「K. 랭카스터」 著

『數 理 經 濟 學』

Kevin Lancaster, Mathematical Economics

The Macmillan Company, New York, 1968, viii+411 pp.

鄭 基 俊

1950年頃 以後의 數理經濟學分野는 可謂 萬化方暢이라고 할 수 있을만큼 새로운 方法과 새로운 分析道具를 使用하는 論文과 著書가 쏟아져 나오고 있으며, 이는 종래의 微積分學의 應用을 中心으로하는 古典的 數理經濟學에 대해서 "새로운 數理經濟學"의 탄생을 보게 하는데 까지 이르고 있다. 그리하여 새로 등장한 강력한 分析道具는 從來의 分析道具로서는 分析이 어려운 여러가지 問題를 쉬게 解決할 수 있는 길을 터놓았으며, 未解決의 問題들이 解決의 실마리를 찾아가고 있다.

그러나 各國의 수많은 專門雜誌와 新刊을 求得하고, 難易度의 差가 심한 論文들을 理解하여 當該學門의 發展과 발맞춰 나가기란 이를 專攻하는 사람에게 있어서 조차도 힘에 벅찬 일이나 이를 위한 손쉬운 길잡이가 될 책으로서 最近의 數理經濟學의 發展을 綜合的으로 다룬 것을 찾아보기 힘들었다. 여기에 評을 하고자 하는 책은 現時點에서 이러한 要求를 훌륭하게 充足시켜 줄 수 있는 것으로 생각된다.

本書는 序論에 이어, 眞正한 意味의 數理經濟學問題를 다룬 11個章, 그리고 11個章으로 된 數學解說로 되어 있다. 數理經濟學의 章들과 數學解說의 章들은 相互的인 關係를 가지도록 되어있다. 즉 數理經濟學에서 必要한 數學이 數學解說의 章들에서 다루어 지고 있고, 數學解說에서 다루어진 數學의 數理經濟學에서의 應用例가 數理經濟學의 章들에 나와 있는 셈이다.

數理經濟學의 章들은 다시 3部로 나누어진다. 第2章~第5章을 포함하는 第1部에서는 線型計劃法, 古典的 微積分法 및 「쿤—터커」理論등 最適化理論一般을 다루고 있다. 第2部(第6章~第9章)에서는 「레온티에프」模型, 活動分析, 新古典派模型, 現代的 一般均衡模型등 여러가지 靜態的 經濟模型을 다루고 있다. 第3部는 第10章~第12章으로 되어 있는데, 여기서는 「폰 노이만」模型 및 其他 均衡成長模型, 最適成長, 턴파이크定理, 安

定性分析등 多部門動態模型들을 다루고 있다.

數學解說에서는 線型代數, 不等式, 볼록集合 및 볼록錐, 行列, 函數, 寫像, 位相槪念, 特殊行列들의 性質, 微分方程式, 定差方程式, 變分法등이 다루어지고 있다,

以下에서는 各章의 要點을 살펴보기로 한다.

第 2 章「一般的 最適化問題」: 여기서는 經濟模型이 決定論的인 것으로부터 最適化模型으로 移行함에 따라 더욱 重要하게 된 最適化理論의 過去 20年間의 發展을 감안하여 最適化問題의 一般的 構造를 說明하고, 最適化問題를 다루는 여러가지 分析技術이 이 一般的 構造와 어떻게 適合되는가를 다루고 있다.

第 3 章「線型計劃法의 理論」: 여기서는 線型計劃法의 數學的 構造와 經濟學的 意味를 함께 說明하고 있는데, 특히 線型計劃法의 最適解는 local optimum 이 아니라 global optimum 이라는 것과, 雙對의 槪念은 限界分析이래 價格理論에서 價格의 本質을 밝혀주는데 가장 重要한 槪念으로 導入되었음을 強調한다.

第 4 章「古典的 微積分法」: 古典的 微積分法으로 다룰 수 있는 最適化問題의 一般的 構造는, 目的函數와 制約式들이 모두 連續이고 微分可能해야 하고, 函數制約式은 모두 等式이며, 變數에 대한 直接的인 制約(非마이너스)이 없는 것이다. 여기서는 주로「라그랑주」乘數法에 의해서 最適化問題가 다루어 질 수 있음을 보이고 있다. 그리고 특히 各 制約式에 對應하는「라그랑주」乘數는 線型計劃法에서의 雙對變數와 마찬가지로 shadow price 를 나타 냄을 보이고 있다. 그리고 특히 最適化問題의 充分條件인 2階의 條件이 자세히 다루어지고 있다. 즉 보통 2階의 條件은 制約式이 하나인 경우에만 說明되는 것이 보통인데 여기서는 多數의 制約式을 갖는 一般的인 경우를 우선 說明하고 制約式이 하나인 경우 制約式이 線型인 경우, 目的式이 線型인 경우에 그 條件이 어떻게 單純化되는 가를 차례로 다루고, 보통 사용되고 있는 bordered Hessian determinant 에 의한 極大·極小判定法과의 關係를 說明하고 있다.

2階條件의 가장 훌륭한 使用例는「슬루츠키—힉스」의 消費者行動分析인데, 여기서는 보통의 方法과는 正反對로 주어진 效用水準에서 所得을 極小로 하는 問題로 바꾸어 代替效果가 마이너스임을 證明하고 있다.

第 5 章「高級最適化理論」: 函數制約式이 等式이며, 符號制約이 없는 古典的 最適化方法은 經濟分析에서 널리 使用되지만 적어도 일부의 經濟變數들은 非마이너스의 性質을 가져야 하며 函數制約式도 等式으로 보다는 不等式으로 나타내는 것이 더욱 타당한 경우가 많음을 생각할 때 古典的 方法의 弱點을 알 수 있다. 여기서는 우선 變數에 非마이너스의

性質을 부여할 때, 그리고 函數制約式을 不等式으로 만들때 古典的 最適化條件이 어떻게 修正되는 가를 보이고 있다. 이 變數符號의 制約과 不等式인 制約式을 同時에 만족시키는 最適解의 條件은 바로 「쿤—터커」(Kuhn-Tucker)條件이며, 이것은 가장 一般的인 條件으로서 線型計劃法의 問題와 古典的 問題의 條件은 이것의 特殊한 경우임을 밝히고 있다. 끝으로 minimax $F(x, y)$ = maximin $F(x, y)$가 될 必要 充分條件은 $F(x, y)$가 鞍裝點을 가지는 것임을 말하는 미니맥스定理와 最適化問題가 解를 가질 條件을 規定하는 存在定理로서 最適化問題를 完結하고 있다.

第6章 「投入産出 模型」: 靜態經濟模型의 가장 單純한 것으로 「레온티에프」의 投入産出模型이 다루어진다. 閉鎖模型과 開放模型을 說明하고 나서, 直接 및 間接投入必要量과 「레온티에프」逆行列, 「레온티에프」模型에서의 要素集約度槪念이 說明되고 單一의 原初投入으로 勞動만을 생각하는 경우, 「레온티에프」의 開放模型은 암묵적으로 勞動價値說을 포함하고 있다는 것과, 어떤 한 最終需要의 集合을 生産하는데 最適인 活動들의 集合은 다른 最終需要의 集合을 生産하는데에 있어서도 最適이라는 이른바 「代替定理」가 線型計劃法의 理論에 의해서 證明된다. 끝으로 그 分析的인 性質이 投入産出模型과 같다고 해서 行列乘數槪念이 이 章에서 說明된다. 즉 a_{ij}를 j 部門所得의 i 部門財貨에 대한 支出性向이라하고 $A=[a_{ij}]$는 支出性向行列이라하면 보통의 乘數에서와 마찬가지로 $(I-A)^{-1}$은 行列乘數가 된다.

第7章 「線型最適化模型」: 「레온티에프」의 投入産出模型에서는 財貨와 活動이 1:1로 對應하는 것이었으나, 이 章에서는 한 財貨를 生産하는데 여러개의 活動이 있고, 한 活動에서 여러개의 産出이 나올 수 있는 一般的인 線型模型을 다루고 있다. 이와 같은 一般的인 生産의 活動分析을 위하여 먼저 生産集合에 대한 여러가지 基本假定이 세워지고 採擇할 수 있는 生産集合과 採擇할 수 없는 生産集合을 說明한다. 그리고 이러한 조건을 만족시키는 경우에 적절한 shadow price가 있다면 生産의 分權化된 統制에 의해서 最適生産을 기할 수 있다는 「分權化定理」(decentralization theorem)가 誘導된다. 다음에 이러한 生産集合의 一般的 性質에 관한 硏究로부터 制約條件이 붙는 경우의 生産의 硏究로 移行되는데, 여기에는 線型計劃法의 理論이 援用된다. 끝으로 消費의 活動分析이 있는데 여기서는 消費도 生産과 마찬가지로 活動分析에 의해 說明할 수 있음을 보여주는 著者의 最近의 獨自的 業績을 紹介하고 있다.

第8章 「非線型最適化模型」: 이 章에서는 非線型의 需要 및 生産模型의 分析을 다루고 있다. 分析道具로서는 新古典派의 方法과 集合論의 方法을 모두 使用함으로써 두 方法의

長短點을 比較할 수 있게 하였다. 먼저 需要理論에서는 新古典派의 方法에 따라 「슬루츠키」方程式, 效用指標의 變化에 대한 「슬루츠키」方程式의 不變性, 複合財定理(composite commodity theorem)를 誘導할 수 있음을 보인 다음 集合論에 의해서는 볼록集合의 性質을 써서 代替效果가 마이너스라는 것과 複合財도 單一財와 마찬가지의 代替效果를 가진다는 것을 證明하고 있다.

다음에는 生産函數의 形態와 生産變換函數(變換曲面)의 形態사이의 關係를 說明하고 있다. 이 關係는 2財 2要素의 경우에는 잘 알려져 있으나 여기서는 一般的인 경우를 다루고 있는 點에서 의의가 있다. 먼저 生産變換曲面이 바깥쪽으로 볼록한 正常의 形態를 가지기 위한 두개의 條件이 導出되며 이 두 條件은 한 經濟가 모두 原點에 대해서 볼록한 (等生産曲面이 오목한) 規模에 대한 收益이 체감하는 同次의 生産函數들로 이루어진 경우에 充足된다는 것이 證明된다. 그러나 보통 가정되는 바와 같이 生産函數가 規模에 대한 收益이 不變인 경우에는 모든 生産函數가 原點에 대해서 볼록하고, 어떠한 두개의 生産函數도 어떤 點에서도 相對的 要素集約度가 같아서는 안된다는 條件이 充足되어야만 生産變換曲面은 正常의 바깥쪽으로 볼록한 형태가 된다는 것을 보이고 있다. 이 條件은 一般的으로 1次同次의 生産函數가 가정되며, 要素集約度가 대단히 重要한 意味를 가지는 國際貿易論에서의 「헥셔—올린」理論이나 要素價格均等化理論에 대하여 重要性을 가진다.

끝으로 集合論의 方法을 써서 보다 一般的인 경우의 生産理論을 展開할 수 있음을 보여주고 있다.

第 9 章 「一般均衡」: 이 章에서는 意思決定이 分權化된 市場經濟에서의 均衡의 存在 여부를 고찰한다. 먼저 예비적으로 「왈라스」의 法則과 超過需要定理가 說明된 다음 競爭經濟의 單純한 模型인 「왈라스—발트」(Walras-Wald) 模型에서의 均衡의 存在가 證明되며, 또 均衡의 一義性이 證明된다. 다음에 競爭經濟를 보다 잘 代表할 수 있는 「애로우—드브뢰—매켄지」(Arrow-Debreu-McKensie) 模型에서의 競爭的 均衡의 存在定理가 證明된다.

第 10 章 「均衡成長」: 經濟의 生産規模는 增加하나 모든 比率은 一定한 狀態에서 變하지 않는 均衡成長은 多部門經濟模型의 靜態分析과 動態分析의 교량적 역할을 한다. 이 章에서는 特定한 經濟模型들이 均衡成長의 樣態를 가지는가, 그 樣態는 一義的인가, 그 樣態의 特徵은 무엇인가 등의 문제가 다루어지는데, 이 均衡成長經路의 性質은 다음 章에서의 다른 成長樣態의 說明에서 中心的인 역할을 한다.

먼저 「레온티에프」模型에서, 經濟成長의 制約的 要因이 在庫水準이며 이의 增加는 生産에 의해서 이루어진다는 가정하에서 成長模型을 만들고, 여기서 均衡成長率을 誘導한다.

그리고 初期의 在庫의 比率이 그 成長率에 대응하는 特性벡터와 같을 때에만 均衡成長經路가 存在함을 보이고 있다.

다음 일반화된 線型模型인 「폰 노이만」 成長模型에서 그 模型의 特徵을 集約한 「폰 노이만」 定理를 誘導한다. 이것은 動態的으로 볼 때 單純한 成長模型이지만, 이 模型의 分析에서 나오는 一般的인 概念은 多部門經濟의 一般的 成長理論에서 基本的인 것이다.

다음에는 「폰 노이만」模型의 單純化 또는 「레온티에프」模型의 一般化라고 볼 수 있는 「폰 노이만—레온티에프」模型에서의 均衡成長을 다루고 있는데 이 模型에서는 擴張因子, 價格벡터, 活動벡터등의 一義性이 밝혀진다.

끝으로 規模에 대한 收益의 不變條件만 充足되면 生產技術이 非線型인 경우도 포함하는 一般均衡成長模型이 다루어지고 있는데, 이 경우 各各의 生產要素配分規則 대하여 一義的 均衡成長樣態가 결정됨이 밝혀진다. 그리고 많은 配分規則중에는 가장 높은 均衡成長率을 야기하는 規則이 있으며 이 成長經路를 「폰 노이만」經路라고 부른다.

第 11 章 「效率的 最適成長」: 먼저 新古典派의 生產을 가정하는 경우에는 目標最適的 (terminally optimal)인 均衡成長經路가 있으며 이 經路는 모든 均衡成長經路中에서 가장 큰 成長因子를 가지며 따라서 이것은 「폰 노이만」經路임을 確認한다. 그리고 이 經路에 관련되는 目標點에서의 價格과 그 經路가 지나가는 半直線을 각각 「폰 노이만」射線이라고 부른다.

最適成長經路와 「폰 노이만」經路와의 관계에 관한 定理를 턴파이크 定理라고 부르는데, 이 定理에는 세개의 相異한 경우가 포함된다. 즉

(1) $\varepsilon>0$ 인 임의의 ε에 대해서 有限한 N期에 걸친 어떤 目標最適的인 經路는 M期以下의 期間에 대해서 「폰노이만」 經路로부터 ε 以上의 거리를 가질 것이다(여기서 M은 N과는 獨立的이나 일반적으로 ε에 從屬的인 有限한 숫자이다).

(2) 目標價格이 「폰 노이만」價格과 같을때 그 目標最適的 經路는 시간이 지남에 따라 「폰 노이만」經路에 더욱 接近하게 되어, N이 무한히 커짐에 따라 「폰 노이만」經路는 漸近線이 된다.

(3) 「폰 노이만」經路로부터 같은 거리 떨어져 있는 두 점을 지나는 한 目標最適的 經路에서 모든 中間點들은 두 끝점들보다 「폰 노이만」經路에 더욱 接近된다.

따라서 이 定理의 內容으로 볼 때 턴파이크(高速道路)란 이름은 싱싱한 맛을 주기는 하지만 적절하지는 않은 것을 지적하고 있다.

第 12 章 「安定性」: 安定性의 定義는 경우에 따라 여러가지로 定義될 수 있으며, 그 定

義는 均衡의 定義와 관련된다. 또 經路 全域에 대해서 타당한가 均衡經路附近에서만 타당한가에 따라 global stability와 local stability가 나누어진다. 이 章에서는 安定性 分析의 두가지 方法 즉 直接解를 구하여 判定하는 方法과 「리아푸노프」(Liapunov)方法이 說明된다. 즉 體系가 微分方程式이나 定差方程式으로 되어있고 이것을 時間 t에 관한 函數 $y(t)$로 풀수 있어 t에 따른 經路를 직접 알 수 있을때는 前者의 方法이 使用될수 있으나, 直接풀기가 어려운 때에는 均衡點 附近에서 常數係數를 가진 線型의 近似式으로 變換시킨 후에야 直接解를 구하여 安定性을 判定할 수 있다. 그러나 이 경우의 安定性은 local stability일수밖에 없다. 이에 대해서 새로운 安定性分析의 道具로 등장한 「리아푸노프」方法은 直接解를 구하지 않고 安定性을 判定하는 것으로 이 方法을 適用할 수 있는 函數 $V(y)$는 (1) 1次微分이 可能하고, (2) 모든 y에 대해서, $V(y)\geqq 0$이며, (3) $y=0$일 때에만 $V(y)=0$이며, (4) y는 時間 t의 函數이고 $\frac{dV}{dt}\leqq 0$라는 性質을 滿足시키면 된다.(이를 「리아푸노프」函數라 한다.) 즉 어떤 體系에 「리아푸노프」函數가 存在하면 그 體系는 安定하다(「리아푸노프」 安定性 定理). 이 章에서는 市場安定性과 分權化된 經濟政策의 安定性을 直接解의 方法과 「리아푸노프」의 方法을 써서 分析하고 있다.

以上이 數理經濟學部分의 槪要이다. 그리고 이에 이어 거의 같은 분량의 數學解說이 있다. 이 두 部分 사이의 相互關聯은 各章의 虛頭에 자세히 說明되어 있고, 다른 文獻들과의 關聯 및 文獻紹介도 되어 있다. 數學(微積分과 線型代數)의 약간의 基礎를 가진 사람으로서 數理經濟學의 最近의 發展을 알고자하는 경우에 本書는 적절한 指針書가 될 것이다.

筆者 : 서울大學校 商科大學
韓國經濟研究所研究員
서울大學校 商科大學 專任講師