物價의 伸縮的 加速度模型

鄭　　基　　俊*

〈目　　次〉

I. 序　　論

物價의 變動을 說明하는 理論은 單純한 貨幣數量說을 비롯하여 複雜한 最新의 各種 理論에 이르기까지 多樣多岐하다. 그러나 物價의 變動構造를 物價項目 相互間의 關係를 고려하면서 分析할 수 있는 模型의 理論的 뒷받침은 伸縮的 加速度理論의 接近方法에서 찾을 수 있다는 것이 本論文의 主題이다.

伸縮的 加速度原理는 주로 投資理論과 관련되어 展開되었다. 1963年 아이스너와 스트로쯔[2]는 企業의 合理的 行動의 結果가 投資需要를 伸縮的 加速度原理에 따라서 행하게 함을 밝혔다. 즉 과거에도 投資需要를 흔히 伸縮的 加速度原理에 따라 설명해 왔지만 그 理論的 뒷받침이 없었는데 아이스너와 스트로쯔에 의해서 그 慣行은 理論的 뒷받침을 얻게 되었다고 말할 수 있다.

아이스너와 스트로쯔에 의한 投資의 伸縮的 加速度模型은 다음과 같은 가정하에서 유도된다.

(가) 企業이 한 生産要素의 投入을 증가시키는 데는 그에 따른 調整費用(adjustment cost)이 든다. 그리고 그 限界費用은 調整의 速度가 커짐에 따라서 增加한다.

(나) 그 企業은 完全競爭狀態에서 稼動하며, 따라서 外生的 價格에 順應한다.

* 本硏究所 硏究員, 서울大學校 經濟學科 副敎授
本論文은 峨山財團의 硏究費支援을 받아서 完成되었음.

(다) 그 企業은 價格에 대해서 靜態的 期待(static expectation) 상태에 있다.

(라) 生產函數는 規模에 대한 收益遞減의 조건을 充足하고 있다.

(마) 企業은 그 企業의 純現價를 極大化하고자 한다.

아이스너와 스트로쯔는 以上의 가정 하에서 生產要素로서 資本을 고려할 때, 投資의 時間經路가 바로 伸縮的 加速度模型의 經路임을 밝혔다. 아이스너와 스트로쯔의 이 結果는, 여러 사람들에 의해서 一般化되었으며, 이에 관한 論議는 筆者의 論文[1]에 잘 설명되어 있다. 특히 多數의 生產要素에 관한 一般模型으로의 擴張結果는 나디리와 로젠[4],[5]에 의해서 實證分析에 이용되었다. 또 이와 관련된 硏究로는 예컨대 李成舜의 論文[3]을 參考할 수 있다.

지금까지의 伸縮的 加速度模型은 그 理論과 應用 兩面에서 거의 전적으로 生產要素에 대한 需要를 설명하는 문제와 관련되어 있다. 그러나 그 模型은 그 모형이 前提로 하는 가정들만 形式的으로 充足될 수 있다면, 다른 經濟行動을 說明하는 데도 使用될 수 있다고 생각한다. 특히 이 模型은 韓國의 物價現象을 說明하는 데 有用하게 擴張 使用될 수 있다고 생각한다. 本論文에서는 이러한 생각을 구체화하여 物價의 伸縮的 加速度模型을 構築하고, 그 模型이 갖는 含蓄意味를 導出하고자 한다. 이를 韓國의 物價現象을 實證的으로 分析하는 데 利用하는 作業은 追後에 계속될 것이다.

II. 物價의 伸縮的 加速度模型 (豫備的 模型)

아이스너와 스트로쯔에 의한 投資의 伸縮的 加速度模型은 企業의 將來收益의 現價를 極大化하려는 企業이 이 目的을 위하여 投資의 最適經路를 選擇하는 形式으로 되어 있다. 그렇다면 物價의 伸縮的 加速度模型을 展開하려는 우리는, 어떤 經濟主體가 어떤 目的을 위하여 物價의 最適經路를 選擇하는 形式을 빌어서 그 模型을 誘導할 수 있는 것으로 期待할 수 있을 것이다. 이때 우리의 經濟主體는 막연하지만 國民經濟 또는 國民經濟를 代表하는 어떤 實體라고 보아야 할 것이고, 우리의 經濟主體가 추구하는 目的은 物價의 最適時間經路를 擇하여, 物價의 水準 및 變動으로 말미암아 야기되는 어떤 綜合된 意味에서의 不利益을 極小化하는 것이라고 말할 수 있다.

1960年代와 1970年代 韓國經濟는 政府의 主導 하에서 成長해 왔다고 해도 과언이 아니다. 그리고 이 期間의 物價도 政府의 主導 하에서 또는 政府의 規制 하에서 變動되어 왔다. 그러므로 物價를 變動하게 한 決定的인 主體는 政府이며, 따라서 政府는 物價를 獨立變數

의 일부로 하는 어떤 目的函數가 있어서, 그 目的函數를 最適化하는 方法으로 物價에 대한 統制 또는 規制를 해 왔다고 볼 수 있다.

前述한 期間 동안에 物價의 變動이 政府에 의해서 主導되어 왔다고 할 때 이것은 民間部門 즉 民間企業部門이 物價變動에 대해서 완전히 受動的이었다는 意味는 아니다. 民間企業들도 자기의 판단 아래 特定財貨의 價格을 決定할 수 있었기 때문이다. 그러나 都賣物價指數作成의 對象品目 중 가중치로 볼 때 半 以上이 政府의 指定價格이거나 政府의 直接的인 통제 하에 있다는 사실을 고려하고, 民間企業이 自律的으로 價格을 결정하는 品目은 비교적 競爭的 品目으로서, 크게 보아서 規制對象品目의 價格變化와 크게 괴리될 수 없는 점을 감안하면, 物價變動이 政府의 決定에 의해서 이루어졌다고 하는 가정은 그리 非現實的인 가정은 아니라고 생각된다.

그리하여 우리는 物價와 관련된 經濟現實에 관한 다음과 같은 가정이 許容될 수 있다고 본다.

(가) 政府는 國民經濟를 代表하는 公法人으로서 政府의 意志는 國民經濟의 集約된 意志로 볼 수 있다.

(나) 國民經濟의 立場에서 어떤 時點 t에서의 物價水準 $p(t)$는 너무 낮은 것도 바람직하지 못하고 너무 높은 것도 바람직하지 못하다. 物價를 獨立變數로 하는 國民經濟의 不利益函數를 $F(p)$라하면, 이 函數 $F(p)$는 다음과 같은 性質을 가진다. (表記의 便宜上 $p(t)$를 p로 쓴다.)

① $F(p)$는 $p>0$인 어떤 點에서 極小値를 가진다.

② 限界不利益函數 $F'(p)$는 p의 增加函數이다. 즉 限界不利益은 遞增한다.

이러한 性質을 가지는 不利益函數를 가정하는 것은 그리 非現實的이 아니라고 생각된다. 그리고 $F(p)$의 函數形態로 以上의 條件을 충족하는 가장 간단한 形態의 다음과 같은 2次函數를 假定한다.

$$F(p)=\frac{1}{2}ap^2-bp+a_o;\ a,b>0. \quad (1)$$

(다) 物價를 變動시키는 데는 調整費用이 든다. 이 調整費用은 物價의 水準 $p(t)$에서 오는 國民經濟의 不利益이 아니라, 物價의 變動 $\dot{p}(t)(\equiv dp(t)/dt)$로 因한 國民經濟의 不利益이다. 이러한 調整費用函數를 $G(\dot{p})$라고 보면, 調整費用 $G(\dot{p})$는 物價의 變動程度의 絶對値가 클수록 加速的으로 增加하리라고 기대할 수 있다. 즉 限界調整費用$G'(\dot{p})$는 항상 物價의 變動速度에 比例하여 變한다고 볼 수 있다. 이러한 性質을 가지는 가장 간단한 函數形態를

$$G(p)=\frac{1}{2}cp^2;\ c>0 \tag{2}$$

로 가정하자.

(라) 國民經濟는 다음과 같은 原理에 따라서 物價의 時間經路 $p(t)$를 선택한다.

$$\min V[p(t)]=\int_0^\infty e^{-rt}\ [F(p(t))+G(\dot{p}(t))]dt. \tag{3}$$

즉 國民經濟가 想定하는 割引率 $r(>0)$로 割引한 純不利益($F+G$)의 將來 흐름의 總額을 極小化하도록 物價의 時間經路 $p(t)$를 정한다는 것이다.

이러한 가정들을 充足하는 $p(t)$의 경로를 구하기 위해서는 위의 變分法問題의 오일러-라그랑지 방정식을 풀어야 한다. (문제의 풀이에 관한 자세한 것은 鄭基俊[1]을 참조할 것.) 그 오일러-라그랑지 方程式을 정리하여 우리는 다음과 같은 2階 微分方程式을 얻을 수 있다.

$$c\ddot{p}-rc\dot{p}-ap-b=0. \tag{4}$$

이 식에서 $\ddot{p}=\dot{p}=0$로 놓고 p의 均衡値를 구하면 다음과 같다.

$$p^*=\frac{b}{a}>0.$$

이 부호조건은 가정 (나)로부터 나온다. 위의 微分方程式의 特性方程式은

$$c\lambda^2-rc\lambda-a=0$$

가 되며, 따라서 그 根은

$$\lambda_1,\ \lambda_2=\frac{rc\pm\sqrt{(rc)^2+4ca}}{2c}$$

가 된다. 그런데 가정에 의하여, $a>0$, $c>0$이므로,

$$\sqrt{(rc)^2+4ac}>rc>0$$

가 되고, 따라서 두 根은 모두 實根이고, $\lambda_1<0$, $\lambda_2>0$이다. 임의의 常數 k_1, k_2를 써서 $p(t)$의 一般解를 表現하면,

$$p(t)=p^*+k_1e^{\lambda_1 t}+k_2e^{\lambda_2 t}$$

가 된다. 그런데, 이 解가 安定解가 되려면, $k_2=0$이어야 한다. 그러므로, 安定條件 하에서의 一般解는

$$p(t)=p^*+(p_0-p^*)e^{\lambda_1 t}$$

로 쓸 수 있다. 단 $p_0=p(0)$이다.

이 式을 t에 관해서 미분하여 정리하면,

$$\dot{p}(t)=\lambda_1(p_0-p^*)e^{\lambda_1 t}=\lambda_1[p(t)-p^*]$$

즉

$$\dot{p}(t)=B[p^*-p(t)];\ B\equiv-\lambda_1>0 \tag{5}$$

가 된다. 이것이 바로 物價의 加速度模型이다. 이 式이 의미하는 바는, $p(t)$가 p^*에 미치지 못할 때, $p(t)$는 增加하며 그 增加速度는 $B(>0)$에 의존한다는 것이다.

이 模型을 t가 $0, 1, 2, \cdots$ 등으로 變하는 異散時間의 경우로 고치면,

$$p_{t+1}-p_t=B(p^*-p_t)$$

또는

$$p_t=Bp^*+(1-B)p_{t-1} \tag{6}$$

로 고쳐 쓸 수 있다.(이것이 合理化되는 이유는 鄭基俊〔1〕에 잘 나와 있다.)

III. 物價의 伸縮的 加速度模型

위의 模型은 物價가 全品目의 平均價格水準을 나타내는 경우를 다루었다. 그러나 위의 模型은 物價가 原資材, 資本財, 消費財 등 몇개의 項目으로 나누어져서 作成되는 경우로 擴張될 수 있다. 一般的으로 物價가 n개의 項目으로 나누어져서 각각 指數化된 경우 물가지수벡터 $p(t)$는 $n\times1$ 벡터가 된다. 즉 原資材物價指數, 資本財物價指數, 消費財物價指數 등을 그 元素로 하는 벡터이다. 이 경우에도 物價指數벡터 p를 독립변수로하는 國民經濟의 不利益函數 $F(p)$가 다음과 같이 規定될 수 있다. 즉

$$F(p)=\frac{1}{2}p'Ap-b'p+a_0. \tag{7}$$

여기서도 $F(p)$가 p가 낮을 때에는 不利益이 크고, 또 높을 때에도 크다고 하는 가정을 만족한다면, $n\times n$ 행렬 A는 陽定符號行列이라고 가정하는 셈이 된다. 그리고, 그 경우에 $p>0$의 조건이 충족되려면, $b>0$이어야 할 것이다. 그러므로 우리는 다음과 같이 가정한다.

假定 : A는 $n\times n$의 陽定符號行列이다. 또 b는 $n\times1$이며, $b>0$이다.

다음으로 調整費用에 관해서는 $p(t)$의 時間에 대한 導函數의 函數라고 보는 대신 실제 統計資料가 異散的 時間에 대해서 測定된 결과이므로, $p(t)$의 差分 $\Delta p(t)\equiv p(t+1)-p(t)$의 크기가 調整費用의 크기를 決定한다고 가정하는 것이 편리하다. 그리하여 $\Delta p(t)$에 관한 2次形式의 調整費用函數를 假定하면 이는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$G(\Delta p)=\frac{1}{2}(\Delta p)'C(\Delta p) \tag{8}$$

그리고 調整의 速度가 커짐에 따라 限界調整費用이 체증한다는 假定은 係數行列 C의 對角元素가 陽數라는 가정에 의해서 뒷받침될 수 있다. 그리고 調整速度로 말미암은 交叉的 調整費用을 무시하면, 우리는 다음과 같이 假定할 수 있다.

假定 : C는 $n\times n$의 陽對角行列이다.

즉 $c_{ii}>0$; $c_{ij}=0$, $i\neq j$ $(i, j=1, 2, \cdots, n)$.

여기서 國民經濟는 다음과 같은 原理에 의해서 p_t의 時間經路를 선택한다고 가정한다. 즉

$$\min V=\sum_{t=1}^{T}(1+r)^{-t}\{F(p_t)+G(\Delta p_t)\}$$

$$=\sum_{t=1}^{T}(1+r)^{-t}\left\{a_0+\frac{1}{2}p_t'Ap_t-b'p_t+\frac{1}{2}(\Delta p_t)'C(\Delta p_t)\right\}. \qquad (9)$$

즉 國民經濟가 想定하는 割引率 $r(>0)$로 割引한 T期까지의 總不利益 $F+G$의 將來 흐름 總額을 極小化하도록 p_t의 경로를 선택한다는 것이다.

위의 極小化問題를 充足하는 經路 p_t는 다음과 같은 1階條件을 充足하여야 한다. 즉

$$\frac{\partial V}{\partial p_t}=\{Ap_t-b-C(p_{t+1}-p_t)+C(p_t-p_{t-1})(1+r)\}(1+r)^{-t}=0; t=1, 2, \cdots, T,$$

$$\frac{\partial V}{\partial p_{T+1}}=(1+r)^{-T}C(p_{T+1}-p_T)=0.$$

V의 極小化를 위한 2階의 充分條件도, 다음의 $\{n(T+1)\}\times\{n(T+1)\}$階의 行列이 陽定符號行列이 되는 것인 바, 이 條件은 역시 充足된다고 假定한다.

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial p_s p_t'}\right]\ ;\ s, t=1, 2, \cdots, T+1.$$

그런데 이 行列이 陽定符號行列이면 그 部分行列인

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial p_t \partial p_t'}\right]=(1+r)^{-t}\{A+(2+r)C\}\ ;\ t=1, 2, \cdots, T$$

와

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial p_{T+1}\partial p_{T+1}'}\right]=(1+r)^{-T}C$$

도 陽定符號行列이어야 하는데, 이것은 A와 C에 관한 앞의 가정에 의해서 모두 充足됨을 알 수 있다. 그리고 1階條件의 마지막 式은 $T\to\infty$이거나 $p_{T+1}=p_T$일 때 充足되며, 또 그렇게 가정한다. 그러면 문제는 1階條件의 $t=1, 2, \cdots, T$에 관한 式이다. 이 式으로부터 다음 式이 誘導된다.

$$Cp_{t+2}-\{A+(2+r)C\}p_{t+1}+(1+r)Cp_t+b=0;\ t=0, 1, \cdots, T-1. \qquad (10)$$

여기서 p_t의 定常解를 p^*라 하면, 이는 $p^*=p_{t+2}=p_{t+1}=p_t$로 놓아서 다음과 같이 구해진다.

$$p^*=A^{-1}b.$$

위의 差分方程式을

$$x_t\equiv p_t-p^*$$

$$z_t\equiv x_{t+1}$$

로 하여 다시 표현하면 다음과 같다.

$$z_{t+1}-\{C^{-1}A+(2+r)I\}z_t+(1+r)x_t=0.$$

$$x_{t+1}-z_t=0.$$

이를 移項하여 고쳐쓰면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} z_{t+1} \\ x_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{-1}A+(2+r)I & -(1+r)I \\ I & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_t \\ x_t \end{bmatrix}. \tag{11}$$

이 差分方程式體系의 解를 구하기 위해서는 係數行列

$$\begin{bmatrix} C^{-1}A+(2+r)I & -(1+r)I \\ I & O \end{bmatrix} \tag{12}$$

의 特性根과 特性벡터를 구해야 한다. 이 係數行列을 보면 $C^{-1}A$의 相似行列로서 對角行列인 것을 구할 수 있으면 문제가 쉽게 풀릴 수 있음을 알 수 있다. 그리하여, $C^{-1}A$의 相似對角行列을 먼저 구해 보자. 이를 위해서는 $C^{-1}A$의 相似對稱行列이 다음과 같이 존재함을 확인할 필요가 있다.

$$D(C^{-1}A)D^{-1}=D^{-1}AD^{-1}.$$

단 D는

$$D=C^{\frac{1}{2}}$$

로 정의되는 陽對角行列이다. 그런데 $D^{-1}AD^{-1}$는 陽定符號行列이 되므로, 그 特性根 m_i를 對角元素로 하는 對角行列 M과 그에 대응하는 特性벡터들로 이루어지는 直交行列 Q가 존재하여

$$QD^{-1}AD^{-1}Q'=M \tag{12$'$}$$

의 관계를 만족한다. 여기서 M은 $D^{-1}AD^{-1}$의 相似行列이고, 또 후자는 $C^{-1}A$의 相似行列이므로, 相似性의 移行的 性質(相似行列의 相似行列은 相似行列)에 의해서 陽對角行列 M은 $C^{-1}A$의 相似行列이다. 즉

$$M=QD^{-1}AD^{-1}Q^{-1}=QD(C^{-1}A)D^{-1}Q^{-1}=T^{-1}(C^{-1}A)T.$$

단,

$$T \equiv D^{-1}Q^{-1} = D^{-1}Q'$$

이다. 이를 이용하여 다음 計算을 해보자.

$$\begin{bmatrix} T & O \\ O & T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C^{-1}A+(2+r)I & -(1+r)I \\ I & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & O \\ O & T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} M+(2+r)I & -(1+r)I \\ I & O \end{bmatrix}.$$

그러므로 이 식의 右邊의 行列은 우리 係數行列(3.6)의 相似行列이며, 相似行列들의 特性根들은 서로 같으므로, 이 右邊의 行列의 特性根을 구함으로써 係數行列의 特性根을 구할 수 있다. 그리하여 그 特性方程式을 만들면 다음과 같다.

$$\begin{vmatrix} (\lambda-2-r)-M & (1+r)I \\ -I & \lambda I \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \{\lambda(\lambda-2-r-m_i)+(1+r)\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \{\lambda^2-(2+r+m_i)\lambda+(1+r)\} = 0.$$

이 特性方程式에서 알 수 있는 것은 各各의 m_i에는 두개의 다음과 같이 정의되는 特性根 λ_{i1}과 λ_{i2}가 대응한다는 것이다.

$$\lambda_{i1},\ \lambda_{i2} = \frac{(2+r+m_i) \pm \sqrt{(2+r+m_i)^2-4(1+r)}}{2}$$

$$= 1 + \frac{(r+m_i) \pm \sqrt{(r+m_i)^2+4m_i}}{2};\ i=1,2,\cdots,n.$$

여기서 根號안은 陽數이므로 實根을 가진다. 그리고 $(2+r+m_i) > \sqrt{(2+r+m_i)^2-4(1+r)}$ 이므로 두 根은 모두 陽數이다. 또 $(r+m_i) < \sqrt{(r+m_i)^2+4m_i}$ 이므로, 두 根중 하나(λ_{i1})는 1보다 작고, 다른 根(λ_{i2})은 1보다 크다. 따라서 우리는 다음과 같이 말할 수 있다.

$$0 < \lambda_{i1} < 1,\ \lambda_{i2} > 1;\ i=1,2,\cdots,n.$$

그리고 特性方程式에서 알 수 있는 바와 같이, 이 λ_i들은 다음 式을 만족한다.

$$\lambda_{i1}{}^2-(2+r+m_i)\lambda_{i1}+(1+r)=0;\ i=1,2,\cdots,n.$$

$$\lambda_{i2}{}^2-(2+r+m_i)\lambda_{i2}+(1+r)=0;\ i=1,2,\cdots,n.$$

이를 다시 行列을 써서 표현하면 다음과 같다.

$$\Lambda_1{}^2-(2I+rI+M)\Lambda_1+(1+r)I=0.$$

$$\Lambda_2{}^2-(2I+rI+M)\Lambda_2+(1+r)I=0. \tag{13}$$

단 Λ_1은 λ_{i1}을 대각원소로 하는 對角行列이며, Λ_2는 λ_{i2}를 대각원소로 하는 對角行列이다.

다음은 係數行列 (12)의 特性벡터들을 구해보자. $2n$개의 特性벡터들로 이루어진 正方行列을 V라 하고 이를 Λ_1에 대응하는 n개의 벡터 $\begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix}$ 과 Λ_2에 대응하는 $\begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{bmatrix}$ 로 分割되는 것으로 보자. 즉

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}.$$

그러면 特性벡터와 特性根 간의 一般的인 관계로부터 다음 式을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} (2+r)I+M & -(1+r)I \\ I & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_1 & O \\ O & \Lambda_2 \end{bmatrix}.$$

그리고 이를 풀어 쓰면 다음 4개의 식이 된다.

$$(2I+rI+M)V_{11}-(1+r)V_{21}=V_{11}\Lambda_1.$$

$$V_{11}=V_{21}\Lambda_1.$$

$$(2I+rI+M)V_{12}-(1+r)V_{22}=V_{12}\Lambda_2.$$

$$V_{12}=V_{22}\Lambda_2.$$

이를 다시 2개의 식으로 정리하면 다음과 같다.

$$(2I+rI+M)V_{21}\Lambda_1-(1+r)V_{21}=V_{21}\Lambda_1^2.$$

$$(2I+rI+M)V_{22}\Lambda_2-(1+r)V_{22}=V_{22}\Lambda_2^2.$$

또, 이를 이항하여 정리하면, 다음과 같다.

$$(2I+rI+M)V_{21}\Lambda_1=V_{21}\{\Lambda_1^2+(1+r)I\}.$$

$$(2I+rI+M)V_{22}\Lambda_2=V_{22}\{\Lambda_2^2+(1+r)I\}.$$

그런데 式 (13)에서,

$$\Lambda_1^2+(1+r)I=(2I+rI+M)\Lambda_1,$$

$$\Lambda_2^2+(1+r)I=(2I+rI+M)\Lambda_2$$

이므로, 이를 代入하여 정리하면 다음 식이 얻어진다.

$$(2I+rI+M)V_{21}=V_{21}(2I+rI+M).$$

$$(2I+rI+M)V_{22}=V_{22}(2I+rI+M).$$

이 두 式에서 괄호 내의 行列은 對角行列이므로, V_{21}과 V_{22}가 모두 對角行列이면 交換法則이 적용되므로, 이 식은 항상 성립한다. 그리고 特性벡터行列 V는 唯一하게 決定되는 것이 아니므로, V_{21}과 V_{22}는 對角行列 가운데 가장 간단한 單位行列이라고 가정하는 것이 편리하다.

즉

$$V_{21}=I,\ V_{22}=I$$

라고 가정한다. 이를

$$V_{11}=V_{21}\varLambda_1,\ \ V_{12}=V_{22}\varLambda_2$$

에 代入하면, V_{11}과 V_{21}은

$$V_{11}=\varLambda_1,\ \ V_{12}=\varLambda_2$$

로 된다. 그리하여 V는

$$V=\begin{bmatrix}\varLambda_1 & \varLambda_2\\ I & I\end{bmatrix}$$

로 얻어졌다. 그리고 원래의 係數行列의 特性벡터行列은 V로부터 다음과 같이 해서 얻어진다.

$$\begin{bmatrix}T & O\\ O & T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varLambda_1 & \varLambda_2\\ I & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T\varLambda_1 & T\varLambda_2\\ T & T\end{bmatrix}.$$

이 結果를 利用하여 우리의 差分方程式의 解를 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix}z_t\\ x_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T\varLambda_1 & T\varLambda_2\\ T & T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varLambda_1{}^t & O\\ O & \varLambda_2{}^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\end{bmatrix}.$$

여기서 k_1과 k_2는 임의의 상수의 n차원 벡터들이다. 그런데 $\varLambda_2$의 對角元素들은 1보다 크므로, t가 커짐에 따라 $\varLambda_2{}^t$는 발산한다. 그러므로 安定解를 얻기 위해서 우리는 $k_2=0$라고 가정하지 않으면 안된다.

또 初期條件으로 $t=0$일 때의 x_t를 x_0라고 놓으면,

$$x_0=Tk_1$$

즉,

$$k_1=T^{-1}x_0$$

가 된다. 그리하여 x_t의 解를 다시 쓰면,

$$x_t=T\varLambda_1{}^tT^{-1}x_0$$

가 된다. 끝으로 이를 p_t로 나타내면, $p_t=p^*+x_t$의 관계로부터,

$$p_t=p^*+T\varLambda_1{}^tT^{-1}(p_0-p^*)$$

로 쓸 수 있고, 이를 差分形態로 즉 $\varDelta p_t=p_{t+1}-p_t$ 형태로 쓰면

$$\begin{aligned}\varDelta p_t&=T(\varLambda_1{}^{t+1}-\varLambda_1{}^t)T^{-1}(p_0-p^*)\\ &=T(I-\varLambda_1)T^{-1}(p^*-p_t).\end{aligned}$$

즉

$$\Delta p_t = B(p^* - p_t) \tag{14}$$

의 形態가 된다. 단

$$B = T(I - \Lambda_1)T^{-1}$$

로 정의된다.

이 最終結果는 伸縮的 加速度模型의 一般化된 形態이다. 그리고 이 式에서 알 수 있다시피 이 模型의 性質은 行列 B에 集約되어 있다. 그러므로 그 模型의 性質을 알려면, 行列 B의 性質을 알아보면 된다.

IV. 行列 B의 分析

伸縮的 加速度模型(14)의 係數行列 B의 定義式을 다시 쓰면

$$B = T(I - \Lambda_1)T^{-1} \tag{15}$$

이고 이를 變形하여

$$BT = T(I - \Lambda_1)$$

이라 할 수 있다. 그러므로 對角行列 $I - \Lambda_1$의 對角元素 $1 - \lambda_{i1}$들은 行列 B의 特性根이다. 그런데 λ_{i1}이 0과 1 사이에 있으므로, $1 - \lambda_{i1}$도 역시 0과 1 사이에 있게 된다. 즉,

$$0 < 1 - \lambda_{i1} < 1.$$

이는 p_t가 p^*와 乖離되어 있을 때 그 간격이 持續的으로 減少할 것임을 나타낸다고 볼 수 있다.

行列 T는 定義上

$$T = D^{-1}Q'$$

이었다. 이를 利用하여 B를 다시 쓰면,

$$B = T(I - \Lambda_1)T^{-1} = D^{-1}Q'(I - \Lambda_1)QD$$
$$= D^{-1}\bar{B}D$$

로 된다. 단, $\bar{B}$는

$$\bar{B} = Q'(I - \Lambda_1)Q \tag{16}$$

로 정의되며, $I - \Lambda_1$이 陽定符號行列이므로, $\bar{B}$ 역시 陽定符號行列이다. 그런데 D는 對角行列이므로, B 및 $\bar{B}$의 第(i, j)元素를 各各 b_{ij}, $\bar{b}_{ij}$로 나타내고, D의 i번째 對角元素를 d_i로

나타내면, $B=D^{-1}\bar{B}D$는, $\bar{b}_{ij}=\bar{b}_{ji}$임을 고려하면,

$$b_{ij}=d_i^{-1}\bar{b}_{ij}d_j,$$

$$b_{ji}=d_i\bar{b}_{ij}d_j^{-1};\ i,j=1,2,\cdots,n$$

로 쓸 수 있다. 따라서

$$b_{ij}b_{ji}=\bar{b}_{ij}^2>0$$

이 되어, b_{ij}와 b_{ji}는 같은 符號를 가지게 된다. 또 對角元素는,

$$b_{ii}=\bar{b}_{ii}>0$$

가 되어 언제나 陽數가 된다. 또,

$$\frac{b_{ij}}{b_{ji}}=\left(\frac{d_j}{d_i}\right)^2=\frac{c_j}{c_i}$$

이다. 여기서 c_i는 調整費用函數의 係數行列인 對角行列 C의 i번째 元素이다. 따라서 우리는 다음과 같이 말할 수 있다. 즉 B의 對稱位置에 있는 두 元素의 比(b_{ij}/b_{ji})는 限界調整費用의 變化率의 比(c_j/c_i)와 같다고. 그러므로 B가 對稱行列이 되는 것은 d_i 또는 c_i가 모두 같은 값을 가질 때라는 것을 알 수 있는데, 이것은 調整費用函數

$$G(\Delta p)=(\Delta p)'C(\Delta p)$$

에서 볼 때, p의 測定單位를 調整함으로써 언제나 達成可能하다. 특히

$$q=D^{-1}p$$

라고 定義하면, q는 測定單位를 바꾼 後의 p라고 볼 수 있는데, 이 때

$$\Delta q=D(\Delta p),\ \ \Delta p=D^{-1}(\Delta q)$$

가 되며 따라서

$$G(p)=(\Delta q)'D^{-1}CD^{-1}(\Delta q)=(\Delta q)'(\Delta q)$$

가 된다. 이것은 變數를 p에서 q로 바꿀 때 D는 I로 바뀜을 의미하며, 따라서 p에 관한 模型을 q로 變換하면, B는 $\bar{B}$로 바뀜을 의미한다. 즉 變數 q에 관한 模型에서는 B에 해당하는 行列은 항상 對稱行列이고, 陽定符號行列이다.

行列 B가 對角行列이라면, 한 物價項目의 變化가 다른 物價項目의 變化에 아무런 영향도 미치지 못하는 것이된다. 이러한 狀況은 不利益函數 $F(p)$의 2次項의 係數行列 A가 對角行列일 때 발생함을 보일 수 있다. 즉 한 物價項目의 限界不利益의 크기가 다른 物價項目의 영향을 받지 않을 때 B는 對角行列이 된다. 그 理由는 다음과 같이 설명될 수 있다.

式 (12)′에 의하면,

$$Q(D^{-1}AD^{-1})Q'=M$$

이다. 그런데 A가 對角行列이면, $D^{-1}AD^{-1}$는 對角行列이 되고, 이는 그 特性根으로 된 對

角行列 M과 같아 진다. 즉,

$$D^{-1}AD^{-1}=M.$$

이것은 直交行列 Q가 $Q=I$가 됨을 의미한다. 그리고

$$T=D^{-1}Q'$$

에서, $T=D^{-1}$가 된다. 즉 T는 對角行列이 된다. 그런데,

$$B=T(I-\Lambda_1)T^{-1}=I-T\Lambda_1T^{-1}$$

에서 $I-\Lambda_1$이 對角行列이므로, T가 對角行列이면, B는 $B=I-\Lambda_1$으로서 對角行列이 된다. 그러므로 우리는 다음 명제를 얻는다.

命題: A가 對角行列이면 B는 對角行列이다.

그러면 다음으로 그 命題의 逆이 成立하는가를 보기로 하자. 우리는 特性方程式을 푸는 과정에서,

$$\Lambda_1^2-(2+r)\Lambda_1+M\Lambda_1+(1+r)I=0$$

라는 式을 얻었다. 이 式을 Λ_1으로 나누고 整理하면 다음과 같이 된다.

$$M=(I-\Lambda_1)-(1+r)(I-\Lambda_1^{-1}).$$

이 式을 B와 比較하기 위하여 앞뒤에 各各 T와 T^{-1}를 곱하면,

$$TMT^{-1}=I-T\Lambda_1T^{-1}-(1+r)(I-T\Lambda_1^{-1}T^{-1})$$

이 되고, 여기에

$$B=I-T\Lambda_1T^{-1},$$

$$(I-B)^{-1}=(T\Lambda_1T^{-1})^{-1}=T\Lambda_1^{-1}T^{-1}$$

를 代入하면,

$$TMT^{-1}=B-(1+r)\{I-(I-B)^{-1}\}$$

라는 表現을 얻는다. 그런데 이 式의 左邊은

$$T^{-1}(C^{-1}A)T=M$$

으로부터

$$C^{-1}A=TMT^{-1}$$

라는 式을 얻을 수 있으므로, $C^{-1}A$가 되며, 따라서 다음과 같이 整理될 수 있다.

$$C^{-1}A=B-(1+r)\{I-(I-B)^{-1}\}.$$

그런데 B가 對角行列이면, $I-B$도 對角行列이며, 또 $(I-B)^{-1}$도 對角行列이다. 따라서 이 式의 右邊은 對角行列이 된다. 그런데 左邊의 第(i, j)元素는

$$a_{ij}/c_i;\ i,j=1,2,\cdots,n\ \ (0<c_i<\infty)$$

인데 兩邊이 一致하려면, $i\neq j$일 때 a_{ij}는 0이 되어야 한다. 즉 A의 非對角元素는 0이어야 한다. 그러므로 우리는 다음 명제를 얻는다.

命題 : B가 對角行列이면 A는 對角行列이다.

위의 두 命題를 結合하면 우리는 다음과 같이 말할 수 있다.

命題 : B가 對角行列이 되는 必要充分條件은 A가 對角行列이 되는 것이다. 즉 한 物價項目의 變化가 다른 物價項目에 영향을 미치지 않으면, 한 物價項目의 水準으로부터 오는 限界不利益은 다른 物價項目의 영향을 받지 않으며, 그 逆도 역시 成立한다.

V. 模型의 計量經濟模型化

우리는 앞에서 物價의 伸縮的 加速度模型

$$\Delta p_t=B(p^*-p_t)$$

를 얻었다. 그런데 이를 計量經濟學的으로 推定可能한 模型으로 만들려면, p^*를 보다 具體的으로 規定해 주어야 한다. 이를 위해서 우리는 p^*도 時間에 따라서 變하는 것으로 보고, 위의 關係는

$$p_t-p_{t-1}=B(p_t{}^*-p_{t-1})$$

로 쓸 수 있다고 假定하기로 한다. 그리고 여기서 $p_t{}^*$는, $m\times1$ 外生變數벡터 z_t와 $n\times1$ 攪亂要因벡터 u_t에 의해서

$$p_t{}^*=\Gamma z_t+u_t$$

의 形態로 表現될 수 있다고 본다. 단, Γ는 $n\times m$ 係數行列이다. 그러면 위의 模型은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$p_t-p_{t-1}=B(\Gamma z_t+u_t-p_{t-1}).$$

즉,

$$p_t=B\Gamma z_t+(I-B)p_{t-1}+Bu_t. \tag{17}$$

여기서 攪亂項 Bu_t에 관해서 적절한 假定을 하면, p, z에 관한 統計資料를 利用하여, $B\Gamma$와 $I-B$를 推定할 수 있고 이로부터 B와 Γ를 推定할 수 있다. 그러나 經濟的으로 보면, B와 Γ에 못지 않게 $B\Gamma$와 $I-B$에도 重要한 意味를 부여할 수 있다. 즉 $B\Gamma$는 外生變數 z가 p에 미치는 即時乘數(impact multiplier)를 나타내고, $I-B$는 前期의 p가 今期의 p에 미

치는 時差效果를 나타낸다.

그리고 다음과 같은 性質을 가지는 時差作用素(lag operator) L을 導入하기로 하자.

$$Lp_t = p_{t-1}.$$

그러면 위의 模型은

$$\{I-(I-B)L\}p_t = B\Gamma z_t + Bu_t$$

로 되며, 이는 다시 다음과 같이 表現할 수 있다.

$$p_t = \{I-(I-B)L\}^{-1}B\Gamma z_t + \varepsilon_t.$$

단,

$$\varepsilon_t \equiv \{I-(I-B)L\}^{-1}Bu_t$$

이다. 그런데 $I-B$의 特性根은 0과 1 사이에 있으므로, 위의 式은 다음과 같이 展開될 수 있다.

$$p_t = \sum_{s=0}^{\infty}(I-B)^s L^s B\Gamma z_t + \varepsilon_t$$

$$= B\Gamma z_t + (I-B)B\Gamma z_{t-1} + (I-B)^2 B\Gamma z_{t-2} + \cdots + \varepsilon_t.$$

여기서 $(I-B)^s B\Gamma$는 s期 以前의 外生變數 z_{t-s}가 今期의 物價 p_t에 미치는 效果 즉 中間乘數(interim multiplier)의 行列을 나타낸다. 예컨대 $(I-B)^s B\Gamma$의 第$(i,\ j)$元素는 z의 j번째 變數의 s期 以前의 값이 p의 i번째 變數의 今期의 값에 미치는 乘數의 값이 된다.

即時乘數를 포함한 모든 中間乘數의 合은 總乘數(total multiplier)가 되는데 이것은 다음과 같이 表現된다. 즉,

$$\sum_{s=0}^{\infty}(I-B)^s B\Gamma = \{I-(I-B)\}^{-1}B\Gamma = B^{-1}B\Gamma = \Gamma$$

가 된다. 그런데 이것은 z_t가 p_t^*에 미치는 效果와 같음을 알 수 있다.

VI. 模型의 時差構造上의 特徵

앞에서 說明한 中間乘數行列$(I-B)^s B\Gamma$는 本模型의 時差構造를 나타내는 것으로도 解釋할 수 있다. 즉 이 行列의 第$(i,\ j)$元素가 s가 커짐에 따라 어떤 모양으로 변하는가를 알아보는 것은 바로 j번째 獨立變數가 i번째 物價項目에 미치는 時差構造를 알아보는 것이 된다. 이를 알아보기 위하여는

$$I-B = T\Lambda_1 T^{-1}$$

라는 관계와 이로부터 誘導되는

$$(I-B)^s = T\Lambda_1{}^s T^{-1};\ s=0,1,2,\cdots$$

라는 關係式에 留意할 필요가 있다. 이 關係를 위의 中間乘數行列에 代入하면 다음 式을 얻는다.

$$(I-B)^s B\Gamma = T\Lambda_1{}^s T^{-1} B\Gamma.$$

이 $n\times m$ 行列의 第$(i,\ j)$元素를 알아보기 위하여, $n\times n$ 行列 T의 第$(i,\ j)$元素를 t_{ij}라 하고, Λ_1의 i번째 對角元素를 λ_i라 하고, $n\times m$ 行列 $T^{-1}B\Gamma$의 第$(i,\ j)$元素를 $b_{ij}{}^*$라 하면, 그 中間乘數行列의 第$(i,\ j)$元素 $l_{ij}(s)$는,

$$l_{ij}(s) = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\lambda_k{}^s b_{kj}{}^*;\ s=0,1,2,\cdots$$

로 쓸 수 있다. 그런데

$$0<\lambda_i<1$$

이므로, s가 增加함에 따라 $l_{ij}(s)$는 持續的으로 減小한다. 즉 本模型에서 想定되는 時差分布構造는 幾何分布時差와 類似한 형태를 취한다고 말할 수 있다.

VII. 結論 및 要約

物價의 變動은 物價外的인 外生變數에 의해서 영향을 받지만, 그 波及過程에서는 物價를 構成하는 項目들, 예컨대 原資材, 資本財, 消費財의 物價들이 서로 영향을 주고 받게 된다고 볼 수 있다. 이런 過程을 거친 物價의 變動이 어떤 抽象的인 經濟主體 예컨대 國民經濟의 最適化意志에 의해서 發現되는 것이라고 본다면, 우리는 物價水準 및 物價變動率의 函數로서의 不利益函數라는 것을 想定할 수 있고, 이 不利益의 極小化行動의 結果 物價指數의 各項目의 時間經路가 伸縮的 加速度模型의 形態로 주어질 수 있음을 보았다. 그리고 이러한 방법으로 誘導된 模型은 그 自體內에 여러가지 特性을 내포하고 있어서, 그것들이 經濟的 意味를 가진 內容으로 解釋될 수 있었다. 이 模型이 提示하는 여러가지 假說들은 앞으로 實證的인 硏究를 통하여 檢證되고 發展되면서 우리의 經濟現實을 보다 잘 理解하고 대처하는 데 기여하게 될 것이다.

參 考 文 獻

〔1〕 鄭基俊, 「生產要素에 대한 需要의 伸縮的 加速度模型」, 『經濟論集』, 18 (1979. 6).

〔2〕 Eisner, R., and R. Strotz, "Determinants of Business Investments," CMC, *Impacts* *of Monetary Policy*, 1963.

〔3〕 Lee, Sung Soon, "Ridge Estimation of the Flexible Accelerator Model of Interrelated Factor Demand," Ph. D. Dissertation, Claremont Graduate School, 1976.

〔4〕 Nadiri, M.I., and S. Rosen, "Interrelated Factor Demand Functions," *American Economic Review*, 57 (Feb. 1967).

〔5〕 Nadiri, M.I., and S. Rosen, *A Disequilibrium Model of Demand for Factors of Production*, NBER, 1974.