生産要素에 대한 需要의 伸縮的 加速度模型

鄭 基 俊*

〈目 次〉

I. 序 論

1963年 아이스너와 스트로즈〔3〕는 엄밀한 理論的 基礎 위에 投資需要의 伸縮的 加速度模型을 定立하는 데 성공하였다. 그 이전에도 投資需要를 伸縮的 加速度原理를 써서 설명하는 경우를 볼 수는 있었으나 그 模型의 使用을 合理化해 주는 理論的 背景이 없었다. 그런데 아이스너와 스트로즈는 企業의 合理的 行動의 結果로 投資需要는 伸縮的 加速度模型에 따라서 이루어지게 됨을 밝혔던 것이다.

아이스너와 스트로즈〔3〕는 다음과 같이 假定하였다.

(가) 한 企業이 어떤 生產要素의 投入을 增加시키는 데는 그에 따른 調整費用(adjustment cost)이 들며, 이 調整의 限界費用은 調整의 速度가 커짐에 따라 增加한다.

(나) 그 企業은 完全競爭狀態에서 稼動하며 따라서 外部에서 주어지는 價格에 順應한다.

(다) 그 企業은 어떤 時點 t 에서의 價格이 永續될 것이라고 기대하고 行動한다. 즉 價格에 대하여 靜態的 期待(static expectation)를 한다.

(라) 生產函數는 規模에 대한 收益의 체감을 나타낸다.

(마) 그 企業은 그 企業의 純現價(net present value of the firm)를 極大化하고자 한다.

그들은 以上의 가정하에서, 投資라는 한 生產要素의 投入의 時間經路를 선택하게 되면, 그 經路는 바로 伸縮的 加速度模型이 나타내는 經路임을 보여주었던 것이다.

*本研究所 硏究員, 서울大學校 經濟學科 副敎授

以上과 같은 아이스너와 스트로쯔의 結果에 자극을 받아 그 후에 多數의 사람들이 多數生產要素의 需要에 관한 伸縮的 加速度模型으로 一般化하고 이를 合理化하고자 試圖하였다. 그리고 나디리와 로젠〔7,8〕은 이 一般化된 伸縮的 加速度模型을 實證的 分析에 利用하였다.

本論文에서는 여러가지 形態로 表現되는 伸縮的 加速度模型을 검토하고 그 含蓄內容을 음미한 다음, 나디리와 로젠의 硏究에 대하여 몇가지 重要한 批評을 가하고자 한다.

本論文에서 使用되는 重要한 記號의 의미는 다음과 같다.

v: 企業의 純現價

x: 要素投入量〔벡터〕

$F(x)$: 生產函數

$G(\dot{x})$: 調整費用函數

$\cdot$: 時間導函數記號 $\left(\text{예컨대 } \dot{x}=\dfrac{dx}{dt}\right)$

t: 時點 또는 期間

q: 生產物單位로 표시한 要素價格(使用者費用)〔벡터〕

x^*: x의 均衡解〔벡터〕

r: 利子率 또는 割引率

A: 均衡解에서의 生產函數의 헤시안行列

C: 均衡解에서의 調整費用函數의 헤시안行列

B: 調整係數〔行列〕

II. 伸縮的 加速度模型 I: 單一生產要素, 連續時間

아이스너와 스트로쯔〔3〕에 의해서 展開된 伸縮的 加速度模型은 生產要素가 한가지뿐이고 時間이 連續的인 경우의 模型이다. 그리고 그들의 模型에서 單一生產要素의 投入量은 工場의 規模로 測定되었다. 그러나 理論의 展開에서 生產要素의 종류가 무엇인지는 문제가 되지 않는다.

單一生產要素, 連續時間을 가정하는 경우의 伸縮的 加速度模型을 간단히 說明하기 위해서 生產函數와 調整費用函數를 다음과 같은 2次函數로 가정해보자.[1]

(1) 이 가정은 均衡點 근방에서의 近似의 결과라고 해석하면 좋다.

$$F(x)=\frac{1}{2}ax^2+bx. \tag{2-1}$$

$$G(\dot{x})=\frac{1}{2}c\dot{x}^2. \tag{2-2}$$

이때 生產要素의 限界生產性은

$$F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=ax+b \tag{2-3}$$

이므로, 規模에 대한 收益의 체감을 가정하면 $a<0$이며, 또 限界生產性이 陽인 區間이 存在하려면 $b>0$이어야 한다. 그리고 調整의 限界費用은

$$G'(\dot{x})=dG/d\dot{x}=c\dot{x} \tag{2-4}$$

이므로 調整費用의 체증을 가정하면 $c>0$이어야 한다.

企業의 純現價는 다음과 같은 汎函數(functional)로 定義된다.

$$v[x(t)]=\int_0^\infty f(x(t),\ \dot{x}(t),\ t)dt. \tag{2-5}$$

단 中間函數 f는

$$f(x(t),\ \dot{x}(t),\ t)\equiv e^{-rt}[F(x(t))-qx(t)-G(\dot{x}(t))]. \tag{2-6}$$

즉 生產物의 價格을 1이라 놓고 장래의 各時點에서의 瞬間純收益에서 生產要素의 投入增加로 인한 調整費用을 一定한 割引率 r로 割引하여 모두 합한 것이 企業의 純現價가 된다. 企業은 이를 極大化하도록 $x(t)$의 時間經路를 정한다고 가정된다.

變分法의 原理에 의하면 이 極大化의 1階必要條件은 오일러의 條件으로 다음과 같이 中間函數 f의 x에 대한 導函數 f_x와, $\dot{x}$에 대한 導函數 $f_{\dot{x}}$에 의해서 表現된다.

$$f_x-\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}=0. \tag{2-7}$$

즉 每時點에서의 生產要素의 投入의 決定은 그 投入의 增加로 말미암은 限界調整費用의 增加까지를 補償할 수 있어야 한다는 것을 의미한다. 이 條件을 다시 쓰면 式 (2-6), (2-3) 및 (2-4)로부터

$$f_x=e^{-rt}(F'-q)=e^{-rt}(ax+b-q) \tag{2-8}$$

$$f_{\dot{x}}=e^{-rt}(-G')=-e^{-rt}c\dot{x} \tag{2-9}$$

$$\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}=\frac{d}{dt}(-e^{-rt}c\dot{x})=e^{-rt}(rc\dot{x}-c\ddot{x}) \tag{2-10}$$

를 얻고 이로부터

$$f_x-\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}=e^{-rt}(ax+b-q-rc\dot{x}+c\ddot{x})=0 \tag{2-11}$$

를 얻는다. 즉, $e^{-rt}>0$이므로 다음과 같은 2階線形微分方程式이 成立해야 한다.

$$c\ddot{x}-rc\dot{x}+ax+b-q=0. \tag{2-12}$$

이밖에 最適化의 條件으로는 自然境界條件(natural boundary condition),

$$\lim_{t\to\infty} f_{\dot{x}}=0 \qquad (2\text{-}13)$$

가 있다. 그런데 이 條件은 式(2-9) 및 (2-4)에서 볼 때 限界調整費用인 $c\dot{x}$의 값이 有限할 때는 언제나 충족된다.

또 르장드르條件(Legendre condition),

$$df_{\dot{x}}/d\dot{x}=-e^{-rt}c<0 \qquad (2\text{-}14)$$

은 이미 $c>0$라고 가정했기 때문에 역시 충족된다.

이런 여러가지 조건들이 충족될 때, x의 最適時間經路를 구하는 데는 미분방정식(2-12)가 가장 중요하다. 우선 x의 定常解(stationary solution)를 구하기 위하여

$$\ddot{x}=\dot{x}=0 \qquad (2\text{-}15)$$

라고 놓으면 이 定常解 x^*는 式 (2-12)로부터

$$x^*=-\frac{b-q}{a} \qquad (2\text{-}16)$$

임을 알 수 있다. x의 이 定常解로부터의 偏差를 X로 나타내자. 즉

$$X(t)=x(t)-x^* \qquad (2\text{-}17)$$

그러면 식 (2-12)는 다음과 같은 同次의 2階線形微分方程式이 된다.

$$c\ddot{X}-rc\dot{X}+aX=0. \qquad (2\text{-}18)$$

이 식의 특성방정식은

$$c\lambda^2-rc\lambda+a=0$$

라고 쓸 수 있고, 그 根은

$$\lambda_1,\ \lambda_2=\frac{rc\pm\sqrt{(rc)^2-4ca}}{2c}$$

이다. 그런데 가정에 의하여 $c>0$, $a<0$이므로

$$(rc)^2-4ca>(rc)^2>0$$

가 되고 따라서 두 根은 모두 實根이며, 그 중 하나는 陰이고 다른 하나는 陽이다. 그리하여

$$\lambda_1<0,\ \lambda_2>0 \qquad (2\text{-}19)$$

로 놓을 수 있다.

임의의 상수를 k_1, k_2라 하면 $X(t)$의 一般解는

$$X(t)=k_1e^{\lambda_1 t}+k_2e^{\lambda_2 t}$$

가 된다. 模型의 安定을 위하여는 $\lim_{t\to\infty} X(t)=0$가 되어야 하므로, $k_2=0$여야 한다.

즉

$$X(t)=k_1e^{\lambda_1 t}.$$

初期의 $x(t)$의 값 즉 $x(0)$가 x_0로 주어진 경우, k_1의 값은 다음과 같이 된다. 즉

$$k_1=X(0)=x(0)-x^*=x_0-x^*.$$

위의 결과들을 종합하면, 式 (2-12)의 最終解는

$$x(t)=x^*+X(t)=x^*+(x_0-x^*)e^{\lambda_1 t}. \tag{2-20}$$

이것이 生產要素投入의 最適時間經路이다.

式 (2-20)을 시간 t에 관하여 미분하면,

$$\dot{x}(t)=\lambda_1(x_0-x^*)e^{\lambda_1 t}=\lambda_1(x(t)-x^*).$$

즉

$$\dot{x}(t)=B[x^*-x(t)]. \tag{2-21}$$

단 $B=-\lambda_1>0$이다. 이 式이 의미하는 바는 현재의 生產要素의 投入 $x(t)$가 定常水準 x^*에 미달할 때는 投入이 增加하는 것을 보여주고 하다. 이것은 또 周知하는 바와 같이 伸縮的 加速度模型의 내용이기도 하다. 따라서 우리는 最適化行動의 가정으로부터 伸縮的 加速度模型을 유도한 셈이다. 예를 들어 x가 資本스토크를 나타내는 경우 이 式은 純投資가 資本에 대한 超過需要 $x^*-x(t)$에 比例함을 보여주고 있다.(2)

III. 伸縮的 加速度模型 II: 單一生產要素, 離散時間

前節에서는 連續時間을 가정하고 變分法을 써서 伸縮的 加速度模型을 導出하였다. 그러나 離散時間을 가정하면, 變分法을 쓰지 않고서도 類似한 결과를 導出할 수 있다. 주낭카〔5〕는 브레클링〔2〕과 함께 그 한 例를 제시하고 있다.

單一生產要素, 離散時間의 경우의 伸縮的 加速度模型을 설명하기 위해서 前節에서와 類似하게 生產函數와 調整費用函數를 다음과 같이 가정하자.

$$F(x_t)=\frac{1}{2}ax_t^2+bx_t,\ \ a<0,\ \ b>0. \tag{3-1}$$

$$G(\Delta X_t)=\frac{1}{2}c(\Delta x_t)^2,\ \ c>0. \tag{3-2}$$

단 $\Delta x_t\equiv x_{t+1}-x_t$로 정의된다.

期間 t에서의 利潤은

(2) 여기서 超過需要는 보통 쓰는 의미와 약간 다르게 사용하였다.

$$g_t \equiv F(x_t) - qx_t - G(\Delta x_t) \tag{3-3}$$

로 정의된다. 그리고 이를 고쳐쓰면

$$g_t = \frac{1}{2}ax_t^2 + bx_t - qx_t - \frac{1}{2}c(x_{t+1} - x_t)^2 \tag{3-4}$$

이 된다. 여기서 企業의 純現價를 T 期까지의 割引된 利潤의 合으로 定義하고 企業은 初期의 生產要素의 量 x_0가 주어진 조건하에서

$$v = \sum_{t=1}^{T}(1+r)^{-t}g_t \tag{3-5}$$

를 극대화하는 행동을 하는 것으로 가정할 수 있다.

極大化의 1階條件은 v의 x_t에 관한 편도함수를 모두 0으로 놓아 구할 수 있다. 즉

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial X_t} &= (1+r)^{-t}\frac{\partial g_t}{\partial x_t} + (1+r)^{-t+1}\frac{\partial g_{t-1}}{\partial x_t}\\ &= (1+r)^{-t}\{ax_t + b - q + cx_{t+1} - cx_t - (1+r)cx_t + (1+r)cx_{t-1}\}\\ &= 0, \quad t = 1, 2, \cdots\cdots, \quad T.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_{T+1}} = (1+r)^{-T}\frac{\partial g_T}{\partial x_{T+1}} = -(1+r)^{-T}\ c(x_{T+1} - x_T) = 0.$$

이 條件들을 고쳐쓰면

$$cx_{t+2} + (a-(2+r)c)x_{t+1} + (1+r)cx_t + (b-q) = 0, \quad t = 0, 1, \cdots\cdots, \quad T-1. \tag{3-6}$$

$$(1+r)^{-T}c(x_{T+1} - x_T) = 0. \tag{3-7}$$

極大化의 2階條件은 헤시안行列

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_s \partial x_t'}\right], \quad s, t = 1, 2, \cdots\cdots, \quad T+1$$

이 陰定符號行列이 되어야 한다는 것이다. 특히 이行列의 對角元素들은 陰이어야 한다. 즉

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_t^2} = (1+r)^{-t}(a-(2+r)c) < 0, \quad t = 1, 2, \cdots\cdots, T. \tag{3-8}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_{T+1}^2} = -(1+r)^{-T}c < 0. \tag{3-9}$$

여기서 조건(3-6)은 前節의 오일러—라그랑지條件에 대응한다. 조건(3-7)은 $T \to \infty$이거나 $x_{T+1} = x_T$일 때 충족된다. 조건 (3-8)과 (3-9)는 생산함수와 조정비용함수에 관한 우리의 가정하에서 충족된다.

조건 (3-6)은 2階線形差分方程式의 형태로 주어져 있다. 이 방정식의 定常解 x^*는 $x_{t+2} = x_{t+1} = x_t = x^*$로 놓음으로써 구할 수 있다. 즉

$$(c + a - 2c - rc + c - rc)x^* = -(b-q)$$

$$x^* = -\frac{b-q}{a} \tag{3-10}$$

가 된다. x_t의 이 定常解로부터의 偏差를 X_t로 나타내자. 즉

$$X_t = x_t - x^*. \tag{3-11}$$

그러면 우리는 X_t를 써서 식 (3-6)을 다음과 같은 同次差分方程式으로 고쳐쓸 수 있다. 즉

$$cX_{t+2} + (a-(2+r)c)X_{t+1} + (1+r)cX_t = 0. \tag{3-12}$$

이 식에 대응하는 特性方程式은

$$c\lambda^2 + (a-(2+r)c)\lambda + (1+r)c = 0 \tag{3-13}$$

이며, 그 根은

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{2c+rc-a \pm \sqrt{(2c+rc-a)^2-4(1+r)c^2}}{2c} = 1 + \frac{rc-a \pm \sqrt{(rc-a)^2-4a}}{2c} \tag{3-14}$$

이 式에서 $a<0$, $r, c>0$임을 감안하면, 둘째 等號 다음의 표현에서

$$(rc-a)^2 - 4a > (rc-a)^2 > 0$$

이므로 實根을 가지며 두 根 중 하나는 1보다 작고 다른 하나는 1보다 큰 것을 알 수 있다 그리고 첫번째 等號 다음의 표현에서

$$\sqrt{(2c+rc-a)^2-4(1+r)c^2} < (2c+rc-a)$$

이므로 작은 근도 0보다는 크다는 것을 알 수 있다. 따라서

$$0 < \lambda_1 < 1, \quad \lambda_2 > 1 \tag{3-15}$$

이라고 놓을 수 있다.

임의의 常數를 k_1, k_2라 하면 一般解는

$$X_t = k_1\lambda_1{}^t + k_2\lambda_2{}^t \tag{3-16}$$

로 주어진다. 그러나 $\lambda_2>1$이므로, 그 解가 安定的이려면 k_2는 0이 되어야 한다. 그리고 $t=0$일 때의 初期條件을 이용하면 k_1의 값은 다음과 같이 정해진다.

$$k_1 = X_0 = x_0 - x^*. \tag{3-17}$$

이 결과를 종합하면

$$X_t = x_t - x^* = (x_0 - x^*)\lambda_1{}^t.$$

즉

$$x_t = x^* + (x_0 - x^*)\lambda_1{}^t. \tag{3-18}$$

이를 伸縮的 加速度模型의 형태로 고치면

$$\Delta x_t = x_{t+1} - x_t = x^* + (x_0 - x^*)\lambda_1{}^{t+1} - x_t = x^* - x_t + \lambda_1(x_t - x^*) = (1-\lambda_1)(x^* - x_t).$$

즉

$$\Delta x_t = B(x^* - x_t) \tag{3-19}$$

가 된다. 단 $B=1-\lambda_1$이며 따라서 $0<B<1$이다. 式 (3-19)는 離散時間을 가정하는 경우의 伸縮的 加速度模型이다. 이 式이 의미하는 바는, 현재의 生産要素의 投入 X_t가 定常水準 X^*에 미치지 못할 때에는 次期의 投入은 그 差의 一定部分만큼 增加하게 됨을 의미한다. 그리고 이러한 行動은 이 式의 유도과정에서 알 수 있는 바와 같이 最適化行動의 일종이다.

IV. 伸縮的 加速度模型 III : n生産要素, 連續時間

루카스 〔6〕는 아이스너와 스트로쯔〔3〕의 결과를 일반화하였다. 즉 루카스는 생산요소 중 투입의 증가에 따라서 調整費用이 체증하는 임의의 數의 生産要素가 있고, 調整費用을 요하지 않는 임의의 수의 생산요소가 있는 경우를 다루고 있다. 그러나 경험적 硏究에 의하면 사실상 모든 生産要素가 그 投入의 調整費用이 체증하는 것을 보여주고 있다. 本稿에서는 n개의 生産要素 모두가 체증조정비용을 요하는 경우에 있어서의 一般伸縮的 加速度模型을 다루기로 한다. 本節에서는 連續時間의 경우가 다루어지며 다음 節에서는 離散時間의 경우가 다루어 진다.

n개의 生産要素의 投入의 벡터를

$$x(t) = [x_1(t),\ x_2(t), \cdots\cdots,\ x_n(t)]'$$

그리고 그 時間導函數의 벡터를

$$\dot{x}(t) = [\dot{x}_1(t),\ \dot{x}_2(t), \cdots\cdots,\ \dot{x}_n(t)]'$$

로 정의하자. 以下에서 時間表示 t는 혼란의 여지가 없는 한 생략하여 사용하기로 한다.

生産函數는

$$F(x) = \frac{1}{2}x'Ax + b'x,\quad A : n\times n \text{ 陰定符號行列} \tag{4-1}$$

調整費用函數는

$$G(\dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}'C\dot{x},\quad C : n\times n \text{ 陽定符號對角行列} \tag{4-2}$$

로 가정한다. 그리고 企業은 初期投入벡터 $x(0)=x_0$가 주어진 조건하에서 다음의 汎函數 v를 極大化하는 行動을 하는 것으로 가정한다.

$$v[x(t)] = \int_0^\infty f(x(t),\ \dot{x}(t),\ t)dt. \tag{4-3}$$

단 中間函數 f는

$$\begin{aligned} f(x, \dot{x}, t) &= e^{-rt}\{F(x) - q'x - G(\dot{x})\} \\ &= e^{-rt}\left\{\frac{1}{2}x'Ax + b'x - q'x - \frac{1}{2}\dot{x}'C\dot{x}\right\} \end{aligned} \tag{4-4}$$

로서, t時點에서의 利潤의 現在價値이다.

f를 x 및 $\dot{x}$에 관하여 편미분하면,

$$f_x = e^{-rt}(Ax+b-q).$$

$$f_{\dot{x}} = e^{-rt}(-C\dot{x}).$$

또 $f_{\dot{x}}$을 時間에 관하여 全導函數를 구하면,

$$\frac{d}{dt} f_{\dot{x}} = e^{-rt}\{rC\dot{x} - C\ddot{x}\}.$$

汎函數 v의 極大化를 위한 오일러—라그랑지條件은

$$f_x - \frac{d}{dt} f_{\dot{x}} = 0 \tag{4-5}$$

이다. 위의 결과를 종합하면 이 條件은

$$e^{-rt}\{Ax+b-q-rC\dot{x}+C\ddot{x}\}=0$$

즉

$$C\ddot{x} - rC\dot{x} + Ax + b - q = 0 \tag{4-6}$$

로 변형된다.

最適化의 自然境界條件은

$$\lim_{t\to\infty} f_{\dot{x}} = -\lim_{t\to\infty} e^{-rt}C\dot{x} = 0 \tag{4-7}$$

인데, 이 조건은 $t\to\infty$일 때 $C\dot{x}$가 有限하기만 하면 充足된다. 또 르장드르條件은

$$f_{\dot{x}\dot{x}}' = -e^{-rt}C\text{: 陰定符號行列} \tag{4-8}$$

인데, 우리는 C가 陽定符號行列임을 이미 가정하였으므로 이 조건 역시 充足된다.

定常解를 얻기 위해서는 式 (4-6)에서

$$\ddot{x} = \dot{x} = 0$$

라고 놓고 이를 x에 관해서 풀면 된다. 즉 定常解 x^*는

$$x^* = -A^{-1}(b-q). \tag{4-9}$$

가 된다. 벡터 $x(t)$의 그 定常解벡터 x^*로부터의 편차를 $X(t)$로 쓰자. 즉

$$X(t) = x(t) - x^*.$$

이 X를 써서 式 (4-6)을 바꾸어 쓰면,

$$C\ddot{X} - rC\dot{X} + AX = 0 \tag{4-10}$$

가 된다. 이것은 n개의 변수에 관한 2階線形微分方程式이다. 이것을 $2n$개의 변수에 관한 1階微分方程式으로 고쳐쓰기 위하여 새로운 변수의 벡터 Z를

$$Z = \dot{X} \tag{4-11}$$

로 정의하기로 하자. 그러면 식 (4-10)은

$$C\dot{Z}-rCZ+AX=0 \tag{4-12}$$

가 된다. 이 변형된 식은 定義式(4-11)과 함께 다음과 같은 $2n$개의 변수에 관한 1階線形微分方程式體系를 이룬다.

$$\begin{cases} \dot{Z}=rZ-C^{-1}AX \\ \dot{X}=Z \end{cases} \tag{4-13}$$

이 體系는 式 (4-6)과 同値이다.

이 體系를 다시 쓰면

$$\begin{bmatrix} \dot{Z} \\ \dot{X} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} rI & -C^{-1}A \\ I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z \\ X \end{bmatrix} \tag{4-14}$$

가 되며, 이의 解를 구하려면 係數行列

$$\begin{bmatrix} rI & -C^{-1}A \\ I & 0 \end{bmatrix} \tag{4-15}$$

의 固有値와 固有벡터를 구할 필요가 있다. 루카스[6]는 이 解法을 자세히 설명해 주고 있지 않다. 여기서는 이 解法을 자세히 따져보고 그 과정에서 아직까지 明示的으로 알려져 있지 않은 새로운 결과도 導出해 보고자 한다.

두 行列이 相似行列(similar matrix)이라고 하는 것은 한 行列의 양쪽에 어떤 비특이행렬과 그 역행렬을 각각 곱해서 다른 행렬이 얻어질 수 있는 경우를 말한다. 相似行列들은 同一한 固有値들을 갖는다. 그러므로 보다 다루기 쉬운 相似行列이 존재할 때는 그 行列의 固有値를 구함으로써 원래의 行列의 固有値를 구할 수 있다. 우리는 지금 (4-15)로 주어지는 行列의 固有値를 구하기 전에 그 行列과 相似이면서 보다 다루기 쉬운 行列을 먼저 구해보고자 한다. 이를 위해서는 먼저 그 部分行列 속에 있는 $C^{-1}A$와 相似인 對角行列을 구하는 것이 편리하다.

行列 C는 陽對角行列이라고 하였으므로, 그 對角元素의 陽의 平方根으로 이루어지는 陽對角行列 D가

$$D^2=C \tag{4-16}$$

를 만족하면서 존재한다. 또 A는 가정에 의하여 陰定符號行列이므로 $D^{-1}AD^{-1}$도 역시 陰定符號行列이다. 적당한 直交行列(orthogonal matrix) P를 써서 $D^{-1}AD^{-1}$를 對角化한 行列을 M이라 하자. 즉

$$M=PD^{-1}AD^{-1}P' \tag{4-17}$$

그러면 對角行列 M의 對角元素는 모두 陰數이다.

M을 $C^{-1}A$와 관련시켜 식(4-17)을 변형하면

$$M=PD(D^{-2}A)D^{-1}P'=PD(C^{-1}A)D^{-1}P' \tag{4-18}$$

이 된다. 그런데

$$T=D^{-1}P' \tag{4-19}$$

으로 정의하면

$$T^{-1}=PD$$

가 되고 따라서 (4-18)은

$$M=T^{-1}(C^{-1}A)T \tag{4-20}$$

로 쓸 수 있다. 이것은 行列 M이 行列 $C^{-1}A$의 相似行列임을 나타내는 것이다. 그런데 M은 對角行列이므로 확실히 다루기가 쉬운 행렬이다. 또 行列

$$\begin{bmatrix} rI & -M \\ I & 0 \end{bmatrix} \tag{4-21}$$

은 行列 (4-15)와 相似行列이다. 왜냐하면

$$\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} rI & -C^{-1}A \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rI & -M \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

이기 때문이다. 두 相似行列은 同一한 固有値들을 가지므로, 우리는 行列 (4-15)의 固有値를 相似變換된 行列 (4-21)의 固有値를 구함으로써 구할 수 있다. 行列 (4-21)의 特性方程式은 다음과 같다.

$$\begin{vmatrix} (\lambda-r)I & M \\ -I & \lambda I \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}\{(\lambda-r)\,\lambda+m_i\} = \prod_{i=1}^{n}(\lambda^2-r\lambda+m_i)=0.^{(3)} \tag{4-22}$$

여기서 m_i는 M의 i번째 對角元素로서 모두 陰數이다. 따라서 각각의 m_i에 두개의 固有値가 對應하게 되며, 그 값은

$$\lambda_{i1}, \lambda_{i2}=\frac{r\pm\sqrt{r^2-4m_i}}{2}, \quad i=1, 2, \cdots\cdots, n \tag{4-23}$$

이 된다. 여기서 根號內가 陽이므로 實根을 가지는 것을 알 수 있으며 또 $\sqrt{r^2-4m_i}>r>0$ 이므로 한 根은 陰이고 또 한 根은 陽이다. 즉

$$\lambda_{i1}<0, \ \lambda_{i2}>0, \ i=1, 2, \cdots\cdots n \tag{4-24}$$

(3) 행렬식을 구성하는 부분행렬들이 모두 $n\times n$ 대각행렬이기 때문에 짝수번 行과 列을 바꾸어 i번째 對角블록에 $\begin{bmatrix} \lambda-r & m_i \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}$가 오는 블록對角行列을 만들 수 있고, 그 行列式의 값은 各 블록行列式의 값의 곱으로 되기 때문에 이 식이 성립한다.

으로 놓을 수 있다. 이들은 또 行列 (4-15)의 固有値들이다.

式 (4-22)로부터

$$\begin{cases} \lambda_{i1}^2 - r\lambda_{i1} + m_i = 0, & i=1,2,\cdots\cdots,n \\ \lambda_{i2}^2 - r\lambda_{i2} + m_i = 0, & i=1,2,\cdots\cdots,n \end{cases} \tag{4-25}$$

의 관계를 얻고, 이를 다시 쓰면

$$\begin{cases} \Lambda_1^2 - r\Lambda_1 + M = 0 \\ \Lambda_2^2 - r\Lambda_2 + M = 0 \end{cases} \tag{4-26}$$

를 얻는다. 단,

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n1} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{bmatrix} \lambda_{12} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n2} \end{bmatrix} \tag{4-27}$$

이다. 그러므로

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \tag{4-28}$$

는 行列(4-21) 및 (4-15)의 固有値들을 對角元素로 하는 對角行列이다.

行列 (4-21)의 固有벡터들을 列로 하는 行列을 V라 하고 이를 다음과 같이 分割해 보자.

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}. \tag{4-29}$$

여기서 $\begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix}$은 Λ_1에 대응하고, $\begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{bmatrix}$는 Λ_2에 대응하는 것으로 한다. 그러면 다음 관계가 성립한다.

$$\begin{bmatrix} rI & -M \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix}. \tag{4-30}$$

그리고 이를 풀어쓰면 다음과 같다.

$$\begin{cases} rV_{11} - MV_{21} = V_{11}\Lambda_1, \quad rV_{12} - MV_{22} = V_{12}\Lambda_2 \\ \qquad V_{11} = V_{21}\Lambda_1, \qquad\qquad V_{12} = V_{22}\Lambda_2 \end{cases} \tag{4-31}$$

이를 정리하면

$$rV_{21}\Lambda_1 - MV_{21} = V_{21}\Lambda_1^2, \quad rV_{22}\Lambda_2 - MV_{22} = V_{22}\Lambda_2^2 \tag{4-32}$$

이 되는데, 여기에 式(4-26)의 관계를 代入하면

$$\begin{cases} rV_{21}\Lambda_1 - MV_{21} = V_{21}(r\Lambda_1 - M) = rV_{21}\Lambda_1 - V_{21}M \\ rV_{22}\Lambda_2 - MV_{22} = V_{22}(r\Lambda_2 - M) = rV_{22}\Lambda_2 - V_{22}M \end{cases} \tag{4-33}$$

이 된다. 따라서

$$\begin{cases} MV_{21}=V_{21}M \\ MV_{22}=V_{22}M \end{cases}$$

이 성립하여야 한다. 이것은 V_{21}과 V_{22}가 對稱이면 가능하다. 이것이 固有벡터로 이루어지는 行列 V에 관한 制約이라고 볼 수 있다. 그리고 固有벡터는 어차피 唯一하게 정해지는 것이 아니므로 이 제약을 만족시키는 하나의 V를 구하려면 가장 간단하게는 V_{21}과 V_{22}가 모두 單位行列이라고 가정해도 무방하다. 즉

$$\begin{cases} V_{21}=I \\ V_{22}=I \end{cases} \tag{4-34}$$

이 가정하에서 式 (4-31)의 관계를 이용하면

$$\begin{cases} V_{11}=\Lambda_2 \\ V_{12}=\Lambda_2 \end{cases} \tag{4-35}$$

가 되며 따라서 V는 다음과 같이 된다.

$$V=\begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ I & I \end{bmatrix}. \tag{4-36}$$

이것이 行列 (4-21) 즉

$$\begin{bmatrix} rI & -M \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

의 고유벡터行列이다. 따라서 우리는 다음 관계식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} rI & -M \\ I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ I & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ I & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \tag{4-37}$$

그런데 行列 (4-21)과 (4-15)는 相似行列로서

$$\begin{bmatrix} rI & -M \\ I & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} rI & -C^{-1}A \\ I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \tag{4-38}$$

임을 이미 알고 있다. 이들을 結合하면,

$$\begin{bmatrix} rI & -C^{-1}A \\ I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ I & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ I & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \tag{4-39}$$

가 된다. 이를 整理해 쓰면,

$$\begin{bmatrix} rI & -C^{-1}A \\ I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T\Lambda_1 & T\Lambda_2 \\ T & T \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} T\Lambda_1 & T\Lambda_2 \\ T & T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \tag{4-40}$$

가 되는데

$$\begin{bmatrix} T\Lambda_1 & T\Lambda_2 \\ T & T \end{bmatrix} \tag{4-41}$$

가 우리의 미분방정식체계 (4-14)의 係數行列

$$\begin{bmatrix} rI & -C^{-1}A \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

의 固有벡터들의 行列이 됨을 나타내 주고 있다. 그러므로 이 미분방정식체계의 一般解는

$$\begin{bmatrix} Z \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T\Lambda_1 & T\Lambda_2 \\ T & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\Lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\Lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \tag{4-42}$$

로 쓸 수 있다. 단 $e^{\Lambda_i t}$는 $e^{\lambda_{i} t}$, $i=1, 2, \cdots\cdots n$을 대각원소로 하는 $n \times n$ 對角行列이며 k_1과 k_2는 각각 n차원의 임의상수벡터들이다. 그리고 Λ_2의 대각원소들은 0보다 크다고 하였으므로 이 解가 安定的이려면 k_2는 0 벡터여야 한다. 따라서 安定解는

$$Z(t) = T\Lambda_1 e^{\Lambda_1 t} k_1 .$$

$$X(t) = T e^{\Lambda_1 t} k_1 . \tag{4-43}$$

여기서 우리가 관심을 가지는 것은 $X(t)$이며 $Z(t)$는 $Z(t) = \dot{X}(t)$를 만족하고 있음을 확인하는 것으로 足하다. 그러므로 以下에서는 $X(t)$에만 관심을 가진다. 式(4-43)에서 임의상수벡터 k_1은 $X(0) = X_0$라는 초기조건으로 표현할 수 있다. 즉

$$k_1 = T^{-1} X_0 \tag{4-44}$$

로 쓸 수 있다. 그러므로 最終解는,

$$X(t) = T e^{\Lambda_1 t} T^{-1} X_0. \tag{4-45}$$

그리고

$$X(t) = x(t) - x^*, \quad X_0 = x_0 - x^*$$

임을 고려하면 $x(t)$로 표현된 解는

$$x(t) = x^* + T e^{\Lambda_1 t} T^{-1} (x_0 - x^*) \tag{4-46}$$

가 되며 이를 時間에 대해서 미분하면

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= T\Lambda_1 e^{\Lambda_1 t} T^{-1} (x_0 - x^*) \\ &= T\Lambda_1 (T^{-1} T) e^{\Lambda_1 t} T^{-1} (x_0 - x^*) \\ &= T\Lambda_1 T^{-1} (x(t) - x^*). \end{aligned} \tag{4-47}$$

즉

$$\dot{x}(t) = B(x^* - x(t)). \tag{4-48}$$

단

$$B = -T\Lambda_1 T^{-1} \tag{4-49}$$

이다.

式(4-48)은 一般伸縮的 加速度模型이며, 이 模型의 性質은 行列 B에 전적으로 달려 있다. 루카스[6, p. 84]는 行列 B가 비특이행렬이며 일반적으로 비대칭행렬로서, 대각원소는 陽이며, 비대각원소들은 符號에 있어서는 對稱이고 陽의 固有値들을 갖는다고 말하고 있다. 行列 B의 定義式(4-49)에서 볼 때, B는 $-\Lambda_1$의 相似行列이고 $-\Lambda_1$은 陽의 대각원소들로 된 對角行列이므로 이 대각원소들은 B의 고유치들이 된다. 그리고 T는 그에 대응하는 고유벡터들의 행렬이다. 그런데 行列 T는 式(4-19)에 의해서 $D^{-1}P'$으로 정의되는데, D는 陽의 대각원소들로 된 대각행렬이며, P는 한 直交行列이었다. 그러므로 B는

$$B = D^{-1}P'(-\Lambda_1)PD \tag{4-50}$$

로 쓸 수 있고, 루카스가 지적한 모든 성질들을 가지고 있음을 쉽게 확인할 수 있다. 그런데 그 性質들은 陽定符號行列의 性質과 매우 흡사함을 또한 알 수 있다.

一般伸縮的 加速度模型(4-48)의 係數行列 B가 對稱인 陽定符號行列과 매우 흡사한 性質을 가진다는 사실로부터 우리는 이 模型에 약간의 變化를 가함으로써 그 係數行列로 하여금 완전한 陽定符號行列이 되도록 할 수 없을까 하는 생각을 해보게 된다. 그리고 이 생각은 다음과 같은 방법에 의해서 實現될 수 있음을 알 수 있다. 그리고 그 實現은 陽定符號行列이 갖는 많은 매력적인 性質에 비추어 볼 때 확실히 의미 있는 일이라고 말할 수 있다.

우리는 여기서 投入生產要素의 測定單位를 일정한 방법으로 變更시킴으로써 係數行列 B가 (對稱인) 陽定符號行列이 되게 할 수 있음을 보이고자 한다. 이 單位變更은

$$\begin{cases} y(t) = Dx(t) \\ y^* = Dx^* \end{cases} \tag{4-51}$$

를 의미한다. 여기서 D는 식(4-16)으로 정의한 대각행렬로서, 그 대각원소의 값은 調整費用函數(4-2)의 정의에서 알 수 있는 바와 같이, 限界調整費用의 變化率의 平方根이다. 이 單位變更은 다음 사실을 의미한다.

$$\begin{cases} x(t) = D^{-1}y(t) \\ \dot{x}(t) = D^{-1}\dot{y}(t) \\ x^* = D^{-1}y^* \end{cases} \tag{4-52}$$

이 관계를 式(4-48)에 대입하여 정리하면,

$$\dot{y}(t) = DBD^{-1}(y^* - y(t)) \tag{4-53}$$

가 되며, 여기에 식(4-50)을 代入하면,

$$\dot{y}(t)=P'(-\Lambda_1)P(y^*-y(t))=\bar{B}(y^*-y(t)) \tag{4-54}$$

가 얻어진다. 단

$$\bar{B}=P'(-\Lambda_1)P=DBD^{-1} \tag{4-55}$$

이다. 여기서 $-\Lambda_1$은 陽定符號對角行列이고, P는 直交行列로서 非特異行列이므로, $\bar{B}$는 陽定符號行列이다.

위의 結果로부터 몇가지 重要한 經濟的 함축의미를 찾아낼 수 있다. 첫째로 B의 대각원소가 모두 陽이라는 것은 어떤 生產要素에 초과수요가 발생하면 그 生產要素의 投入量은 增加한다는 것을 의미한다. 둘째 行列 B가 일반적으로 對稱行列이 아니라는 것은 한 生產要素의 投入의 調整速度가 그 生產要素의 초과수요상태에 따라서만 변하는 것이 아니라 다른 모든 생산요소의 초과수요상태에 의존함을 의미한다.

만일 B가 對稱行列이라면 다른 生產要素의 초과수요상태와는 무관하게 조정속도가 결정될 것이다. 그런데 式(4-20)에서

$$C^{-1}A=TMT^{-1}$$

를 얻고, 또 式(4-32)와 (4-34)에서

$$M=r\Lambda_1-\Lambda_1^2$$

을 얻게 되는데 이 둘을 결합하고 式(4-49)의 B의 定義를 감안하면

$$C^{-1}A=TMT^{-1}=rT\Lambda_1T^{-1}-T\Lambda_1^2T^{-1}=-rB-B^2 \tag{4-56}$$

이라는 관계식이 도출된다. 이 式에서 C는 대각행렬이므로, B가 대각행렬이 되는 필요충분조건은 A가 대각행렬이 되는 것이다. 이것이 세번째의 중요한 함축의미이다.

이것은 直觀的으로도 납득이 된다고 볼 수 있다. 즉, 만일 A가 대각행렬이라면 生產要素간에 補完關係도 代替關係도 存在하지 않게 된다. 그러므로 한 生產要素의 초과수요가 다른 生產要素의 投入의 調整速度에 영향을 미치지 않게 된다. 그리고 그 逆도 成立한다.

네번째 함축의미는 行列 B의 비대각원소들이 符號對稱이 된다는 사실로부터 導出된다. 이것은 예컨대 資本에 대한 초과수요가 勞動投入의 調整速度를 증가시킨다면, 勞動에 대한 초과수요는 資本投入의 調整速度를 증가시킨다는 것을 의미한다.

그러나 만일 자본은 투자의 한계조정비용이 크게 증가하지 않고, 노동은 추가투입의 한계조정비용이 크다고 하면, 자본에 대한 초과수요가 노동투입의 조정속도를 증가시킨다 할지라도 그 증가는 그리 크지 않을 것이다. 반대로 勞動에 대한 초과수요는 資本投入의 조정속도를 크게 증가시킬 것이다. 그러므로 投入의 測定單位를 변경하여 $\bar{B}$가 對稱行列이 되

게할 수 있던 것은 調整費用의 증가가 큰 生產要素는 크게 評價하고 증가가 작은 生產要素는 작게 評價함으로써 달성될 수 있음을 이해하게 되는 것이다. 이것이 다섯번째의 함축의 미이다.

여섯번째 함축의미는 生產要素의 수요함수의 形態와 관련된 것이다. 定常解(4-9) 즉

$$x^{*}=A^{-1}q-A^{-1}b$$

를 우리가 導出한 伸縮的 加速度模型(4-48)에 代入하면,

$$\dot{x}(t)=BA^{-1}q-BA^{-1}b-Bx(t) \tag{4-57}$$

을 얻는다. 여기서 需要價格벡터 q의 係數行列 BA^{-1}의 性質을 알아보자. 式(4-49) 및 $T=D^{-1}P'$을 감안하면

$$B=-T\Lambda_1T^{-1}=-D^{-1}P'\Lambda_1PD$$

이고 또 식(4-20)에서

$$A=CTMT^{-1}=D^2TMT^{-1}=D^2D^{-1}P'MPD=DP'MPD$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}BA^{-1}&=(-D^{-1}P'\Lambda_1PD)(D^{-1}P'M^{-1}PD^{-1})=-D^{-1}P'\Lambda_1M^{-1}PD^{-1}\\&=(PD^{-1})'(-\Lambda_1M^{-1})(PD^{-1})\end{aligned} \tag{4-58}$$

가 된다. 왜냐하면 P는 直交行列이기 때문이다. 그런데 Λ_1과 M^{-1}은 모두 對角元素들이 陰인 대각행렬이기 때문에 $-\Lambda_1M^{-1}$은 陰定符號(對角)行列이고 따라서 BA^{-1}도 陰定符號行列이다. 이것은 BA^{-1}의 對角元素들도 陰인 것을 의미하며, 예컨데 한 要素價格이 上昇하면 그 生產要素에 대한 需要는 減少함을 보여주고 있다.

V. 伸縮的 加速度模型 IV: n生產要素, 離散時間

슈람〔9〕은 n生產要素, 離散時間의 경우에 生產要素의 最適調整過程을 定式化하였다. 그러나 그는 이를 엄밀하게 다루지 않고 있다. 여기서는 前節의 連續時間의 경우와 같이 離散時間의 경우를 엄밀히 다루어 보고자 한다.

먼저 n生產要素의 投入의 벡터는

$$x_t=[x_{1t},\ x_{2t},\cdots\cdots,x_{nt}]'$$

그리고 그 差分의 벡터는

$$\Delta x_t=[\Delta x_{1t},\ \Delta x_{2t},\cdots\cdots,\ \Delta x_{nt}]'=x_{t+1}-x_t$$

로 정의한다. 단

$$\varDelta x_{it}=x_{i,t+1}-x_{it}$$

이다.

生産函數는

$$F(x_t)=\frac{1}{2}x_t{}'Ax_t+b'x_t,\ A:n\times n \text{ 陰定符號行列} \tag{5-1}$$

調定費用函數는

$$G(\varDelta x_t)=\frac{1}{2}(\varDelta x_t)'C(\varDelta x_t),\ C:n\times n \text{ 陽定符號對角行列} \tag{5-2}$$

로 가정한다. 그리고 企業은 初期投入벡터 x_0가 주어진 조건하에서 목적함수

$$v=\sum_{t=1}^{T}(1+r)^{-t}g_t \tag{5-3}$$

를 極大化한다고 가정한다. 단 g_t는 t期의 利潤을 나타낸다. 즉

$$\begin{aligned} g_t&=F(x_t)-q'x_t-G(\varDelta x_t)\\ &=\frac{1}{2}x_t{}'Ax_t+b'x_t-q'x_t-\frac{1}{2}(\varDelta x_t)'C(\varDelta x_t) \end{aligned} \tag{5-4}$$

이다.

v의 極大化의 1階條件은 v의 모든 x_t에 관한 도함수를 0벡터로 하는 것이다. 즉

$$\frac{\partial v}{\partial x_t}=(1+r)^{-t}\frac{\partial g_t}{\partial x_t}+(1+r)^{-t+1}\frac{\partial g_{t-1}}{\partial x_t}=0, \qquad t=1,2,\cdots\cdots,T. \tag{5-5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_{T+1}}=-(1+r)^{-T}C(\varDelta x_T)=0. \tag{5-6}$$

그런데

$$\frac{\partial g_t}{\partial x_t}=Ax_t+b-q+C(x_{t+1}-x_t), \qquad t=1,2,\cdots\cdots,T$$

$$\frac{\partial g_{t-1}}{\partial x_t}=-C(x_t-x_{t-1}), \qquad t=1,2,\cdots\cdots,T$$

이므로 式(5-5)의 조건은 $Ax_t+b-q+C(x_{t+1}-x_t)-(1+r)C(x_t-x_{t-1})=0,\ t=1,2,\cdots\cdots,T$로 되며 이를 整理하면

$$Cx_{t+2}+(A-2C-rC)x_{t+1}+(1+r)\ Cx_t+(b-q)=0,\ \ t=0,1,\cdots\cdots,T-1 \tag{5-7}$$

이 된다. 한편 式(5-6)의 조건은

$$(1+r)^{-T}C(x_{T+1}-x_T)=0 \tag{5-8}$$

로 되므로, $T\to\infty$이거나 $x_{T+1}=x_T$일 때 충족된다.

v의 極大化를 위한 2階條件은 $n(T+1)$階의 헤시안行列

$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x_s\partial x_t{}'}\right],\ \ s,t=1,\cdots\cdots,T+1 \tag{5-9}$$

이 陰定符號行列이 되는 것이다. 이것은 특히 그 部分行列인 n階의 行列들

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_t\partial x_t{}'}=(1+r)^{-t}(A-2C-rC), \qquad t=1,2,\cdots\cdots,T$$

가 陰定符號行列이 되는 것을 의미하는데, 이는 A와 C에 관한 앞의 가정에 의해서 충족된다. 또 行列 (5-9)가 陰定符號行列이라는 것은 그 部分行列인 n階의 行列

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_{T+1}\partial x_{T+1}'}=-(1+r)^{-T}C$$

가 陰定符號行列임을 의미하는데 이 역시 行列 C에 관한 가정에 의해서 충족된다.

式(5-7)로 주어지는 條件은 2階線形差分方程式이다. 그 定常解 x^*는

$$x_{t+2}=x_{t+1}=x_t=x^*$$

로 놓아서 구할 수 있다. 즉

$$\{C+A-2C-rC+C+rC\}x^*+b-q=0$$

에서

$$x^*=-A^{-1}(b-q). \tag{5-10}$$

이것이 式 (5-7)의 定常解이다. 一般解를 구하기 위하여, x_t의 x^*로부터의 偏差벡터를 X_t라 하자. 즉

$$X_t=x_t-x^*. \tag{5-11}$$

이를 써서 式 (5-7)을 고쳐쓰면

$$CX_{t+2}+(A-2C-rC)X_{t+1}+(1+r)CX_t=0, \quad t=0,1,\cdots\cdots,T-1 \tag{5-12}$$

이 된다. 여기서 또

$$Z_t=X_{t+1} \tag{5-13}$$

로 정의되는 변수벡터 Z_t를 도입하여 이 差分方程式體系를 고쳐쓰면 다음과 같은 $2n$개로 이루어진 1階差分方程式體系가 된다.

$$\begin{cases} CZ_{t+1}+(A-2C-rC)Z_t+(1+r)CX_t=0 \\ X_{t+1}-Z_t=0 \end{cases}$$

이를 고쳐쓰면

$$\begin{bmatrix} Z_{t+2} \\ X_{t+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (2+r)I-C^{-1}A & -(1+r)I \\ I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_t \\ X_t \end{bmatrix} \tag{5-14}$$

가 된다. 이 방정식체계의 解를 구하기 위해서는 係數行列

$$\begin{bmatrix} (2+r)I-C^{-1}A & -(1+r)I \\ I & 0 \end{bmatrix} \tag{5-15}$$

의 固有値와 固有벡터들을 구하여야 한다.

슈람[9]은 이 문제를 다루고 있지 않다. 그러나 우리는 이 문제도 前節에서와 유사한 방법으로 해결하고, 그 結果의 經濟的 意味를 찾아낼 수 있다.

먼저 行列 (5-15)를 구성하고 있는 $C^{-1}A$와 相似인 對角行列을 구하고자 한다.

$$D^2=C \tag{5-16}$$

를 만족하는 陽對角行列 D를 定義하면, $D^{-1}AD^{-1}$는 陰定符號行列이며 따라서 直交行列 P가 존재하여

$$PD^{-1}AD^{-1}P'=M \tag{5-17}$$

을 만족하면서 M은 對角元素가 모두 陰인 對角行列이 되게 할 수 있다. 그런데

$$M=PD^{-1}AD^{-1}P'=PD(D^{-2}A)D^{-1}P'=T^{-1}C^{-1}AT \tag{5-18}$$

이므로 M은 $C^{-1}A$와 相似行列이다. 단

$$T=D^{-1}P' \tag{5-19}$$

로 정의된다. 그리고 行列

$$\begin{bmatrix} (2+r)I-M & -(1+r)I \\ I & 0 \end{bmatrix} \tag{5-20}$$

는 係數行列 (5-15)와 相似라는 것을 알 수 있다. 왜냐하면

$$\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (2+r)I-C^{-1}A & -(1+r)I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2+r)I-M & -(1+r)I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

이기 때문이다. 두 相似行列의 固有值들은 서로 같기 때문에 변환된 行列의 固有值를 구하기 위하여 特性方程式을 만들면

$$\begin{vmatrix} (\lambda-2-r)I+M & (1+r)I \\ -I & \lambda I \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}\{\lambda(\lambda-2-r+m_i)+(1+r)\}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\{\lambda^2-(2+r-m_i)\lambda+(1+r)\}=0. \tag{5-21}$$

단 m_i는 대각행렬 M의 i번째 對角元素로서 모두 陰數이다. 이 특성방정식에서 알 수 있는 바와 같이 各各의 m_i에는 두개씩의 固有值가 대응한다. 그리고 그 두 固有值는

$$\lambda_{i1}, \lambda_{i2}=\frac{(2+r-m_i)\pm\sqrt{(2+r-m_i)^2-4(1+r)}}{2}$$

$$=1+\frac{(r-m_i)\pm\sqrt{(r-m_i)^2-4m_i}}{2}, \quad i=1, 2, \cdots\cdots, n \tag{5-22}$$

이다. 여기서 根號 안은 陽數이므로 實限을 가진다. 그리고

$$(2+r-m_i)>\sqrt{(2+r-m_i)^2-4(1+r)}$$

이므로 두 根은 모두 陽이다. 또

$$(r-m_i)<\sqrt{(r-m_i)^2-4m_i}$$

이므로, 두 根중 하나는 1보다 작고 또 하나는 1보다 크다. 따라서

$$0<\lambda_{i1}<1,\ \lambda_{i2}>1,\ i=1,2,\cdots\cdots,n \tag{5-23}$$

이라고 놓을 수 있다. 그리하여

$$\begin{cases}\lambda_{i1}^2-(2+r-m_i)\lambda_{i1}+(1+r)=0, & i=1,2,\cdots\cdots,n\\ \lambda_{i2}^2-(2+r-m_i)\lambda_{i2}+(1+r)=0, & i=1,2,\cdots\cdots,n\end{cases}$$

이 성립하게 되며, 이를 行列을 써서 표현하면

$$\begin{cases}\Lambda_1^2-(2I+rI-M)\Lambda_1+(1+r)I=0\\ \Lambda_2^2-(2I+rI-M)\Lambda_2+(1+r)I=0\end{cases} \tag{5-24}$$

가 된다. 단

$$\Lambda_1=\begin{bmatrix}\lambda_{11} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n1}\end{bmatrix},\quad \Lambda_2=\begin{bmatrix}\lambda_{12} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n2}\end{bmatrix} \tag{5-25}$$

이다.

다음은 行列 (5-20)의 固有벡터들을 구해보자. 이 고유벡터들로 이루어진 $2n$階의 正方行列을 V라 하고 이를 다음과 같이 分割하자.

$$V=\begin{bmatrix}V_{11} & V_{12}\\ V_{21} & V_{22}\end{bmatrix}. \tag{5-26}$$

여기서 $\begin{bmatrix}V_{11}\\ V_{21}\end{bmatrix}$은 Λ_1에 대응하고, $\begin{bmatrix}V_{12}\\ V_{22}\end{bmatrix}$는 Λ_2에 대응하는 것으로 한다. 그러면 行列의 고유치와 고유벡터간의 일반적 관계로부터 다음 式이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix}(2+r)I-M & -(1+r)I\\ I & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{11} & V_{12}\\ V_{21} & V_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V_{11} & V_{12}\\ V_{21} & V_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Lambda_1 & 0\\ 0 & \Lambda_2\end{bmatrix}.$$

이를 풀어쓰면

$$\begin{cases}(2I+rI-M)V_{11}-(1+r)IV_{21}=V_{11}\Lambda_1, & (2I+rI-M)V_{12}-(1+r)IV_{22}=V_{12}\Lambda_2\\ V_{11}=V_{21}\Lambda_1, & V_{12}=V_{22}\Lambda_2\end{cases} \tag{5-27}$$

따라서

$$\begin{cases}(2I+rI-M)V_{21}\Lambda_1-(1+r)IV_{21}=V_{21}\Lambda_1^2\\ (2I+rI-M)V_{22}\Lambda_2-(1+r)IV_{22}=V_{22}\Lambda_2^2\end{cases} \tag{5-28}$$

이를 式 (5-24)와 결합하면

$$\begin{cases}(2I+rI-M)V_{21}=V_{21}(2I+rI-M)\\ (2I+rI-M)V_{22}=V_{22}(2I+rI-M)\end{cases} \tag{5-29}$$

그런데 이 식에서 괄호 내의 行列은 對角行列이므로 V_{21}과 V_{22}는 對稱行列이어야만 이 식이 성립한다. 그러므로 이것은 고유벡터行列 V에 대한 制約이 되는 셈이다. 그런데 固有

베터行列은 일의적으로 결정되는 것이 아니므로 V_{21}과 V_{22}에 관해서 이 제약을 만족하는 가장 간단한 형태의 행렬인 단위행렬을 가정하고 작업을 진행시킬 수 있다. 즉 우리는 다음과 같이 가정한다.

$$V_{21}=I,\quad V_{22}=I. \tag{5-30}$$

이를 式 (5-27)에 대입하면

$$V_{11}=\Lambda_1,\quad V_{12}=\Lambda_2. \tag{5-31}$$

따라서

$$V=\begin{bmatrix}\Lambda_1 & \Lambda_2\\ I & I\end{bmatrix}. \tag{5-32}$$

또 固有벡터와 固有値간의 관계에서

$$\begin{bmatrix}(2+r)I-M & -(1+r)I\\ I & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Lambda_1 & \Lambda_2\\ I & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Lambda_1 & \Lambda_2\\ I & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Lambda_1 & 0\\ 0 & \Lambda_2\end{bmatrix}$$

가 성립한다. 원래의 係數行列의 固有벡터들을 구하기 위하여서는 相似關係

$$\begin{bmatrix}(2+r)I-M & -(1+r)I\\ I & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T & 0\\ 0 & T\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}(2+r)I-C^{-1}A & -(1+r)I\\ I & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T & 0\\ 0 & T\end{bmatrix}$$

를 윗식에 代入하여

$$\begin{bmatrix}(2+r)I-C^{-1}A & -(1+r)I\\ I & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T & 0\\ 0 & T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Lambda_1 & \Lambda_2\\ I & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T & 0\\ 0 & T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Lambda_1 & \Lambda_2\\ I & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Lambda_1 & 0\\ 0 & \Lambda_2\end{bmatrix}$$

를 얻는데, 이를 고쳐쓰면,

$$\begin{bmatrix}(2+r)I-C^{-1}A & -(1+r)I\\ I & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T\Lambda_1 & T\Lambda_2\\ T & T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T\Lambda_1 & T\Lambda_2\\ T & T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Lambda_1 & 0\\ 0 & \Lambda_2\end{bmatrix} \tag{5-33}$$

가 되어, 이 式으로부터 우리가 구하는 固有벡터들의 行列은

$$\begin{bmatrix}T\Lambda_1 & T\Lambda_2\\ T & T\end{bmatrix} \tag{5-34}$$

임을 알 수 있다.

이 結果를 이용하면, 우리가 구하는 差分方程式 (5-14)의 一般解는

$$\begin{bmatrix}Z_t\\ X_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T\Lambda_1 & T\Lambda_2\\ T & T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Lambda_1{}^t & 0\\ 0 & \Lambda_2{}^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\end{bmatrix} \tag{5-35}$$

로 쓸 수 있다. 단 k_1과 k_2는 임의의 상수의 n차원 벡터이다. 그런데 Λ_2의 대각원소들은 1보다 크므로 安定解를 얻기 위해서는 $k_2=0$이어야 한다. 또 初期條件을 이용하면

$$X_0 = Tk_1$$

의 관계를 얻고, 여기서 k_1은

$$k_1 = T^{-1}X_0 \tag{5-36}$$

가 되고 따라서 最終解는

$$\begin{bmatrix} Z_t \\ X_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TA_1^{t+1}T^{-1}X_0 \\ TA_1^{t}T^{-1}X_0 \end{bmatrix} \tag{5-37}$$

이다. 그런데 여기서 $Z_t = X_{t+1}$임을 확인하고 나면 Z_t에는 관심을 가질 필요가 없다. 그리하여 앞으로는 X_t에만 관심을 기울이면 된다.

最終解

$$X_t = TA_1^{t}T^{-1}X_0 \tag{5-38}$$

를 定常解로부터의 편차로 쓰지 말고 원래의 변수로 표현하면

$$x_t = x^* + TA_1^{t}T^{-1}(x_0 - x^*) \tag{5-39}$$

가 되며, 이를 差分形態로 變形하면

$$\begin{aligned} \varDelta x_t = x_{t+1} - x_t &= TA_1^{t+1}T^{-1}(x_0 - x^*) - TA_1^{t}T^{-1}(x_0 - x^*) \\ &= T(A_1 - I)T^{-1}(x_t - x^*) \\ &= T(I - A_1)T^{-1}(x^* - x_t). \end{aligned}$$

즉

$$\varDelta x_t = B(x^* - x_t). \tag{5-40}$$

단

$$B = T(I - A_1)T^{-1} \tag{5-41}$$

이다. 式 (5-40)은 n개의 변수로 일반화된 伸縮的 加速度模型을 나타낸다.

이 模型의 性質은 行列 B에 의해서 完全히 規定된다. 그리고 여기에서의 B도 前節의 連續時間의 경우의 B와 비슷한 性質을 가진다. 行列 B를 規定하는 式 (5-41)에서, 行列 $(I - A_1)$은 對角元素가 0과 1 사이의 값을 갖는 對角行列이며, 이 對角元素들은 B의 固有値들이 된다. 따라서 B는 非特異行列이다. 또 行列 T와 T^{-1}가 각각 $(I - A_1)$의 양편에 곱해져 있기 때문에, B는 일반적으로 非對稱이기는 하나 符號에 있어서는 對稱이다. 그러므로 B는 거의 對稱인 陽定符號行列의 性質을 다 가지고 있는데 이 경우에 있어서도 前節에서와 마찬가지로 生產要素의 測定單位를 바꾸어주는 變換을 함으로써 그 行列이 對稱인 陽定符號行列이 되게 할 수 있다. 즉

$$y_t = Dx_t \quad , \quad y^* = Dx_t^* \tag{5-42}$$

가 되는 變換을 해 주면,

$$\varDelta x_t = D^{-1}(\varDelta y_t) \quad , \qquad x^* - x_t = D^{-1}(y^* - y_t) \tag{5-43}$$

가 된다. 이를 式 (5-40)에 代入하여 정리하면,

$$\begin{aligned}\varDelta y_t &= DBD^{-1}(y^* - y_t) = D\{T(I - \varLambda_1)T^{-1}\}D^{-1}(y^* - y_t) \\ &= D\{D^{-1}P'(I - \varLambda_1)PD\}D^{-1}(y^* - y_t) = P'(I - \varLambda_1)P(y^* - y_t)\end{aligned} \tag{5-44}$$

즉

$$\varDelta y_t = \bar{B}(y^* - y_t) \tag{5-45}$$

가 된다. 단

$$\bar{B} = P'(I - \varLambda_1)P \tag{5-46}$$

이다. 式 (5-42)에 의한 變換은 生產要素의 投入에 따른 調整費用의 크기에 따라 各生產要素의 測定單位를 바꾸어 주는 效果를 가진다. 이와 같이 變換된 變數로 이루어지는 伸縮的 加速度模型이 式 (5-45)이다. 그리고 이 模型의 係數行列 $\bar{B}$는 式 (5-46)의 定義에서 알 수 있는 바와 같이 對稱行列이며 陽定符號行列이다.

이 模型이 갖는 經濟的 함축의미도 前節의 경우와 大同小異하다.

첫째로 B 또는 $\bar{B}$는 대각원소의 값이 모두 0과 1 사이의 수이기 때문에 生產要素에 대한 초과수요가 발생하면 그 일부분이 그 다음 期에 그 생산요소의 投入의 증가를 나타난다. 둘째 B 또는 $\bar{B}$가 對角行列이 아니기 때문에 일반적으로 한 生產要素에 대한 초과수요는 모든 生產要素의 投入을 變化시킬 수 있다. 또 이 節에서도 (5-18)에서

$$C^{-1}A = TMT^{-1}$$

과 式 (5-27) 및 (5-30), (5-31)에서

$$M = (1+r)(I - \varLambda_1^{-1}) + (I - \varLambda_1)$$

를 얻고 이들을 결합하는 동시에 (5-4)를 감안하면,

$$C^{-1}A = (1+r)\{I - (I - B)^{-1}\} + B \tag{5-47}$$

를 얻는다. 여기서 C^{-1}는 대칭행렬이므로 B가 대칭인 필요충분조건은 A가 대칭행렬인 것이다. 이것이 가지는 경제적 의미는 前節에서 설명한 바와 같다. 또 B가 부호대칭이 된다든지, $\bar{B}$가 대칭이 되는 것의 경제적 함축의미도 前節에서와 같다.

끝으로 生產要素의 價格變化가 定常解를 변화시켜 要素投入의 變化를 야기하는 과정은

$$\varDelta x_t = BA^{-1}q - BA^{-1}b - Bx_t \tag{5-48}$$

에서, BA^{-1}의 성질에 따라 결정된다. 그런데 BA^{-1}는 前節에서의 式 (4-58)과 유사한 과정을 거쳐서,

$$BA^{-1}=(PD^{-1})'\{(I-\Lambda_1)M^{-1}\}(PD^{-1}) \tag{5-49}$$

로 표현된다. 여기서 { }는 陰定符號對角行列이기 때문에, BA^{-1}도 역시 陰定符號行列이 된다. 따라서 이때에도 한 生產要素의 價格上昇은 그 生產要素의 投入을 감소시키는 行動을 하게 함을 보여주고 있다.

VI. 나디리—로젠의 生產要素에 대한 需要模型

나디리와 로젠은 1969년의 論文[7]과 1974년의 單行本[8]에서 相互聯關된 生產要素에 대한 需要를 前節에서 설명한 伸縮的 加速度模型을 써서 實證的으로 分析하고 있다. 1974年의 單行本에서 그들은 生產要素의 종류가 6개인 경우 즉 $n=6$인 경우를 다루고 있다. 그들은 目標投入水準벡터 x^*를 規定함에 있어서 產出水準이 일정할때의 費用最小化問題의 解에 의해서 정해진다고 보고 長期需要函數를 다음과 같이 想定하였다.

$$x_L=\gamma_1+\gamma_2 Q+\gamma_3 q. \tag{6-1}$$

여기서 Q는 산출수준이며, q는 생산요소의 상대가격(스칼라)이며, γ_i는 6×1係數벡터들이다.

이 式은 所望投入水準을 規定하는 데 使用할 수 있다. 그러나 動態的인 상황에서 所望投入水準이 일정하다는 가정은 不適當하므로, 그들은 外部의 충격에 따라 所望投入水準이라는 目標가 변해가는 것을 상정하였다. 그리하여 그들은 Q 대신 판매액 S_t를 사용하고, q대신에 자본가격에 대한 임금의 상대가격 w_t를 사용하였다. 또 추세도 目標에 영향을 주는 것으로 보아 時間變數 t도 도입하였다. 그리하여 시간에 따라 변하는 所望投入水準벡터는

$$x_t^*=\gamma_1+\gamma_2 S_t+\gamma_3 w_t+\gamma_4 t \tag{6-2}$$

로 規定되었다. 여기서 γ_i들은 6×1벡터이다. 이를 行列記號로 나타내면

$$x_t^*=\Gamma z_t \tag{6-3}$$

로 나타낼 수 있다. 단

$$\begin{cases} \Gamma=[\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4] \\ z_t=[1\ S_t\ w_t\ t]' \end{cases} \tag{6-4}$$

이다.

이 결과를 前節의 伸縮的 加速度模型 (5-40)에 代入하면

$$\Delta x_{t-1}=B(x_t^*-x_{t-1}) \tag{6-5}$$

에서

$$x_t - x_{t-1} = B(\Gamma z_t - x_{t-1})$$

즉

$$x_t = B\Gamma z_t + (I-B)x_{t-1} \tag{6-6}$$

이것은 計量經濟學的으로 推定可能한 模型이다. 나디리와 로젠[8]은 미국의 1948年에서 1967년간의 제조업생산에 관한 4분기자료를 써서 이 모형을 추정해 주고 있다.

나디리와 로젠[7, 8]의 또 하나의 중요한 기여는 模型 (6-6) 자체에서 x_t의 動態的 性質을 나타내는 時差分布構造를 유도해 낸 것이라고 볼 수 있다. 이 점은 앨몬[1], 조겐슨과 스티븐슨[4] 등의 時差分布가 경제학적 배경없이 기계적으로 유도해 낸 것에 비하면 확실히 長點을 가진다고 말할 수 있을 것이다.

模型 (6-6)에서 z_t가 外生的으로 주어질 때 그에 따른 x_t의 변화는 式 (6-6)을 x_t에 관한 差分方程式體系라고 봄으로써 파악할 수 있다. 이때 그 定常解는 $x_t = x_{t-1}$로 놓음으로써 $x_t^* = \Gamma z_t$가 되며 x_t의 時間經路는 行列 $(I-B)$의 固有値와 固有벡터를 구함으로써 구할 수 있다. 그런데 B의 定義式 (5-41)로부터

$$I-B = I-T(I-\Lambda_1)T^{-1} = I-I+T\Lambda_1T^{-1}$$

즉

$$I-B = T\Lambda_1T^{-1} \tag{6-7}$$

가 된다. 따라서 Λ_1은 $(I-B)$의 고유치들을 對角元素로 하는 行列이 되며 T는 그 고유벡터들로 된 行列이다. 그러므로 式 (6-6)의 解는

$$x_t = x_t^* + Te^{\Lambda_1 t}k \tag{6-8}$$

이며 임의 상수 벡터는 x_0가 주어질때

$$k = T^{-1}(x_0 - x_t^*) \tag{6-9}$$

가 되므로 最終解는

$$x_t = x_t^* + Te^{\Lambda_1 t}T^{-1}(x_0 - x_t^*) \tag{6-10}$$

가 된다.

式 (6-10)으로써 x_t의 時間經路는 完全히 記述된다. 그러나 x_t^*의 外生的 變化가 x_t에 미치는 效果의 時差構造를 개별적으로 파악하는 데는 좀 다른 방법을 쓰는 것이 편리하다. 다음 성질을 가지는 時差作用素(lag operator) L을 도입하자.

$$Lx_t = x_{t-1} \tag{6-11}$$

그러면 模型 (6-6)은

$$\{I-(I-B)L\}x_t=B\Gamma z_t$$

로 쓸 수 있고 이를 다시 고쳐 보면

$$x_t=\{I-(I-B)L\}^{-1}B\Gamma z_t \tag{6-12}$$

가 된다. 行列 $(I-B)$의 고유치의 절대치는 모두 1보다 작으므로 이는 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$x_t=\{I+(I-B)L+(I-B)^2L^2+\cdots\cdots\}B\Gamma z_t. \tag{6-13}$$

이를 다시 쓰면

$$x_t=B\Gamma z_t+(I-B)B\Gamma z_{t-1}+(I-B)^2B\Gamma z_{t-2}+\cdots\cdots \tag{6-14}$$

式 (6-14)는 바로 時差構造를 나타내 주고 있다. 즉 行列 $(I-B)^s B\Gamma$의 (i,j)번째 元素는 z_{t-s}의 j번째 원소 1단위의 변화가 x_t의 i번째 원소에 미치는 時差分布效果를 나타낸다. 그리고 더 나아가서 이 時差分布構造는 行列 B와 Γ에만 의존하는데 이 두 行列은 모두 經濟的인 意味가 充分히 있는 行列들이다. 이처럼 經濟的 意味를 가진 行列들로부터 時差分布構造를 導出해낼 수 있다는 것은 확실히 模型 (6-6)의 長點이다. 나디리와 로젠은 이와 같은 방법으로 그들이 推定한 模型에서의 時差分布構造를 分析하고 있다.

式 (6-14)에서 z_t의 係數行列인 $B\Gamma$는 即時乘數(impact multiplier)를 나타내고 $(I-B)^s B\Gamma$는 s번째의 中間乘數(interim multiplier)를 나타낸다. 總乘數(total multiplier)는 이들을 모두 합한 것으로 정의하는데, 이는 z_t가 x_t에 미치는 長期的 總效果라고 할 수 있다. 總乘數는

$$B\Gamma+(I-B)B\Gamma+(I-B)^2B\Gamma+\cdots\cdots=\{I-(I-B)\}^{-1}B\Gamma=B^{-1}B\Gamma=\Gamma. \tag{6-15}$$

즉 行列 Γ가 總乘數가 된다. 즉 z_t의 x_t에 대한 效果分析은 行列 Γ에 의해서 할 수 있다.

VII. 나디리—로젠에 대한 批判

나디리와 로젠[7][8]이 伸縮的 加速度模型을 多數의 生產要素의 需要가 相互聯關的인 상황에서 實證的으로 分析한 것은 중요한 經濟學的 공헌이라고 볼 수 있다. 그리고 그들은 理論을 實證分析에 利用하는 데 따르는 여러가지 문제들을 그 나름의 방법으로 극복하면서 그들의 分析을 진행시켰다. 그러나 그들의 分析은 理論的으로도 實際的으로도 여러가지 문제를 가지고 있는 것 또한 사실이다.

첫째 그들은 伸縮的 加速度模型의 應用에만 관심을 가졌지 그 模型이 가지는 經濟的 함축내용 및 制約에 대해서 충분한 관심을 기울이지 않은 것으로 보인다. 伸縮的 加速度模

型에 관해서 그들은 本論文의 第4節 또는 第5節에서와 같은 엄밀한 理論的인 分析을 旣存文獻에서 찾을 수 없었을지 모른다. 그러나 그들은 그러한 分析을 스스로 하지도 않았다.

그들이 全製造業에 관한 資料에서 推定한 $(I-B)$行列은 다음과 같다〔8, Table 4.1〕.

$$(I-B)'=\begin{pmatrix} .4575 & .4447 & .1784 & -.0236 & .0053 & -.0649 \\ -.0992 & .8523 & -.0137 & -.0820 & -.0400 & .0462 \\ .0435 & .0168 & .9050 & -.0093 & .0114 & .0767 \\ -.2295 & -.5874 & -.2794 & .1953 & -.6623 & .9811 \\ .3139 & .5626 & -.1114 & -.0931 & .6244 & .3432 \\ .0352 & .0057 & -.0093 & .0408 & .0153 & .7133 \end{pmatrix} \qquad (7-1)$$

第5節에서의 理論에 의하면 行列 B는 1보다 작은 陽의 대각원소를 가져야 하며, 비대각원소들은 符號에 있어서 대칭이어야 한다. 따라서 $(I-B)$도 1보다 작은 대각원소를 가지고 비대각원소들은 符號對稱이 되어야 한다. 그런데 위에 제시된 推定結果를 보면 對角元素들의 값은 理論에서 제시하는 내용을 충족시키고 있으나, 비대각원소들은 그렇지 않다. 즉 비대각원소는 15대칭쌍 중 9쌍의 부호는 같으나 6쌍의 부호는 서로 반대가 되어 이론과 일치하지 않는다. 그들은 사전에 어떤 制約을 주고 추정하는 것이 模型에 완전히 오류가 없다는 것을 지나치게 전제하는 것이 되기 때문에 회피했다고 말하고 있다〔8, p.56〕. 그러나 추정결과가 이론과 이와 같이 차이가 날 때는 그점을 지적하거나 그 이유를 밝히려고 노력하여야 할 것이라고 생각되는데 그들은 어느 쪽도 시도하지 않고, 그들의 연구결과에 크게 만족하고 있는 듯하다.

理論에 의하면 行列 $(I-B)$의 固有値들은 行列 Λ_1의 對角元素들로서 0과 1사이의 實數値를 갖는다. 그런데 나디리와 로젠이 앞의 數字例에서 계산한 $(I-B)$의 固有値들은 다음과 같다. 0.9752, 0.8231, 0.8231, 0.5567, 0.5567, 0.0132(그들은 둘째 및 세째, 그리고 네째 및 다섯째의 고유치에서 허수부분을 생략하였다). 그들이 구한 고유치들은 그 절대치가 모두 0과 1사이에 들어있다. 그러나, 두 쌍의 複素根이 들어있다. 그러나 理論에 의하면 複素根은 있을 수 없다.

行列 $(I-B)$의 고유치들은 動態的 時差構造와 관련하여 더욱 중요한 의미를 갖는다. 式 (6-10) 즉

$$x_t = x_t^* + Te^{\Lambda_1 t}T^{-1}\ (x_0 - x_t^*)$$

에 의하면 $(I-B)$의 고유치들 즉 Λ_1의 대각원소들이 理論에서처럼 모두 0과 1 사이의 값을 가질 때, 이 模型은 安定的일뿐 아니라 x_0와 x_t^*에 괴리가 있을 때 진동없이 지속적으로 x_t가

x_t*에 접근하게 된다. 따라서 伸縮的 加速度模型의 時差構造에는 진동이 있을 수 없고 幾何時差分布와 유사한 움직임만 있을 뿐이다. 그러나 나디리와 로젠이 얻은 것처럼 $(I-B)$의 고유치 중에 복소근이 존재할 경우에는 式(6-10)은 진동을 나타내게 되며, 時差分布構造는 다양한 형태를 취하게 된다. 사실 나디리와 로젠은 時差分布構造가 鐘의 모양이 되는 경우가 많은 것으로 보고하고 있는데, 이는 앨몬[1], 조겐슨과 스티븐슨[4]의 결과와는 우연히 비슷한 것이 되었으나, 伸縮的 加速度模型의 함축의미와는 배치되는 결과이다.

外生變數가 內生變數에 미치는 長期的인 效果인 總乘數 Γ는 다음과 같이 推定된다. 즉 模型 (6-6)의 計量經濟學的 推定에서는 行列 $(I-B)$와 $B\Gamma$가 推定된다. 그들이 推定한 $(I-B)$는 (7-1)에 제시하였다. 그들이 추정한 $B\Gamma$는 다음과 같다[8, Table 4.1].

$$(B\Gamma)'=\begin{pmatrix} -.0004 & -.0010 & .0001 & -.0085 & .0012 & .0015 \\ .4394 & .1554 & -.0048 & 1.1000 & .0004 & .0531 \\ -.0177 & -.0058 & .0017 & -.0986 & --.0267 & -.0112 \end{pmatrix} \quad (7\text{-}2)$$

여기서 $\Gamma=\{I-(I-B)\}^{-1}B\Gamma$에 따라 구한 것이 다음과 같다[8, Table 4.4].

$$\Gamma'=\begin{pmatrix} .7301 & -.1302 & .2933 & 1.2000 & .1774 & .1595 \\ .1067 & .1005 & .0451 & -.5463 & .1634 & -.1393 \\ .0010 & .0064 & .0051 & -.0366 & .0175 & .0028 \end{pmatrix} \quad (7\text{-}3)$$

여기서 예컨대 1.2000은 판매액 증가에 대한 재고증가의 탄력성이어야 하는데 이것은 도저히 합리적으로 설명할 수 없다. --.0366은 재고증가의 4분기당 증가율이어야 하는데 이를 年率로 보면, 在庫가 추세적으로 매년 약 15%씩 減少하는 것으로 해석해야 하기 때문에 이역시 합리적으로 납득할 수 없는 數値가 된다.

以上에서 나디리--로젠의 硏究結果에 대하여 몇가지 문제점을 지적하였다. 그러면 이런 문제점들이 어떻게 해서 생겼을까? 그 가장 큰 원인은 그들의 實證分析이 충분한 理論的 뒷받침을 갖지 않고 출발했기 때문이다. 즉 그들의 연구결과는 그들이 막연히 想定한 理論과 일치하지 아니한 것인데, 그렇다면 이것은 그들이 연구대상으로 한 경제현상이 그 이론과 맞지 않거나 맞기는 하되 연구방법에 결함이 있거나 둘중에 하나일 것이다.

필자는 이 두 가능성 중에서 먼저 검토해야 할 것은 그들의 연구방법에 어떤 결함이 있는가를 검토하는 것이라고 생각한다. 우리의 伸縮的 가속도모형에서는 行列 B의 역할이 무엇보다도 중요하다. 따라서 이의 정확한 推定이 가능한가 가능하지 못한가 하는 것이 實證分析의 成敗를 가름한다고 할 수 있다. 그런데 나디리와 로젠이 使用한 資料는 20여년에 걸친 4분기 時系列資料로서 심각한 多重共線性의 問題가 있다고 판단되는 자료이다. 그런

데 다중공선성문제가 존재하는 경우에는 최소자승법에 의한 회귀계수의 추정은 정확을 기하기 어렵다. 따라서 추정된 $(I-B)$行列 역시 정확을 기한 결과라고 보기 어렵다. 그리고 多重共線性下에서는 推定値의 절대치는 母數보다 월등히 커지는 경향이 있다. 앞에서 Γ의 元素중 합리적 해석이 불가능하게 커진 것도 역시 多重共線性과 관련시켜 생각해 볼 수 있을 것이다.

나디리—로젠의 硏究는 엄격한 理論的인 검토와 資料의 性質에 관한 면밀한 검토가 實證分析을 하는 데 얼마나 중요한가 하는 좋은 敎訓을 주고 있다.

VIII. 結 論

本論文에서 우리는 단순히 加速度模型이 존재하는 것이 아니라 合理的인 經濟活動의 결과가 왜 伸縮的 加速度模型으로 나타나는가를 보았다. 그리고 單一生産要素의 경우와 多數生産要素의 경우, 連續時間의 경우와 離散時間의 경우를 따로 나누어서 그러한 模型이 나타나게 되는 理由를 자세히 검토하고 또 그렇게 나타나는 模型은 어떤 性質을 가져야 하는가도 엄격히 고찰하였다.

다음으로 우리는 신축적 가속도모형의 응용예를 나디리와 로젠에서 찾아 보았다. 그리고 그 例가 表面的으로는 우리가 앞에서 전개한 것과 같은 신축적 가속도모형이라고 할 수 있지만 연구과정에서 그 模型이 가지는 重要한 성질을 도외시하였기 때문에 實質的으로는 理論模型과 동떨어지고 經濟的으로 不合理한 결과를 얻게된 사실을 지적하였다. 그리하여 資料의 多重共線性問題의 극복 등 硏究方法의 改善에 의해서 보다 理論模型에 充實하고 經濟的으로 合理的인 結果를 얻을 수 있는 가능성이 있을 것이라고 하였다. 그러나 보다 改善된 연구방법의 결과로 완전히 이론모형에 부합하는 추정결과가 도출되리라고는 기대할 수 없다. 그중 한가지 흥미있는 과제는 時差分布의 구조라고 생각한다. 나디리—로젠을 포함하여 다수의 연구는 종모양의 時差分布構造가 추정되는 것으로 報告하였다. 그러나 伸縮的 加速度의 理論模型에서는 그러한 것이 나올 수 없다. 만일 現實資料의 올바른 방법에 의한 분석결과가 종모양의 時差分布를 强力히 뒷받침한다면, 理論模型은 적절한 方法으로 修正되어야 할 것이다.

지금까지 伸縮的 加速度模型은 그 理論의 導出과 應用兩面에서 거의 전적으로 生産要素에 대한 需要를 說明하는 데 관련되어 있다. 그러나 그 模型의 導出에서 알 수있다시피 이 模型은 다른 經濟行動를 설명하는 데도 使用될 수 있는 것으로 생각된다. 즉 어떤 經濟行動

이 마찰적 비용을 수반하고, 그 마찰적 비용이 그 經濟行動의 추진속도에 따라서 체증하기만 하면, 그 상황에서의 合理的 行動의 결과는 伸縮的 加速度模型이 될 것이기 때문이다.

參 考 文 獻

〔1〕 Almon, S., "The Distributed Lag Between Capital Appropriations and Expenditures," *Econometrica*, Jan. 1965.

〔2〕 Brechling, F., "Some Recent Developments in Dynamic Economics," mimeo.

〔3〕 Eisner, R., and R. Strotz, "Determinants of Business Investments," CMC, *Impacts of Monetary Policy*, 1963.

〔4〕 Jorgenson, D.W., and J.A. Stephenson, "Investment Behavior in U.S. Manufaturing, 1947～1960," *Econometrica*, April 1967.

〔5〕 Junanka, P.N., *Investment: Theory and Evidence*, 1973.

〔6〕 Lucas, R.E., "Optimal Investment Policy and the Flexible Accelerator," *International Economic Review*, Feb. 1967.

〔7〕 Nadiri, M.I., and S. Rosen, "Interrelated Factor Demand Functions," *American Economic Review*, Sep. 1969.

〔8〕 Nadiri, M.I., and S. Rosen, *A Disequilibrium Model of Demand for Factors of Production*, NBER, 1974.

〔9〕 Schramm, R., "The Influence of Relative Prices, Production Conditions and Adjustment Costs on Investment Behavior," *Review of Economic Studies*, July 1970.