골드펠드・콴트의 異分散性 檢定에 있어서의 檢定力의 性質과 觀測値의 數

鄭 基 俊*

<目　次>

I. 序　論

計量經濟學에서 線形回歸模型의 異分散性(heteroscedasticity)을 검정하는 방법으로서는 여러 가지가 알려져 있다. 그러나 그 중 가장 널리 사용되는 檢定方法은 골드펠드와 콴트 〔1〕가 제시한 F 檢定方法이다. 이 방법에 따르면 檢定力을 높이기 위해서는 우리가 이용할 수 있는 觀測値를 모두 사용하지 않고 일부 관측치를 제외시키는 것이 유리하다는 것이 알려져 있다. 이 사실은 골드펠드와 콴트의 논문 〔1〕에서 이미 지적이 되었고, 또 그들의 1972년 단행본 〔2〕에서도 이 문제가 다루어지고 있다. 즉 그들은 중간 관측치를 탈락시키되 몇 개를 탈락시키는 것이 檢定力의 관점에서 가장 좋은 결과를 가져올 수 있는가를 實驗的인 방법으로 分析하고 그 결과를 제시하고 있는 것이다.

골드펠드・콴트의 탈락 관측치의 最適數에 관한 분석결과는 主要 계량경제학 교과서에서도 그대로 인용되고 있는데 예컨대 존스톤 〔5, p. 219〕, 저지 等 〔6, pp. 148-149 및 7, p. 422〕, 코웃소얀니스 〔8, p. 186〕 및 타일 〔9, p. 199〕 등을 들 수 있다. 즉 이 교과서들에서는 골드펠드가 제시한 대로, 관측치의 총수(n)가 30개인 경우에는 최적탈락수(n_0)는 8개 (또는 4개), n이 60개인 경우에는 n_0는 16개(또는 10개)라고 인용하고 있을 뿐 이에 대해서 아무런 異議를 제기하지 않고 있는 것이다.

* 本硏究所 硏究員, 서울大學校 經濟學科 副敎授

골드펠드·콴트가 제시한 결과는 그들의 특수한 모의실험에서 얻은 것이다. 그런데 그들의 모의실험절차에는 흠이 있는 것으로 보인다. 그리하여 본논문에서는 우선 그들의 모의실험 자체의 문제점을 밝히고, 중간 탈락 관측치의 數의 변화가 檢定力에 어떤 경로를 통하여 영향을 미치는가를 分析한 다음, 이를 바탕으로 하여, 檢定力을 높이기 위한 관측치의 最適脫落數가 얼마여야 할 것인가를 밝히고자 한다.

II. 골드펠드·콴트 檢定과 그 檢定力

다음과 같은 線形模型을 고려해 보자.

$$y=X\beta+\varepsilon,\quad \varepsilon\sim N(0, D^2). \tag{1}$$

여기서 y는 $n\times 1$의 確率變數벡터이며, X는 $n\times k$의 非確率變數行列이다. 그리고 D는 $n\times n$의 陽定符號인 對角行列이다. 이 模型에서 等分散性(homoscedasticity)의 가설을 歸無假說이라 하면, 그 귀무가설은 다음과 같이 表現된다.

$$H_0: D^2=\sigma^2 I_n,\quad 0<\sigma^2<\infty. \tag{2}$$

그리고 異分散性의 對立假說은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$H_a: D^2=\sigma^2 H^2,\quad 0<\sigma^2<\infty. \tag{3}$$

여기서 σ^2은 未知의 陽數이며, H는 $n\times n$의 陽定等號 對角行列로서, 그 對角元素는 차례로 $h_1, h_2, \cdots, h_n$이다. 그리고 이 元素들은 旣知의 量으로 가정한다. 그리고 이 對角元素들로 이루어지는 $n\times 1$ 벡터를 h로 나타내기로 한다. 즉 다음과 같이 定義한다.

$$h=[h_1, h_2, \cdots, h_n]'. \tag{4}$$

골드펠드와 콴트 〔1〕에 의하면, 그들의 異分散性 檢定의 檢定節次는 다음과 같다.

(1) 觀測値의 配列을 h_i의 오름次順으로 한다. 편의상 우리는 模型 (1)이 이미 이 방법으로 배열되어 있다고 가정한다. 그리하여 다음과 같은 不等式이 성립한다.

$$0<h_1\leqq h_2\leqq\cdots\leqq h_n<\infty. \tag{5}$$

(2) 탈락되어야 할 中間 관측치들의 數 n_0가 주어졌다 하고, 模型 (1)을 다음과 같이 分割 表現한다.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_0 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_0 \\ X_2 \end{bmatrix}\beta+\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_0 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}.$$

여기서 分割된 벡터 및 行列의 行의 數는 차례로 m_1, n_0, m이 된다. 단 이들 간에는 다음 관계가 성립한다.

$$m=\frac{n-n_0}{2}.$$

단 편의상 n과 n_0는 모두 짝수로 가정한다.

(3) 처음 m개의 관측치와 나중 m개의 관측치에 별도로 최소자승법을 적용하여 회귀분석을 행하고, 그 殘差벡터 e_1과 e_2를 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{aligned} e_1&=M_1y_1=M_1\varepsilon_1, \\ e_2&=M_2y_2=M_2\varepsilon_2. \end{aligned} \tag{6}$$

단, 여기서 行列 M_1과 M_2는

$$M_1=I_m-X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1',$$
$$M_2=I_m-X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'$$

로 정의된다.

(4) 檢定統計量 F를 다음과 같이 構成한다.

$$F=\frac{e_1'e_1}{e_2'e_2}. \tag{7}$$

歸無假說 H_0 하에서 이 검정통계량 F는 自由度가 $(m-k,\ m-k)$인 F分布를 하게 된다. 왜냐하면 H_0 하에서 式(7)의 분자와 분모는 서로 독립이며, 이들을 각각 σ^2으로 나눈 것은 모두 自由度가 $m-k$인 χ^2分布를 하게 되기 때문이다. 그리하여 有意水準 α에서의 F分布의 임계치를 F_α라 하면, $F>F_\alpha$이면 귀무가설을 받아 들이고, $F<F_\alpha$이면 귀무가설 H_0를 기각한다.

이 檢定에서 對立假說 H_a가 구체적으로 주어져 있을 때, 이 대립가설 하에서의 檢定力은 다음과 같이 정의된다.

$$\text{Power}=\Pr(F<F_\alpha\,|\,H_a). \tag{8}$$

이와 같이 定義되는 檢定力의 구체적인 計算을 할 수 있도록 式 (7)의 分子와 分母를 다음과 같이 變形해 보자.

$$e_1'e_1=\varepsilon_1'M_1\varepsilon_1=z_1'H_1M_1H_1z_1,$$
$$e_2'e_2=\varepsilon_2'M_2\varepsilon_2=z_2'H_2M_2H_2z_2.$$

단, H_1과 H_2는 각각 $m\times m$의 對角行列로서, H_1의 對角元素는 $h_1, h_2, \cdots, h_m$이고, H_2의 對角元素는 $h_{n-m+1},\ h_{n-m+2}, \cdots, h_n$이다. 그리고 z_1과 z_2는 서로 獨立인 標準正規分布를 하는 確率벡터로서 다음 성질을 갖는다.

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}\equiv z\sim \mathrm{N}(0, I_{2m}). \tag{9}$$

그러면 검정통계량 F는 다음과 같이 나타내어 진다.

$$F=\frac{z_1'H_1M_1H_1z_1}{z_2'H_2M_2H_2z_2}.$$

그리고 檢定力은 다음과 같이 計算될 수 있다.

$$\text{Power}=\Pr(F<F_\alpha)=\Pr(z_1'H_1M_1H_1z_1-F_\alpha\cdot z_2'H_2M_2H_2z_2<0).$$

이를 달리 쓰면 다음과 같다.

$$\text{Power}=\Pr(z'M^*z<0). \tag{10}$$

단 $2m\times 2m$ 行列인 M^*는 다음과 같이 정의된다.

$$M^*=\begin{bmatrix} H_1M_1H_1 & 0 \\ 0 & -F_\alpha\cdot H_2M_2H_2 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

그리하여 檢定力은 순전히 行列 M^*에 의존하게 된다.

行列 H가 既知의 行列이므로 M^* 역시 既知의 行列이다. 따라서 式 (10)에 따라서 檢定力을 評價하는 데는 임호프 〔3〕의 方法을 사용할 수 있다. 이 방법은 正規變量에 관한 2次形式의 分布를 數値積分法에 의해 계산할 수 있게 해 주는 방법이다. 이 과정에서 알 수 있는 것은 검정력이 行列 M^*의 元素들의 절대치에는 아무런 영향도 받지 않는다는 사실이다. 이는 行列 H의 對角元素들로 이루어지는 벡터 h에서, h의 元素의 相對的인 값만이 문제가 될 뿐, 그 절대치는 檢定力과 아무런 관련도 없다는 것을 뜻한다.

III. 골드펠드・콴트에 의한 檢定力 計算

골드펠드와 콴트 〔2〕는 모의실험적인 방법을 써서, 탈락관측치의 수의 변화가 검정력에 어떠한 영향을 미치는가를 고찰하고 이로부터 탈락관측치의 수가 얼마일 때 검정력이 최대로 되는가를 알아보고 있다. 그들이 모의실험 대상으로 삼은 경우는 다음과 같다.

(a) $n=30$ 또는 $n=60$.

(b) $n_0=0,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16$.

(c) $k=2$. 이 가운데 하나는 상수항이고, 하나는 독립변수인데, 이 독립변수의 관측치벡터 x는 대립가설 H_a 하에서의 異分散類型을 나타내는 벡터 h와 同一한 것으로 본다.

(d) 벡터 $x(=h)$는 각각 100번씩 시행하는 모의실험 과정에서는 不變으로 固定되며, 각각의 벡터 $x(=h)$ 자체는 平均 μ_h와 標準偏差 σ_h의 組合 (μ_h, σ_h)를 갖는 均一分布(uniform distribution)로부터 抽出된 값을 元素로 한다. 단, 고려된 平均은 $\mu_h=10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50$이며, 標準偏差는 $\sigma_h=5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30$이다.

(e) 각각의 벡터 $x(=h)$에 관해서 ε에 관한 크기 n인 100개의 標本을 標準正規分布로부터 生成하여 사용한다.

이러한 모의실험 절차를 따라서 그들은 F의 값을 계산하고, 檢定力의 추정치로서는, 有意水準 5%에서 허위인 귀무가설 H_0가 기각되는 경우의 相對度數를 계산하여 이를 사용하였다. 그리고 그 결과는 그들의 表 2 및 3에 제시되어 있다.

앞절의 끝에서 언급한 바와 같이 검정력은 h의 元素의 절대치에 의존하지 않는다. 그러므로 (μ_h, σ_h)의 組合이 (20, 5)인 경우와 (40, 10)인 경우에 생성되는 h벡터들은 검정력의 관점에서는 구별이 되지 않고, 계산된 검정력에 차이가 있다면 그것은 실험과정에서 벡터 h를 선정할 때 또는 벡터 ε을 생성할 때 발생하는 標本變化일 뿐이다. 그러므로 檢定力과 관련해서 본다면 $(\mu_h. \sigma_h)$의 組合에서 중요한 것은 變化係數(coefficient of variation)인

$$(cv)_h \equiv \frac{\sigma_h}{\mu_h}$$

라고 해야 할 것이다.

골드펠드와 콴트는 추측하기를 σ_h가 μ_h보다 상대적으로 증가하면 검정력이 증가할 것이라고 하면서, 그들의 表 2와 3이 이 추측을 뒷받침해 준다고 말하고 있다. 이를 보다 쉽게 확인하기 위하여 그들의 表 2와 3을 재배열한 것이 우리의 〈表 1〉과 〈表 2〉이다. 이 표들에서 보면 그들의 추측은 거의 확인이 되고 있다. 그 추측에 맞지 않은 경우가 조금 있지

〈表 1〉 골드펠드·콴트의 檢定力에 관한 模擬實驗 結果(n=30)

$(cv)_h$	(μ_h, σ_h) 組合	n_0				
		0	4	8	12	16
0.100	(50, 5)	0.150	0.150	0.150	0.150	0.060
0.125	(40, 5)	0.140	0.140	0.100	0.130	0.080
0.167	(30, 5)	0.240	0.190	0.240	0.210	0.210
0.200	(50, 10)	0.370	0.360	0.330	0.240	0.190
0.250	(20, 5), (40, 10)	0.440	0.470	0.485	0.465	0.410
0.300	(50, 15)	0.450	0.490	0.510	0.510	0.500
0.333	(30, 10)	0.820	0.840	0.810	0.820	0.730
0.375	(40, 15)	0.860	0.920	0.920	0.800	0.800
0.400	(50, 20)	0.920	0.900	0.900	0.870	0.810
0.500	(30, 15), (40, 20), (50, 25)	0.970	0.977	0.980	0.983	0.967
0.560*	(32.82, 18.37)	0.980	0.990	0.990	0.990	0.990
0.566*	(51.48, 29.14)	0.990	0.990	1.000	1.000	1.000

주 : (1) *표가 붙은 두 경우는 (μ_h, σ_h)組合이 각각 (30, 20), (50, 30)인 것에 대응하는 均一分布를 下限이 1이 되도록 절단한 것이다. 이것은 表에 나타난 파라미터를 갖는 均一分布가 된다.

(2) (μ_h, σ_h)組合이 複數個인 경우는 골드펠드·콴트의 表 3의 數値를 平均해 주었다.

〈表 2〉 골드펠드·콴트의 檢定力에 관한 模擬實驗 結果(n=60)

$(cv)_h$	(μ_h, σ_h) 組合	n_0				
		0	4	8	12	16
0.100	(50, 5)	0.310	0.290	0.290	0.310	0.310
0.125	(40, 5)	0.290	0.290	0.300	0.320	0.340
0.167	(30, 5)	0.500	0.480	0.510	0.480	0.500
0.200	(50, 10)	0.550	0.560	0.550	0.610	0.580
0.250	(20, 5)(40, 10)	0.720	0.735	0.715	0.740	0.775
0.300	(50, 15)	0.920	0.920	0.920	0.940	0.960
0.333	(30, 10)	0.960	0.970	0.970	0.960	0.960
0.375	(40, 15)	0.970	0.980	0.970	0.970	0.970
0.400	(50, 20)	0.960	0.960	0.960	0.970	0.970
0.500	(10, 5), (20, 10), (30, 15), (40, 20), (50, 25)	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

주 : (1) (μ_h, σ_h)組合이 複數個인 경우는 골드펠드·콴트의 表 4의 數值를 平均해 주었다.

만, 그것은 h 및 ε을 선정하는 과정에서 나타나는 標本變化 때문이라고 볼 수 있다. 그러나 그들이 사용한 방법을 가지고서는 확연한 답을 얻을 수 없다.

이 모의실험을 통하여 골드펠드와 콴트는 검정력을 높이기 위하여 탈락될 관측치의 수 n_0는 얼마로 하는 것이 바람직한가 하는 문제의 답을 얻고자 하였다. 그리하여 그들은 n_0를 고정시킨 채 상이한 (μ_h, σ_h) 組合들에 관해서 平均檢定力을 계산하고, 이 平均檢定力이 가장 큰 n_0를 잠정적으로 最適 n_0로 삼기로 하고 있다. 그러나 검정력을 극대화하는 n_0가 $(cv)_h$에 의존하는 경우에는, 상이한 $(cv)_h$에 걸쳐서 검정력을 평균하여 최적의 n_0를 정한다는 그들의 절차는 합리화될 수 없다. 과연 우리의 〈表 1〉과 〈表 2〉를 보면 우리의 이와 같은 의심을 어느 정도 뒷받침해 주는 것같다. 그러나 이 문제 역시 그들의 실험적인 방법에 의해서는 명확한 답을 얻을 수 없다.

IV. 檢定力에 관한 體系的 考察

탈락되는 관측치의 數 n_0와 變化係數 $(cv)_h$가 달라짐에 따라 檢定力이 어떻게 달라지는가를 體系的으로 고찰하려 할 때는, h의 標本變化와 ε의 標本變化는 모두 妨害物이 될 뿐 우리의 고찰에 아무런 도움도 되지 못한다. 그러므로 h의 標本變化에 의한 영향과 ε의 標本變化에 의한 영향은 둘 다 제거함이 바람직하다.

異分散類型을 나타내는 벡터 h의 標本變化 영향을 제거하기 위해서는 h의 원소로서 均一分布로부터의 관측치를 취하는 대신, 단순히 $h_i=a+b_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$를 쓸 수 있다. 단 a

와 b는 우리가 선택한 $(cv)_h$의 값과 一致하도록 선정되어야 할 상수이다. 여기서 균일분포로부터의 크기 n인 표본의 i번째 順序統計量인 h_i의 기대치를 항상 $a+b_i$의 형태로 쓸 수 있다는 것을 고려하면, 이 절차는 그 순서통계량을 그 기대치로 대치한 것으로 해석할 수 있다.

攪亂項벡터 ε의 선정에 따른 標本變化를 제거하기 위해서는 제II절의 마지막에서 설명한 대로 式 (10)을 임호프 〔3〕의 방법에 따라 계산하면 된다.

이렇게 h 및 ε의 標本變化를 제거하고 검정력의 성질을 체계적으로 정확하게 고찰할 수 있는 바, 〈表 3〉 및 〈表 4〉는 이 결과를 보여주는 것이다. 이 표로부터 우리는 다음 사실을 발견할 수 있다.

(1) 檢定力은 n이 증가하면 증가한다.

(2) n이 증가함에 따라 最適 n_0 역시 증가한다.

(3) 變化係數$(cv)_h$가 증가함에 따라 檢定力은 單調增加한다.

(4) 變化係數$(cv)_h$가 증가함에 따라 最適 n_0는 單調增加한다.

性質 (1)과 (2)는 골드펠드와 콴트 〔1〕가 관찰한 성질과 같다. 性質 (3)은 그들이「推測」했던 성질이다. 그러나 여기서는 이 性質이 이 檢定의 確定的인 기본성질임을 분명히 알 수 있다.

性質 (4)는 골드펠드와 콴트가 전혀 인식하지 못하고 있던 성질이다. 이 성질을 인식하지 못하였기 때문에 그들은, 앞에서 언급한 대로, $(cv)_h$의 차이도 고려하지 않은 채 (μ_n, σ_h)의 組合에 걸쳐서 n_0를 고정시킨 채 檢定力의 平均을 구해서 이를 비교함으로써 最適 n_0를 결정하고자 했던 것이다. 그리하여 그들은 最適 n_0가 n=30일 때는 8, n=60일 때는 16

〈表 3〉 檢定力의 精密計算 結果(n=30)

$(cv)_h$	n_0							
	0	4	6	8	10	12	14	16
0.100	0.147	0.151	0.151	0.150	0.147	0.144	0.138	0.130
0.125	0.185	0.191	0.192	0.190	0.187	0.181	0.173	0.161
0.167	0.261	0.273	0.274	0.272	0.266	0.258	0.244	0.225
0.200	0.332	0.348	0.351	0.349	0.343	0.331	0.314	0.287
0.250	0.447	0.472	0.478	0.477	0.471	0.457	0.435	0.400
0.300	0.565	0.598	0.607	0.609	0.604	0.590	0.566	0.527
0.333	0.641	0.678	0.689	0.693	0.689	0.677	0.655	0.615
0.400	0.756	0.799	0.812	0.820	0.821	0.816	0.801	0.771
0.500	0.890	0.927	0.938	0.945	0.948	0.948	0.943	0.931

〈表 4〉 檢定力의 精密計算 結果($n=60$)

$(cv)_h$	n_0					
	0	12	16	20	24	28
0.100	0.228	0.244	0.245	0.244	0.239	0.232
0.125	0.302	0.326	0.328	0.326	0.320	0.310
0.167	0.444	0.482	0.486	0.484	0.477	0.462
0.200	0.562	0.609	0.615	0.614	0.607	0.591
0.250	0.722	0.775	0.783	0.784	0.779	0.765
0.300	0.841	0.889	0.896	0.899	0.897	0.889
0.333	0.895	0.936	0.942	0.944	0.944	0.939
0.400	0.957	0.981	0.984	0.986	0.987	0.986
0.500	0.990	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999

이라고 하였다〔1, p. 545〕.

그러나 우리는 〈表 3〉에서 다음 사실을 알 수 있다. 즉 $n=30$일 때, 最適 n_0는, $(cv)_h \leqq 0.250$일 때는 일률적으로 8보다 작고, $(cv)_h \geqq 0.400$일 때는 일률적으로 8보다 크다. 또 〈表 4〉에 의하면, $n=60$일 때, 最適 n_0는 $(cv)_h \geqq 0.200$일 때는 일률적으로 16보다 크다.

V. 最適n_0의 決定을 위한 實驗式

〈表 3〉 및 〈表 4〉로부터 우리는 最適 n_0를 얻기 위한 實驗式을 다음과 같이 구할 수 있다. n_0^*를 다음과 같이 정의하자.

$$n_0^*=n_0^*(n, (cv)_h)=\frac{n+30}{3}\cdot(cv)_h+\frac{n-24}{3}. \tag{12}$$

그러면 이 식과 〈表 3〉 및 〈表 4〉를 검토함으로써 우리는 다음과 같이 말할 수 있다.[(1)] 즉 檢定力을 最大로 하는 最適 n_0는 근사적으로, n_0^*에서 가장 가까운 짝수이다. 이 관계는 적어도 n이 30과 60 사이에 있을 때는 매우 타당한 진술이라고 보아도 무방하다. 또 이 실험식에 의한 最適 n_0의 결정이 實用的으로 매우 유용하리라고 생각되는 근거는, 역시 〈表 3〉 및 〈表 4〉에서 보는 바와 같이 最適 n_0 근방에서의 봉우리의 모습이 그리 뾰족하지 않다는 사실에 있다. 즉 약간의 오차가 있더라도 검정력에는 큰 손상을 입히지 않기 때문이다. 그러나 골드펠드·콴트의 固定된 n_0($n=30$일 때 8, $n=60$일 때 16을 말함)는 그리 좋은

(1) $n=30$ 및 $n=60$일 때 n_0^*는 다음과 같다.
$n_0^*(30, (cv)_h)=20\cdot(cv)_h+2.$
$n_0^*(60, (cv)_h)=30\cdot(cv)_h+12.$

기준이 되지 못하는 것이 분명하다.

골드펠드·콴트 檢定力과 관련해서는 h는 旣知의 벡터이고 이것은 앞에서 본 바와 같이 그 元素가 均一分布의 順序統計量의 기대치와 유사한 것으로 볼 수 있는 측면이 있으므로, $(cv)_h$는 근사적으로 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$(cv)_h = \frac{h_n - h_1}{h_n + h_1} \Big/ \sqrt{3}. \tag{13}$$

이 식은 h의 원소가 균일분포의 순서통계량의 기대치와 같을 때는 정확한 관계를 나타낸다. 이 관계를 이용하여 n_0^*를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$n_0^* = n_0^*(n, h_1, h_2) = \frac{n+30}{3\sqrt{3}} \; \frac{h_n - h_1}{h_n + h_1} + \frac{n-24}{3}. \tag{14}$$

이 경우에도 n_0^*에서 가장 가까운 짝수가 最適 n_0로 보아도 무방하다.

VI. 結 論

本論文에서 우리는 골드펠드·콴트의 異分散性 檢定의 檢定力의 여러 가지 性質을 고찰하였다. 특히 여기서 우리는 變化係數 $(cv)_h$가 증가할 때, 檢定力을 가장 크게 하는 最適 n_0는 단조증가한다는 사실을 발견하였고, 이를 근거로 하여 우리는 最適 n_0를 정하는 데 使用할 수 있는 實驗式 (12) 또는 (14)를 유도하였다.

本論文에서는 $k=2$인 경우에 국한하여 논의를 전개하였다. k가 2보다 큰 경우에 대한 논의는 다음 기회로 미룬다.

參 考 文 獻

[1] Goldfeld, S.M., and R.E. Quandt, "Some Tests for Homoscedasticity," *Journal of the American Statistical Association*, 60(1965), pp. 539-547.

[2] Goldfeld, S.M., and R.E. Quandt, *Nonlinear Methods in Econometrics*, Amsterdam: North-Holland, 1972.

[3] Imhof, P.J., "Computing the Distribution of Quadratic Forms in Normal Variables," *Biometrika*, 48(1961), pp. 419-426.

[4] Jeong, Ki-Jun, "An Investigation of the Power of Some Classical Tests in Econometrics," Unpublished Doctoral Dissertation, Claremont Graduate School, 1976.

〔5〕 Johnston, J., *Econometric Methods*, 2nd ed., New York: McGraw-Hill, 1972.

〔6〕 Judge, G.G., W.E. Griffiths, R.C. Hill, and T.C. Lee, *The Theory and Practice of Econometrics*, New York: Wiley & Sons, 1980.

〔7〕 Judge, G.G., W.E. Griffiths, R.C. Hill, and T.C. Lee, *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*, New York: Wiley & Sons, 1982.

〔8〕 Koutsoyiannis, A., *The Theory of Econometrics*, 2nd ed., London: Macmillan, 1977.

〔9〕 Theil, H., *Principles of Econometrics*, New York: Wiley & Sons, 1971.