$\frac{d}{d\sigma}C_t(\sigma) = e^{-r\tau}K\sqrt{\tau}n(d_2)$$

(10.11) $$\lim_{\sigma \to +0} C_t(\sigma) = [S_t - e^{-r\tau}K]^+$$

식 (10.9)-식 (10.11)의 증명에 대해서는 최병선(2013)의 제4.10절을 참조하라.

시점 u에서 원자산이 S_u이고 만기시점 T에서 행사가격이 K인 유럽형콜옵션의 Black-Scholes가치 C_t는 다음 식들을 만족함을 알 수 있다.

(10.12) $$\frac{\partial C_t}{\partial \sigma} = e^{-r\tau}K\sqrt{\tau}n(d_2)$$

(10.13) $$\lim_{\sigma \to +0} C_t = [S_t - e^{-r\tau}K]^+$$

식 (10.12)과 식 (10.13)의 증명에 대해서는 최병선(2009)의 제2.3절을 참조하라.

편미분방정식 (10.10)과 편미분방정식 (10.12)는 동일하고, 경계조건 (10.11)은 경계조건 (10.13)과 동일하다. 따라서 다음 식이 성립한다.

(10.14) $$C_t(\sigma) = C_t$$

즉, $C_t(\sigma)$는 [정리 2.1]에 기술된 유럽형콜옵션의 Black-Scholes가치이다.

11. 결론

이 서베이 논문에서는 Black-Scholes식을 유도하는 다양한 방법들을 소개하였다. 즉, 중심극한정리를 바탕으로 하는 이항나무모형법, 복제와 헤징을 사용해서 Black-Scholes방정식을 유도한 다음 이로부터 Black-Scholes식을 유도하는 4가지 방법들, 마팅게일을 사용해서 Black-Scholes식을 유도하는 3가지 방법들, Feynman-Kac정리, Kolmogorov의 후향방정식, 그리고 Fokker-Planck방정식과 같은 편미분방정식과 기대값 사이의 관계를 이용하는 3가지 방법들, 효용함수나 CAPM을 사용한 균형이론적 접근을 하는 4가지 방법들, 특성함수나 Plancharel-Parseval등식 등 복소이론을 바

탕으로 하는 2가지 방법들, 최대엔트로피원칙이나 Kullback-Leibler정보량 등 정보이론을 바탕으로 하는 2가지 방법들, 자기금융조건을 부과하지 않는 SLSG전략에 의한 방법 등을 소개하였다. 그 외에도 Cutland, Kopp, and Willinger(1991)는 비표준적해석을 적용해서 Black-Scholes식을 유도하였으나, 이 논문에서는 다루지 않았다.

Black-Schoes식을 사용하는 것에 대해 Black(1988, 1990) 스스로가 다음과 같은 의견을 개진했다.

> "I sometimes wonder why people still use the Black-Scholes formula, since it is based on such simple assumptions-unrealistically simple assumptions."

실제로 옵션가치를 평가하는 데 Black-Schole식 자체를 사용하는 것에 문제가 있다는 것이 널리 알려져 있다. 그럼에도 불구하고, 이 논문에서 Black-Scholes식을 유도하는 다양한 방법들을 소개한 본 저자의 의도는 이 방법들이 단지 Black-Scholes식을 유도하는 데 사용되기 때문만은 아니다. 그보다는 여기서 사용한 방법들이 현재 금융공학에서 사용되는 수리적 기법들의 큰 부분을 차지하기 때문이다.

마지막으로 오늘날 Black-Scholes-Merton식이나 이 식의 발견자들인 M. Scholes와 R. Merton의 위상이 옛날과 같지 않다는 것을 언급하고자 한다. 앞에서 언급했듯이, 1997년 노벨경제학상은 Black-Scholes-Merton식을 발견한 공로로 M. Scholes와 R. Merton에게 수여되었다. 그러나, 1998년 그들이 경영에 참여했던 LTCM(Long Term Capital Management)이 파산함으로써, 그들은 세계 경제가 공황상태에 근접하는 단초를 제공했다는 불명예를 안기도 했다. 베스트셀러인『검은 백조(*Black Swan*)』의 저자로 유명한 N. Taleb은 Black-Scholes-Merton식과 그 발견자들에 대한 비판자로 유명하다. 글로발 금융위기 이후, Taleb(2010)은 Haug(2007), Triana(2009), Henderson(2009) 등과 더불어 M. Scholes와 R. Merton에게 수여된 노벨상을 취소하라고 주장하고 있다. Haug and Taleb(2011)은 지난 몇 년 동안 금융세계에서 널리 회자되고 또한 웹에서 가장 많이 다운로드된 논문들 중 하나인 "Why we have never used the Black-Scholes-Merton option pricing model"을 가다듬은 것이다. Black-Scholes-Merton식에 대한 신랄한 비판을 하고 있는 이 논문의 요지는 다음과 같다.

첫째, Black, Scholes, 그리고 Merton은 옵션가치평가식을 만들어 낸 것이 아니다. 그들은 금융세계에서 잘 알려지고 널리 사용되던 식에 동적헤징(dynamic hedging)을

사용해서 위험모수를 제거한다는 경제학적 해석을 추가했을 뿐이다. 동적헤징이란 이론적으로 가능하지만, 현실적으로는 실현 불가능한 개념이다.

둘째, 1902년 이래 옵션트레이더들은 Black-Scholes-Merton식의 초기 버전이라고 할 수 있는 Bachelier(1900)나 Thorp(2002a, 2002b, 2003)이 제시한 식에 더 잘 부합되는 경험칙(heuristics)과 기교(tricks)를 사용해왔다. Bachelier-Throp접근법은 정규분포가 아닌 다른 확률분포를 선택할 수 있는 가능성을 열어놓았으며 또한 실현 가능한 개념인 풋콜패리티를 사용해서 위험모수를 제거한다.

셋째, 1973년 Black-Scholes-Merton식이 발표된 이후에도 옵션트레이더들은 이 식을 사용하지 않고, 자신들의 경험에서 얻은 식들(bottom-up heuristics)을 사용한다. Black-Scholes-Merton식보다는 Bachelier-Throp접근법이 시장에 큰 영향을 끼치는 우발사건(rare event)의 발생에 더 강건(robust)하다.

Black-Scholes식을 유도하는 방법들을 자세히 소개하기에는 지면이 한정되어 있기에, 이 서베이 논문에서는 되도록 간략하게 이 방법들을 설명하였다. 이에 대한 좀 더 자세한 내용은 최병선(2013)을 참조하라.

서울대학교 경제학부 교수
151-746 서울특별시 관악구 관악로 1
전화: (02) 880-6394
팩스: (02) 886-4231
E-mail: bschoi12@snu.ac.kr

참 고 문 헌

최병선(2004a):『금융파생상품의 수리적 배경』, 서울, 세경사.

______(2004b):『이산형 재무모형의 수리적 배경』, 서울, 세경사.

______(2007):『계산재무론: Computational Finance』, 서울, 세경사.

______(2009):『금융공학 I: Elements of Financial Engineering』, 서울, 세경사.

______(2013):『금융공학 II: Black-Scholes Formula』, 출판예정, 서울대학교 출판문화원.

Andreasen, J., B. Jensen, and R. Poulsen(1998): “Eight Valuation Methods in

Financial Mathematics: The Black-Scholes Formula as an Example," *Mathematical Scientist*, **23**, 18-40.

Arrow, K. J.(1964): "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing," *Review of Economic Studies*, **31**, 91-96.

Bachelier, L.(1900): "Théorie de la Spéculation," *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, Series 3*, **17**, 21-86. Thesis for the Doctorate in Mathematical Sciences of Sorbonne Univiersity(defended March 29, 1900). Reprinted by Editions Jacques Gabay(1995), Paris; English Translation in *The random character of stock market prices*, P. Cootner(ed.)(1964), Cambridge, MIT Press, 17-78.

______(1901): "Théorie Mathématique du Jeu," *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, Series 3*, **18**, 143-210. Reprinted by Editions Jacques Gabay (1992), Paris.

Black, F.(1976): "The Pricing of Commodity Contracts," *Journal of Financial Economics*, **3**, 167-179.

______(1988): "The Holes in Black-Scholes," RISK Magazine, **1**, 30-33. Reprinted in *From Black-Scholes to Black Holes - New Frontiers in Options*, RISK/FINEX, 51-56, 1992.

______(1990): "Living Up to the Model," *Risk Magazine*, **3**, 11-13. Reprinted in *From Black-Scholes to Black Holes - New Frontiers in Options*, RISK/FINEX, 17-21, 1992.

Black, F., and M. S. Scholes(1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, **81**, 637-654.

Boyle, P., and F. Boyle(2001): *Derivatives: The Tools That Changed Finance*, London, Risk Books. Also, available at http://web.archive.org/web/20101026225940/http://www.thederivativesbook.com/contents.html.

Buchen, P., and M. Kelly(1996): "The Maximum Entropy Distribution of an Asset Inferred from Option Prices," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **31**, 143-159.

Carr, P., and R. Jarrow(1990): "The Stop-loss Start-gain Paradox and Option Valuation: A New Decomposition into Intrinsic and Time Value," *Review of Financial Studies*, **3**, 469-492.

Carr, P., and D. Madan(1999): "Option Valuation Using the Fast Fourier Transform," *Journal of Computational Finance*, **2**, 61-73.

Cont, R.(2010, Editor-in-Chief): *Encyclopedia of Quantitative Finance,* 4 Volumes, Chichester, Wiley.

Cover, T. M., and J. A. Thomas(2006): *Elements of Information Theory,* 2nd ed., New York, Wiley.

Cox, J. C., and S. A. Ross(1976): "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Process," *Journal of Financial Economics*, **3**, 145-166.

Cox, J. C., S. A. Ross, and M. Rubinstein(1979): "Option Pricing: A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics*, **7**, 229-263.

Csiszár, I.(1975): "I-divergence Geometry Problem of Probability Distribution and Minimization Problems," *Annals of Probability*, **3**, 146-158.

Cutland, N., E. Kopp, and W. Willinger(1991): "A Nonstandard Approach to Option Pricing," *Mathematical Finance*, **1**, 1-38.

Derman, E.(2004): *My Life as a Quant: Reflections on Physics and Finance*, Hoboken, New Jersey, Wiley.

Debreu, G.(1959): *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, New Haven and London, Yale University Press. Available at http://cowles.econ.yale.edu/P/cm/m17/index.htm.

Dupire, B.(1994): "Pricing with a Smile," *Risk Magazine*, **7**, 18-20.

Evans, L. C.(1998): *Partial Differential Equations*, Providence, Rhode Island, American Mathematical Society.

Feynman, R. P.(1948): "Space-time Approach to Nonrelativistic Quantum Mechanics," *Review of Modern Physics*, **20**, 367-387.

Garman, M. B., and S. W. Kohlhagen(1983): "Foreign Currency Option Values," *Journal of International Money and Finance,* **2**, 231-237.

Gil-Pelaez, J.(1951): "Note on the Inversion Theorem," *Biometrika*, **37**, 481-482.

Gulko, L.(1997): "Dart Boards and Asset Prices: Introducing the Entropy Pricing Theory," in R. Carter Hill(ed.), *Applying Maximum Entropy to Econometric Problems (Advances in Econometrics, Volume 12)*, Emerald Group Publishing Limited, 237-

276.

Gurland, J.(1948): "Inversion Formulae for the Distribution of Ratios," *Annals of Mathematical Statistics*, **19**, 228-237.

Harrison, J. M., and D. M. Kreps(1979): "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets," *Journal of Economic Theory*, **20**, 381-408.

Harrison, J. M., and S. R. Pliska(1981): "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading," *Stochastic Process and Applications*, **11**, 215-260.

Haug, E. G.(2007): *Derivatives Models on Models*, West Sussex, England, Wiley.

Haug, E. G., and N. N. Taleb(2011): "Option Traders Use (Very) Sophisticated Heuristics, Never the Black-Scholes-Merton Formula," *Journal of Economic Behavior & Organization*, **77**, 97-106.

Henderson, H.(2009): "Changing the Game of Finance," Invited paper for "The World as We Want It to Be" SRI in the Rockies 20th Anniversary, October 25-28, 2009. Available at http://www.ethicalmarkets.com/2009/10/15/changing-the-game-of-finance/.

Heston, S.(1993): "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility and Applications to Bond and Currency Options," *Review of Financial Studies*, **6**, 327-343.

Higham, D. J.(2002): "Nine Ways to Implement the Binomial Method for Option Valuation in MATLAB," *SIAM Review*, **44**, 661-677.

Ingersoll, J. E.(1987): *Theory of Financial Decision Making*, Lanham, Maryland, Rowman & Littlefield.

Kac, M.(1951): "On Some Connections between Probability Theory and Differential and Integral Equations," *Proceedings of the 2nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California, Berkeley, 189-215.

Lévy, P.(1925): *Calcul des Probabilites*, Paris, Gauthier-Villars.

Merton, R. C.(1971): "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model," *Journal of Economic Theory*, **3**, 373-413.

______(1973): "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**, 141-183.

Moore, L., and S. Juh(2006): "Derivative Pricing 60 Years before Black Scholes: Evidence from the Johannesburg Stock Exchange," *Journal of Finance*, **61**, 3069-3098.

Rendleman, R., and B. Bartter(1979): "Two-state Option Pricing," *Journal of Finance*, **34**, 1093-1110.

Rubinstein, M.(1976): "The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options," *Bell Journal of Economics*, **7**, 407-425.

Steele, J. M.(2000): *Stochastic Calculus and Financial Applications*, New York, Springer-Verlag.

Stutzer, M.(1996): "A Simple Nonparametric Approach to Derivative Security Valuation," *Journal of Finance*, **51**, 1633-1651.

Taleb, N.(2010): *The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable*, 2nd ed., New York, Random House.

Taqqu, M.(2001): "Bachelier and His Times: A Conversation with Bernard Bru," *Finance and Stochastics*, **5**, 3-32.

Thorp, E. O.(2002a): "What I Knew and When I Knew It? Part I," *Wilmott Magazine*, **September 2002**, 44-45.

______(2002b): "What I Knew and When I Knew It? Part II," *Wilmott Magazine*, **December 2002**, 44-45.

______(2003): "What I Knew and When I Knew It? Part III," *Wilmott Magazine*, **January 2003**, 42-43.

Triana, P.(2009): *Lecturing Birds on Flying: Can Mathematical Theories Destroy the Financial Markets?*, Hoboken, New Jersey, Wiley.

Abstract

Various Derivations of the Black-Scholes Formula

ByoungSeon Choi

One of the most influential formulas in finance is the Black-Scholes formula, which is used to price European options. The purpose of this paper is to survey its derivations. Throughout the various derivations, we introduce core concepts and tools in finance such as arbitrage, hedging, replication, risk-neutral, Ito-Doeblin lemma, and local time and show how they are applied to pricing a plain-vanilla call option. The derivation methods in this survey are based on versatile theories, models, and techniques including the binomial tree model, partial differential equations, market price of risk, the second financial derivative, risk-neutral measure, Girsanov Theorem, numéraire, Feyman-Kac theorem, the backward and forward Kolmogorov equations, utility function, the CAPM, Hamilton-Jacobi-Bellman equation, characteristic function, contour integral, Plancharel-Parseval identity, maximum entropy principle, Kullback-Leibler information number, stop-loss start-gain strategy, and so on. The reason for introducing the derivation methods in this survey paper is not just to show how the Black-Scholes formula is diversely derived but also to explain the fundamental building blocks of financial engineering.

Keywords: Binomial tree model, Black-Scholes formula, CAPM, Complex integral, Equivalent measure, Feynman-Kac theorem, Kolmogorov equation, Kullback-Leibler information, Martingale, Maximum entropy, Numéraire, Partial differential equation, Risk-neutral, Utility function