不確實性下에서의 意思決定期間의 길이에 관하여

——價格設定的인 銀行企業의 境遇를 中心으로——

鄭 雲 燦*

〈目 次〉

I. 序論—意思決定期間分析의 意味

期間分析(period analysis)이란 연속적인 경제현상을 몇 개의 구획으로 구분하여 각 期間內에서의 경제현상을 연구하고, 나아가 期間과 期間 사이의 관련에도 관심을 가지는 경제학 연구의 한 방법론이라고 볼 수 있다. 그러나 이제까지의 經濟分析에 있어서 期間(period)에 대한 고려는 그리 만족할 만한 것은 아니었다. 마샬(A. Marshall)은 產出量과 生產要素雇傭의 可變性 여부에 따라 期間을 短期(short-run), 長期(long-run), 最長期(very-long-run) 등으로 기능적으로 분류했고, 폴리(D. Foley)는 期間의 길이(length of period)는 이론적인 模型의 定性的인 특성에서 볼 때 그리 중요한 변수가 아니라는 명제를 주장하기도 하였다.[1] 그리하여 이제까지의 經濟分析에 있어서 期間의 길이는 대부분 外生的으로 주어진 것으로 간주하고 논의가 전개되어 왔다. 그러나 期間의 구획이 변화함에 따라 經濟主體의 最適化行動의 패턴이 변화한다는 점은 부인할 수 없는 현실이다. 더구나 不確實性이 존재하는 경우에 있어서 이와 不可分의 관계에 있는 期間區劃의 문제는 점점 더 관심의 대상이 되지 않을 수 없다.

이 글에서는 이처럼 오랫동안 정당한 주목을 끌지 못했던 期間分析의 문제에 촛점을 맞

* 本硏究所 硏究員, 서울大學校 經濟學科 副敎授. 本論文은 現代基金의 財政的 支援을 받아 作成된 것이다. 이를 위해 계산을 도와주고 여러가지 오류를 지적해 준 全聖寅君에게 감사한다.

(1) D. Foley, "On Two Specifications of Asset Equilibrium in Macroeconomic Models," *Journal of Political Economy*, April 1975 참조.

추어 不確實性下에서의 經濟主體의 最適化行動이 意思決定期間의 길이와 어떤 관련을 맺고 있는가를 살펴 보기로 한다. 문제를 좀 더 구체적으로 살펴 보기 위해 특별히 價格設定者(price setter)로 행동하는 銀行企業의 最適化行動을 중점적으로 조명해 보기로 하자. 이 때 銀行의 意思決定期間을 銀行이 預金 및 貸出利子率을 한번 설정해 놓고, 그것을 그대로 유지하는 期間이라 정의한다면, 우리의 문제의식은 銀行이 얼마나 자주 利子率을 변경하는 것이 적절한가로 귀착될 것이다.

II. 模型의 設定

1. 不確實性과 銀行行爲

不確實性이 銀行行爲의 기초임을 갈파하고, 在庫理論的인 접근(inventory theoretic approach)을 통해 이 관계를 해명하려고 시도한 최초의 經濟學者로는 에지워드(F. Edgeworth)를 들 수 있다.[(2)] 에지워드가 상정한 銀行企業의 행위는 다음과 같이 요약해 볼 수 있다.

期待利潤(expected profit)을 극대화하려는 은행가는 期初에 일정한 액수의 預金을 보유하고 있다. 그는 이를 貸出과 有價證券의 보유에 각각 사용하고 여분의 금액은 支拂準備金의 형식으로 現金으로 보유하게 된다. 그런데 期初에 보유하고 있던 預金은 언제라도 引出될 수 있으므로 은행가는 일종의 不確實性에 직면하게 된다. 만일 引出要求額이 사소한 금액이어서 보유중인 現金으로도 능히 뒷받침해 줄 수 있다면 별 문제는 없을 것이다. 그러나 引出額이 現金保有額을 초과할 경우에는 은행가는 보유중인 有價證券을 담보로 자금을 빌어서 이에 대처해야 할 것이다. 이 때 필연적으로 去來費用이 발생하게 될 것이다. 만일 引出要求가 매우 커서 有價證券의 처분만으로는 해결되지 않는다면, 은행가는 최후의 수단으로 中央銀行의 대출창구에서 기존의 貸出金을 담보로 자금을 융통할 것이다. 이것 역시 去來費用을 수반하는데, 中央銀行의 貸出金利는 일종의 벌칙금의 성격을 띠고 있으므로 이 때의 費用은 증권처분시의 費用보다 크다고 볼 수 있다.

이 때 은행가가 직면한 문제는 다음과 같다. 現金의 보유는 아무런 所得을 보장해 주지 않으므로 은행가는 이를 가능한 한 줄이려고 할 것이다. 그러나 現金으로 引出要求를 충족시키지 못할 경우에는 去來費用을 부담하고서야 자금을 융통할 수 있으므로 現金의 보유를 무조건 줄이기는 어렵다. 그러므로 만일 引出額이라는 確率變數의 確率分布를 은행가가 알

(2) F. Edgeworth, "The Mathematical Theory of Banking," *Journal of Royal Statistical Society*, March 1888.

수 있다면, 은행가는 이를 기초로 적정한 수준의 貸出 및 有價證券保有額(그리고 그에 따른 現金保有額)을 정하여 期待利潤을 극대화하려 할 것이다.

이상이 대체적으로 살펴 본 에지워드의 문제라고 할 수 있다. 不確實性의 분석을 위해 銀行企業의 연구에 確率理論을 접목시킨 에지워드의 연구는 분명 19세기의 貨幣金融理論에 不朽의 공헌을 했다고 평가해도 무방할 것이다. 그러나 에지워드는 문제를 정립하기는 했으나 이를 미적분법 등의 방법을 통해 계량적으로 분석하는 데까지는 이르지 못한 아쉬움을 남기고 있다.

2. 模型의 設定

이제부터는 위에 언급한 에지워드의 문제정립방식에 근거하여 最適化模型을 설정하되, 그 과정에서 意思決定期間의 개념도 아울러 고려해 보기로 한다. 다만 분석의 단순화를 위해 有價證券의 존재를 무시하고 은행은 예금과 대출만을 취급한다고 가정하기로 한다.[3]

이제 어떤 가상적인 商業銀行(commercial bank)의 대차대조표가 〈表 1〉과 같다고 하자. 즉 銀行은 預金을 받아서 이 중 일부를 貸出해 주고 나머지는 現金으로 보유하게 된다.

〈表 1〉 商業銀行의 貸借對照表

資　　産(Assets)	負　　債(Liabilities)
l(貸出金) c(現　金)	d(預金額)

이 商業銀行은 預金 및 貸出市場에서 價格設定者로 행동하며 그 때의 預金 및 貸出函數는 각각 다음과 같다고 가정한다.

(1) 預金函數

銀行의 預金額은 i를 預金利子率이라 할 때,

$$d=\beta_1+\beta_2 i-\theta \quad (\text{단,} \quad \beta_1, \beta_2>0) \tag{1}$$

로 표시할 수 있다. $\beta_2>0$인 것은 預金金利를 높일수록 銀行으로 預金이 몰리기 때문이고, $i=0$이어도(즉 모든 예금이 利子를 지불하지 않는 要求拂預金의 형태를 띠더라도) 銀行으로 預金이 들어 오기 때문에[4] $\beta_1>0$이 성립한다. θ는 예기치 못한 預金引出의 크기를 나타내는 確率變數인데, 여기서는 그 밀도함수(probability density function)가

(3) 이는 어떤 본질적인 변화도 초래하지 않는다. 참고로 有價證券까지를 고려한 最適化模型에 관해서는 補錄 A를 참조할 것.

(4) 예를 들면 當座預金(checking account)같은 것은 $i=0$이어도 얼마든지 銀行에 새로운 구좌가 개설되는 것을 볼 수 있다.

$$f(\theta)=\frac{1}{2\boldsymbol{Z}}\ (\text{단},\ -\boldsymbol{Z}\leq\theta\leq\boldsymbol{Z},\ \boldsymbol{Z}>0) \tag{2}$$

와 같은 분포를 한다고 가정하자. 여기서 $\boldsymbol{Z}$는 θ가 움직이는 범위의 상한과 하한을 규정해 주는데, 그 크기는 銀行의 意思決定期間의 길이에 의존한다고 볼 수 있다. 이에 대해서는 뒤에서 다시 언급하기로 한다.

(2) 貸出函數

貸出을 받은 사람들의 支拂不能(default)을 고려하지 않을 경우, 貸出利子率을 r이라 하면, 銀行의 貸出函數는

$$l=\alpha_1-\alpha_2 r\ (\text{단},\ \alpha_1, \alpha_2>0) \tag{3}$$

의 형태를 띠게 된다. 이는 貸出金利를 높이면 貸出金에 대한 需要는 줄어들고 $r=0$이면 貸出需要는 언제나 존재한다는 의미가 된다.

(3) 現　金

복식부기의 원리에 의해 〈表 1〉의 대차대조표의 양변의 합계는 언제나 균형을 이루어야 한다. 따라서

$$c\equiv d-l \tag{4}$$

이 성립하게 된다. 이제 (1)식과 (2)식을 이용해서 (4)식을 약간 변형해 보기로 하자. (2)식에 의하면 $E[\theta]=0$이므로

$$\begin{aligned} E(d) &= \beta_1+\beta_2 i-E(\theta) \\ &= \beta_1+\beta_2 i \end{aligned} \tag{1$'$}$$

가 성립하고 이를 정리하면

$$d=E(d)-\theta \tag{5}$$

과 같이 쓸 수 있다. 이제 (5)식을 (4)식에 대입하여

$$c=E(d)-\theta-l \tag{4$'$}$$

을 얻게 된다.

(4) 意思決定期間의 길이와 確率分布

이제 이 銀行의 意思決定期間의 길이를 T라 하자. 이 말은 이 銀行은 최초에 책정한 i와 r을 T 동안 유지한 후 다시 새로운 i'과 r'을 책정한다는 것을 의미한다. 이 새로운 i'과 r'은 또 다른 T' 동안 계속 유지될 것이다. 이런 경우 만일 T가 매우 긴 시간이라면, 銀行은 주위여건이 계속 변화함에도 불구하고 i와 r을 조정하지 않은 채 상당히 오랜 기간(즉 T) 그대로 유지하고 있다는 말이 된다. 그럴 경우 예기치 못한 引出額(혹은 θ가 －일 경우에는 預入額)의 범위는 증가할 수 밖에 없을 것이다.

반대로 만일 T가 작다면 이는 銀行이 주위의 여건변화에 민감히 반응하여 수시로 i와 r을 조정한다는 것을 의미하므로 θ가 움직이는 범위(즉 $\boldsymbol{Z}$)는 감소할 것이라고 생각해 볼 수 있다. 즉 $\boldsymbol{Z}$는 T의 증가함수인 것이다. 우리는 특별히

$$\boldsymbol{Z}=zT \quad (\text{단, } z>0) \tag{6}$$

로 가정하기로 한다. 여기서 z는 意思決定期間의 변화가 不確實性의 정도를 얼마만큼 변화시켜 줄 수 있는가를 나타내는 指標라고 해석할 수 있겠다.

(5) 費用函數

위에서 본 바와 같이 T를 줄일 경우 θ가 움직이는 범위가 제한되기 때문에 不確實性이 감소함을 알 수 있다. 그러나 T를 줄일 경우 은행가는 i와 r을 자주 변동시켜야 하는데 이에는 費用이 따르게 된다.

우선 생각할 수 있는 費用으로는 새로운 i와 r을 책정하는 데 소요되는 探索費用(search cost)이다. 우선 자주 α_1, α_2, β_1, β_2 등의 계수값을 추정해야 하고 그에 따라 새로운 적정수준의 i'과 r'을 계산해야 한다. 뿐만 아니라 이를 일반 고객에게 홍보하는 데에도 추가적인 費用이 소요될 것이다. 이를 廣告費用(advertising cost)라고 이름붙일 수 있겠다. 마지막으로 잦은 金利變動에 따른 고객들의 심리적 불안감을 들 수 있다. 이는 일종의 心理的費用(psychological cost)인데, 본질적으로 安定性을 指向해야 할 銀行活動이 金利의 잦은 변동으로 말미암아 고객들로부터 신뢰감을 잃게 될 수 있다. 만일 이런 이유로 인해 고객들이 좀 더 안심하고 돈을 맡기고 빌릴 수 있는 다른 銀行을 찾게 된다면 이는 하나의 費用으로 작용하게 될 것이다.

이런 면을 종합해 볼 때 T를 줄이는 데 드는 비용($\boldsymbol{C}$)은 T와 반비례의 관계에 있음을 알 수 있다. 따라서

$$\boldsymbol{C}=\frac{a}{T} \quad (\text{단, } a>0) \tag{7}$$

로 가정하기로 한다.

(6) 罰則金

우리는 앞에서 θ의 값이 클 경우 c만으로는 이 引出要求가 충족되지 않아 有價證券이나 貸出金을 담보로 急錢을 융통하는 경우를 논의한 바 있다. 여기서는 有價證券의 존재는 무시하기로 가정하였으므로, 이처럼 急錢이 필요한 경우에는 貸出金을 담보로 中央銀行에서 借入해 오는 경우만을 다루기로 한다. 이 때 借入金에 대해서는 高率의 벌칙금이 부과되는데, 借入金 1원당 n씩 벌칙금이 징수된다고 가정한다. 이런 가정 하에서의 벌칙금의 크기는

$$n(\theta-E(c))=n(\theta-E(d)+l) \tag{8}$$

이 된다.

3. 目的式의 도출

이제 이상의 조건하에서 期待利潤을 극대화하려는 銀行企業이 어떻게 행동하는지 살펴보자. 銀行은 우선 預金函數와 貸出函數를 추정한다. 아울러 費用函數도 추정해 둔다. 이를 근거로 하여 銀行은 期待利潤을 극대화하는 적절한 i_0^*, r_0^*, T_0^*를 결정한다. 그리하여 그때부터 T_0^* 동안에는 i_0^*와 r_0^*를 그대로 유지하다가 T_0^*가 지나면 그 때 다시 預金 및 貸出函數를 추정하고 費用函數를 계산해 내게 된다. 그리하여 이를 근거로 다시 새로운 i_1^*, r_1^*, T_1^*를 선택하게 된다. 여기서 유의하여야 할 점은 銀行이 定期的으로 i와 r을 변경시킬 때의 期間의 크기를 결정하는 것이 당면문제가 아니고,(5) 단지 바로 직후의 i와 r의 지속기간을 결정하는 점이 관심의 대상이라는 것이다.(6) 따라서 이 경우에는 처음에 결정된 T_0^*와 그 다음에 결정된 T_1^*의 값이 일치하지 않을 수도 있다. 즉 銀行은 不定期的으로 利子率을 변동시킬 수도 있는 것이다.(7)

그런데 이처럼 T를 결정하는 데 있어서 또 한 가지 주의해야 할 점이 있다. 그것은 (6)식에 의해 T가 θ가 움직이는 범위인 $\boldsymbol{Z}$의 크기에 영향을 미친다는 점이다. 만일 T가 크다면 이는 i와 r이 오랫동안 조정되지 않은 것이므로 $\boldsymbol{Z}$의 값은 커지게 된다. 이렇게 되면 θ가 큰 값을 가져 銀行에 現金不足現象이 나타나게 될 수도 있다. 이럴 경우에는 단위당 n씩의 벌칙금을 지불하고 中央銀行에서 자금을 借入해 올 수 밖에 없게 된다. 반대로 T가 작다면 θ가 現金不足現象을 초래할 만큼 큰 값을 가질 가능성은 점점 줄어들게 된다. 만일 T가 충분히 작아서 $\boldsymbol{Z}$가 은행이 보유하고 있는 現金額보다도 작게 된다면 θ가 어떤 값을 취하더라도 銀行이 現金不足을 경험하지는 않을 것이다. 즉 이 경우에는 벌칙금의 존재는 銀行의 관심사 밖에 놓인 문제가 될 것이다.

이제 이상의 사실을 종합하여 銀行의 극대화 대상인 目的式을 2종류로 나누어 設定해 보자.

(1) 擬似的 確實性의 世界

우선 T가 매우 작아서 $\boldsymbol{Z}$가 銀行의 現金保有額보다 작게 되는 경우를 생각해 볼 수 있다. 이 때에는 비록 θ가 $\boldsymbol{Z}$의 범위 안에서 변화한다는 점에서는 不確實性이 존재하기는 하지만,

---

(5) 즉 예를 들어 매 3개월마다 정기적으로 이자율을 변경할 것인가 혹은 6개월마다 정기적으로 변경할 것인가의 문제가 아니라는 의미이다.

(6) 예를 들면 「이번에 결정된 $i_0^*=5\%$, $r_0^*=6\%$는 1년 6개월간 지속하고 이 기간이 만료되면 그때 가서 다시 i_1^*, r_1^*, T_1^*을 결정하자.」는 식이다.

(7) 예를 들어 처음 기간은 1년 6개월 동안이었어도, 다음의 새로운 i_1^*, r_1^*은 6개월 동안만 지속될 수도 있다는 말이다.

그런 θ의 변화가 별 의미를 갖지 못한다는 점에서는 確實性의 세계와 별로 다를 것이 없다고 보겠다. 따라서 우리는 이를 擬似的 確實性(pseudo-certainty)의 세계라고 부르기로 하자.

(4)′식에 의하면 $c\geq 0$이라는 말은

$$c=E(d)-\theta-l\geq 0$$

즉,

$$-\boldsymbol{Z}\leq\theta\leq E(d)-l \tag{9}$$

과 동등하게 된다. 즉 θ가 $E(d)-l$보다 작으면 언제나 $c\geq 0$이 되는 것이다. 따라서

$$\boldsymbol{Z}\leq E(d)-l \tag{10}$$

이 성립한다면 擬似的 確實性은 보장된다. (6)식을 (10)식에 대입하면

$$zT\leq E(d)-l$$

즉,

$$T\leq\frac{1}{z}[E(d)-l] \tag{11}$$

을 얻게 된다. 즉 T를 $\frac{1}{z}[E(d)-l]$보다 더 낮게 잡으면 θ가 어떤 값을 취해도 벌칙금은 물지 않게 된다.

이 때의 期待利潤 $E(\pi)_1$은

$$E(\pi)_1=rl-iE(d)-\frac{a}{T} \tag{12}$$

의 형태를 띠게 될 것이다.

(2) 純粹한 不確實性의 世界

이제는 T가 $\frac{1}{z}[E(d)-l]$보다 큰 경우를 생각해 보자. 이 때에는 θ가 취하는 값에 따라 期待利潤函數의 구간을 나누어야 한다. 즉

$$E(\pi)_2=\int_{-Z}^{E(d)-l}\left[rl-id-\frac{a}{T}\right]\frac{1}{2\boldsymbol{Z}}d\theta+\int_{E(d)-l}^{Z}\left\{\left[rl-id-\frac{a}{T}\right]-n\left[\theta-E(d)+l\right]\right\}\frac{1}{2\boldsymbol{Z}}d\theta \tag{13}$$

의 형태가 된다. (13)식을 보면 θ가 $E(d)-l$보다 작게 되면 $c\geq 0$이 되어 벌칙금을 물지 않지만, θ가 $E(d)-l$보다 크게 되면 그 초과분당 n씩의 벌칙금을 지불하게 됨을 알 수 있다.

이제 (13)식을 정리해 보면

$$E(\pi)_2=\int_{-Z}^{Z}\left[rl-id-\frac{a}{T}\right]\frac{1}{2\boldsymbol{Z}}d\theta-\int_{E(d)-l}^{Z}n\left[\theta-E(d)+l\right]\frac{1}{2\boldsymbol{Z}}d\theta$$

$$=rl-iE(d)-\frac{a}{T}-\int_{E(d)-l}^{Z}n\left[\theta-E(d)+l\right]\frac{1}{2\boldsymbol{Z}}d\theta \tag{13$'$}$$

가 된다. 여기에 $Z=zT$를 대입하고 적분을 계산하면 최종적으로

$$E(\pi)_2=rl-iE(d)-\frac{a}{T}$$
$$-\frac{n}{2}\left\{\frac{1}{2}zT-\left[E(d)-l\right]+\frac{1}{2zT}\left[E(d)-l\right]^2\right\} \quad (14)$$

이 성립하게 된다.

결국 銀行企業의 극대화문제는 다음과 같이 요약해 볼 수 있다.

$$\underset{i,r,T}{\text{Max}}\ E(\pi)=\begin{cases}E(\pi)_1, \text{ if } 0<T\leq\frac{1}{z}\left[E(d)-l\right].\\ E(\pi)_2, \text{ if } T>\frac{1}{z}\left[E(d)-l\right].\end{cases} \quad (15)$$

이제 이 극대화 문제를 풀기에 앞서 몇 가지 가정을 해 보자. 期待되는 預金額과 現金保有額, 그리고 貸出額 등은 음수가 되지 않는다는 것이 그것이다. 이를 수식으로 정리해 보면,

$$\left.\begin{array}{l}E(d)=\beta_1+\beta_2 i\geq 0\\ l=\alpha_1-\alpha_2 r\geq 0\\ E(c)=E(d)-l\geq 0\end{array}\right\} \quad (16)$$

로 표현될 수 있다.

III. 極大化問題의 分析

1. 擬似的 確實性의 경우

이제 극대값을 알아 보기 위하여 $E(\pi)_1$을 i, r 및 T로 편미분해 보자.

$$\frac{\partial E(\pi)_1}{\partial i}=-\beta_1-2\beta_2 i. \quad (17)$$

$$\frac{\partial E(\pi)_1}{\partial r}=\alpha_1-2\alpha_2 r. \quad (18)$$

$$\frac{\partial E(\pi)_1}{\partial T}=\frac{a}{T^2}. \quad (19)$$

우선 (17)식을 보면 β_1, β_2가 모두 양수이고 i 역시 음의 값을 취할 수 없으므로 $\partial E(\pi)_1/\partial i<0$임을 알 수 있다. 즉 i를 내릴수록 $E(\pi)_1$은 증가한다는 의미가 된다. 그런데 i는 0보다 더 작아질 수는 없으므로

$$i^*=0 \quad (20)$$

가 성립한다. 즉 균형상태 하에서 만일 擬似的 確實性이 지배하고 있다면 銀行은 모두 要求拂預金[8]만을 취급하게 된다는 점을 알 수 있다.

다음에 (18)식을 0로 놓음으로 해서

$$r^* = \frac{\alpha_1}{2\alpha_2} (>0) \tag{21}$$

를 얻게 된다. 그리고 (19)식을 살펴 보면 $\partial E(\pi)_1/\partial T > 0$임을 알 수 있다. 즉 동일한 i^*, r^*에 대하여 T를 증가시킬수록 $E(\pi)_1$은 증가한다는 것이다. 이는 T를 증가시켜도 銀行의 收入側面에는 아무런 변화가 없는데 費用은 감소하기 때문이다. 그런데 $E(\pi)_1$은 $0 < T \leq \frac{1}{z}[E(d) - l]$의 구간에서 정의된 함수이므로

$$T^* = \frac{1}{z}[E(d)^* - l^*] \tag{22}$$

임을 알 수 있다.

이제는 $E(\pi)_2$에 대해서 살펴 보기로 하자. 銀行의 진정한 극대이윤은 $E(\pi)_1$과 $E(\pi)_2$의 극대값 중에서 더 큰 값이 될 것이다.

2. 純粹한 不確實性의 경우

$E(\pi)_2$에 관한 극대화의 필요조건들은 다음과 같다.

$$\frac{\partial E(\pi)_2}{\partial i} = -\beta_1 - 2\beta_2 i - \frac{n}{2}\left[-\beta_2 + \frac{[E(d) - l]}{zT} \cdot \beta_2\right]$$

$$= -\beta_1 - 2\beta_2 i + \frac{n\beta_2}{2zT}\Big[zT - [E(d) - l]\Big] = 0. \tag{23}$$

$$\frac{\partial E(\pi)_2}{\partial r} = \alpha_1 - 2\alpha_2 r - \frac{n}{2}\left[-\alpha_2 + \frac{[E(d) - l]}{zT} \cdot \alpha_2\right]$$

$$= \alpha_1 - 2\alpha_2 r + \frac{n\alpha_2}{2zT}\Big[zT - [E(d) - l]\Big] = 0. \tag{24}$$

$$\frac{\partial E(\pi)_2}{\partial T} = \frac{a}{T^2} - \frac{n}{2}\left[\frac{z}{2} - \frac{[E(d) - l]^2}{2zT^2}\right]$$

$$= \frac{1}{T^2}\left\{a - \frac{n}{4}\left[zT^2 - \frac{1}{z}[E(d) - l]^2\right]\right\} = 0. \tag{25}$$

이제 우선 (25)식으로부터 $\left.\frac{\partial E(\pi)_2}{\partial T}\right|_{T=[E(d)-l]/z}$을 구해 보자.

$$\left.\frac{\partial E(\pi)_2}{\partial T}\right|_{T=[E(d)-l]/z} = \frac{1}{T^2}\left[a - \frac{n}{4}[zT^2 - zT^2]\right] = \frac{a}{T^2} > 0, \tag{26}$$

임을 알 수 있다. 즉 擬似的 確實性의 세계와 純粹한 不確實性의 경계에서는 T를 증가시

(8) 여기서는 $i=0$인 預金과 要求拂預金을 동일시하였다. 그러나 물론 현실적으로는 要求拂預金이라 하더라도 $i>0$일 수 있다.

킬 경우 期待利潤이 증가함을 알 수 있다. 그런데 $E(\pi)_1$의 극대값은 양쪽 세계의 경계인 $T=\frac{1}{z}[E(d)-l]$ 위에서 달성되었다. 이로 미루어 볼 때 우리는 $E(\pi)_2$의 극대값이 $E(\pi)_1$의 그것보다 더 크다는 점을 알 수 있다. 따라서 이제부터는 모든 관심을 $E(\pi)_2$에 집중시키기로 한다.

(23)에 $-\alpha_2$를 곱하고 (24)식에 β_2를 곱해서 서로 더하면

$$\alpha_2\beta_1+2\alpha_2\beta_2 i+\beta_2\alpha_1-2\beta_2\alpha_2 r=0$$

즉,

$$r^*=i^*+\frac{\alpha_2\beta_1+\beta_2\alpha_1}{2\alpha_2\beta_2}(>i) \tag{27}$$

를 얻게 된다. 다시 말해서 균형상태 하에서는 r^*가 언제나 i^*보다 크게 될 뿐만 아니라 a, n, z 등의 외생변수의 변화에 대한 i^*와 r^*의 변화분은 동일한 크기를 갖는다는 점도 알 수 있다.

한편 (25)식에 T^2을 곱하고 정리하면

$$a-\frac{n}{4}\left[zT^2-\frac{1}{z}[E(d)-l]^2\right]=0$$

즉,

$$zT^2=\frac{4a}{n}+\frac{1}{z}[E(d)-l]^2$$

$$\therefore\ T^*=\sqrt{\frac{4a}{nz}+\frac{1}{z^2}[E(d)-l]^2} \tag{28}$$

을 얻는다. 이 때 $\frac{4a}{nz}>0$이므로 T^*는 $\frac{1}{z}[E(d)-l]$보다 큼을 알 수 있다. 즉 $E(\pi)_2$에서의 극대값은 $E(\pi)_1$의 극대값보다 크다는 것을 다시 한 번 확인할 수 있다.

3. 比較靜學分析

우선 주어진 식들을 좀 더 간단히 정리해 보자.

$$E(d)-l=\beta_1+\beta_2 i-\alpha_1+\alpha_2 r \tag{29}$$

인데 여기에 (27)식을 대입하면

$$E(d)-l=\beta_1+\beta_2 i-\alpha_1+\alpha_2\left(i+\frac{\alpha_2\beta_1+\beta_2\alpha_1}{2\alpha_2\beta_2}\right)$$

$$\equiv(\alpha_2+\beta_2)i+K \tag{30}$$

$$\left(\text{단, } K\equiv\beta_1-\alpha_1+\frac{\alpha_2\beta_1+\beta_2\alpha_1}{2\beta_2}\right)$$

로 정리할 수 있다. 이를 (23)식과 (28)식에 넣고 변형하면

$$\begin{cases} n\beta_2[zT-(\alpha_2+\beta_2)i-K]=2zT(\beta_1+2\beta_2 i) & (31)\\ z^2T^2=\dfrac{4za}{n}+[(\alpha_2+\beta_2)i+K]^2 & (32)\end{cases}$$

을 얻게 된다. 이를 연립하여 풀면 $T^*=T^*(a,n,z)$, $i^*=i^*(a,n,z)$를 얻게 되고, (27)식에 의해 r^*도 얻게 된다. 여기서는 외부여건인 a, n, z 등의 변화가 均衡意思決定期間인 T^*에 어떤 영향을 미치는지만을 살펴 보기로 한다.

(1) T^*와 a의 관계

우선 (32)식을 a로 미분한 후 $\frac{\partial i^*}{\partial a}$에 관하여 정리하면[(9)]

$$\frac{\partial i^*}{\partial a}=\frac{z^2T\frac{\partial T^*}{\partial a}-\frac{2z}{n}}{[E(d)-l](\alpha_2+\beta_2)} \tag{33}$$

을 얻는다. 이를 (31)식을 미분한 식에 대입하고 $\frac{\partial T^*}{\partial a}$에 관하여 정리하면

$$\frac{\partial T^*}{\partial a}\Big[n\beta_2(\alpha_2+\beta_2)\overbrace{[zT-(E(d)-l)]}^{(+)}+2[E(d)-l](\alpha_2+\beta_2)(\beta_1+2\beta_2 i)$$
$$+4\beta_2 z^2T^2\Big]=2\beta_2(\alpha_2+\beta_2)+\frac{8\beta_2}{n}zT \tag{34}$$

$$\therefore\ \frac{\partial T^*}{\partial a}>0 \tag{34)'}$$

를 얻게 된다. 이제 이 식의 경제적 의미를 알아 보자. a가 크다는 것은 T를 줄이는 데 있어서 費用이 많이 소요된다는 의미이다. 이럴 경우에 (34)'식이 의미하는 바는 T^*를 줄이려고 하지 않는다는 것이다. 즉 費用이 늘어날 경우에는 무리해서 T^*를 낮추려고 하지 않는다고 볼 수 있다.

(2) T^*와 n의 관계

(32)식을 n으로 미분한 뒤에 $\frac{\partial i^*}{\partial n}$에 관하여 정리하면

$$\frac{\partial i^*}{\partial n}=\frac{2nz^2T\frac{\partial T^*}{\partial n}+[z^2T^2-(E(d)-l)^2]}{2n[E(d)-l](\alpha_2+\beta_2)} \tag{35}$$

를 얻고, 이를 (31)식을 n으로 미분한 식에 대입하여 $\frac{\partial T^*}{\partial n}$에 관하여 정리하면

$$\frac{\partial T^*}{\partial n}\Big[2n^2\beta_2(\alpha_2+\beta_2)z\overbrace{[zT-(E(d)-l)]}^{(+)}+4nz(\beta_1+2\beta_2 i)(\alpha_2+\beta_2)[E(d)-l]$$
$$+8n\beta_2 z^3T^2\Big]$$
$$=\underbrace{-n\beta_2(\alpha_2+\beta_2)[zT-(E(d)-l)]^2}_{(-)}\underbrace{-4\beta_2 zT[z^2T^2-(E(d)-l)^2]}_{(-)} \tag{36}$$

$$\therefore\ \frac{\partial T^*}{\partial n}<0 \tag{36)'}$$

를 얻는다. (36)'식의 경제적 의미는 무엇인가? n이란 借入金에 부과되는 벌칙금의 비율

(9) 이하의 자세한 계산에 관해서는 補錄 B를 참조할 것.

이므로 n이 증가한다는 것은 現金不足에 대한 처벌이 무거워진다는 것을 의미한다. 따라서 이 경우 銀行은 벌칙금을 부담할 가능성을 줄이려고 할 것이고 이는 구체적으로 T^*를 줄이려는 노력으로 나타나게 된다. 왜냐하면 T^*를 줄일 경우 不確實性이 감소되어 θ가 큰 범위에서 움직일 가능성이 줄어들기 때문이다. 이런 이유로 해서 T^*와 n은 서로 반대방향으로 움직인다고 볼 수 있다.

(3) T^*와 z의 관계

(32)식을 z에 관하여 미분한 뒤 $\frac{\partial\partial i^*}{\partial z}$에 관하여 정리하면

$$\frac{\partial i^*}{\partial z}=\frac{z^2T\frac{\partial T^*}{\partial z}+\left[zT^2-\frac{2a}{n}\right]}{[E(d)-l](\alpha_2+\beta_2)} \tag{37}$$

를 얻는다. 이를 (31)식을 z로 미분한 식에 대입한 뒤 $\frac{\partial T^*}{\partial z}$에 관하여 정리하면

$$\begin{aligned}\frac{\partial T^*}{\partial z}&\Big[n\beta_2(\alpha_2+\beta_2)z[\underbrace{zT-(E(d)-l)}_{(+)}]+2z(\beta_1+2\beta_2 i)[E(d)-l](\alpha_2+\beta_2)\\&+4\beta_2 z^3T^2\Big]\\&=\overbrace{-n\beta_2(\alpha_2+\beta_2)\frac{1}{2z}\Big[[zT-(E(d)-l)\Big]^2}^{(-)}\\&\underbrace{-2T(\beta_1+2\beta_2 i)[E(d)-l](\alpha_2+\beta_2)}_{(-)}\underbrace{-4\beta_2 zT\left(zT^2-\frac{2a}{n}\right)}_{(-)}\end{aligned} \tag{38}$$

$$\therefore\ \frac{\partial T^*}{\partial z}<0 \tag{38)'$$

를 얻는다. z가 증가한다는 것은 T^*를 변화시킴에 따라 Z가 현저히 변화한다는 것을 의미한다. 즉 T^*와 不確實性의 관계가 밀접해져서 T^*를 줄일 경우 不確實性은 현저하게 감소하게 된다. (38)′식의 의미는 T^*를 줄임에 따라 不確實性이 감소하는 효과가 크면 클수록 T^*는 감소한다는 것이다.

IV. 結　論

우리는 이제까지 不確實性下에서 價格設定者로 행동하는 銀行企業이 意思決定期間을 어떻게 결정하는지 살펴 보았다. 이제까지의 논의에서 나타난 결론들은 다음과 같다.

① $E(\pi)_1$에서의 극대값보다 $E(\pi)_2$에서의 극대값이 더 크다. 이는 期待利潤의 극대화는 무리하게 T를 줄여서 擬似的 確實性의 세계에서 행동하는 것보다는 적당한 정도의 不確實

性을 감수할 때 더 잘 달성될 수 있다는 것을 보여 준다.

② r^*는 언제나 i^*보다 크고 $\frac{\partial r^*}{\partial a}=\frac{\partial i^*}{\partial a}$ 등이 성립한다. 즉 外生變數의 변화에 대해 r^*와 i^*는 그 변화방향 뿐만 아니라 변화분의 크기도 일치하게 된다.

③ T^*는 T^*를 줄이는 데 소요되는 費用이 작을수록, T^*를 줄이지 않는 데서 연유하는 벌칙금이 무거울수록, 그리고 T^*를 줄임에 따라 不確實性이 감소하는 폭이 클수록 감소한다. 이는 궁극적으로 T를 감소시키는 것이 θ라는 確率變數의 움직임을 제약하는 데에서 연유한다.

補 錄

A. 意思決定期間의 길이에 관한 一般的인 模型의 定立

本文에서는 논의를 간단히 하기 위하여 有價證券의 존재를 무시하였다. 이제 이를 포함한 일반적인 模型을 定立해 보기로 한다.(10)

① 우선 預金函數는 다음과 같은 일반적인 형태로 상정해 보자.

$$d=D(i)-\theta \quad (\text{단, } D'(i)>0). \tag{A-1}$$

② 그리고 θ의 확률밀도함수인 $f(\theta;T)$는 아래와 같은 특성을 가지고 있다.

$$\begin{cases} -zT\leq\theta\leq zT. \\ E[\theta]=0. \\ \dfrac{d(\mathrm{Var}[\theta])}{dT}>0. \end{cases} \tag{A-2}$$

이 때 (A-2)식의 마지막 식의 의미는 T가 길어지면 길어질수록 θ의 분포가 평균주위에서 멀리 퍼져 있을 가능성이 증가한다고 대체적으로 파악해 볼 수 있다.

③ 貸出函數는

$$l=l(r) \quad (\text{단, } l'(r)<0) \tag{A-3}$$

과 같이 상정해 볼 수 있다.

④ 有價證券은 市場에서 얼마든지 구입할 수 있으며 證券保有의 收益率인 g는 市場에서 결정되어 外生的으로 주어진다고 본다.

⑤ 有價證券의 保有額을 s라고 하면 $d\equiv c+l+s$이어야 하므로,

$$\begin{aligned} c&\equiv d-l-s \\ &=E(d)-l-s-\theta \end{aligned} \tag{A-4}$$

(10) 여기서는 一般模型의 定立에 그치고, 구체적인 분석은 피한다. 그 이유는 一般模型의 分析도 우리가 本文에서 논의한 방식과 동일하게 分析하면 되기 때문이다.

로 쓸 수 있다. 이제 銀行이 保有하려고 하는 現金의 기대값은 +라는 가정을 추가적으로 도입하면

$$E(c)=E(d)-l-s(\geq 0) \tag{A-5}$$

가 성립하게 된다.

⑥ 意思決定期間을 T로 유지할 때의 費用函數는,

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}(T) \ (\text{단, } \boldsymbol{C}'(T)<0, \ \boldsymbol{C}''(T)>0) \tag{A-6}$$

의 형태를 갖는 것으로 가정한다. (A-6)식의 의미는 T를 줄일 경우 費用은 증가하는데 費用의 증가율은 T를 줄임에 따라 누적적으로 증가한다고 해석할 수 있다.

⑦ 預金의 引出要求가 의외로 커서 銀行이 急錢을 필요로 할 경우에 銀行은 우선 保有中인 有價證券을 담보로 자금을 융통한다. 이 때 빌린 자금 1원당 m의 費用을 부담한다고 본다. 만일 이 자금으로도 引出要求가 충족되지 않을 경우에는 단위당 n씩의 벌칙금을 지불하고 中央銀行에서 貸出金을 담보로 借入해 온다고 가정한다. (그리고 이 때 $m<n$으로 가정하기로 한다.)

그러면 이제 θ가 어떤 범위에서 값을 취할 때 急錢이 필요하게 되는지 살펴 보자. 우선 $c\geq 0$이면 急錢은 필요하지 않게 된다. 즉

$$c=E(d)-l-s-\theta\geq 0,$$

다시 말해서

$$-zT\leq\theta<E(d)-l-s(=E(c)) \tag{A-7}$$

의 범위에서는 銀行에서 평균적으로 保有하고 있는 現金만으로도 대처가 가능하다.

이제 부득이 有價證券을 담보로 제공하지 않으면 안되는 상황을 생각해 보자.

$$-s\leq c<0 \Leftrightarrow -s\leq E(d)-l-s-\theta<0$$

즉,

$$(E(c)=)E(d)-l-s<\theta\leq E(d)-l \tag{A-8}$$

의 범위에 있을 때는 現金不足額을 有價證券만의 처분에 의해 충당할 수 있다.

그런데 만일 θ가 매우 크다면 有價證券의 처분만으로는 문제가 해결되지 않는다. 이 경우는

$$c=E(d)-l-s-\theta<-s$$

즉,

$$E(d)-l<\theta\leq zT \tag{A-9}$$

와 같은 범위에서 θ가 움직이게 된다.

이제 구체적으로 目的式을 찾아보기로 하자. 우선 $zT \leq E(c)$ 즉 $0 < T \leq \frac{1}{z}[E(d)-l-s]$의 범위에서 움직이는 경우를 생각해 보자. 이 때 θ는 항상 (A-7)식과 같은 범위내에서만 움직일 것이므로 이 때는 急錢을 걱정할 필요가 없게 된다. 이 때의 銀行의 期待利潤은

$$E(\pi)_1 = rl + gs - iE(d) - C(T) \tag{A-10}$$

가 된다.

다음에는 $E(d)-l-s < zT \leq E(d)-l$ 즉 $\frac{1}{z}E(c) < T \leq \frac{1}{z}[E(d)-l]$의 범위에 T가 있을 경우를 보기로 하자. 이 때에는 急錢이 필요한 경우는 발생할 수 있으나 有價證券의 처분만으로 이에 대처할 수 있다. 이 때의 期待利潤은

$$E(\pi)_2 = E(\pi)_1 - m\int_{E(d)-l-s}^{zT} [\theta - E(d) + l + s] f(\theta; T)\, d\theta \tag{A-11}$$

가 된다.

이제 마지막으로 $zT > E(d)-l$ 즉 $T > \frac{1}{z}[E(d)-l]$의 경우를 생각해 보자. 이 때에는 中央銀行으로부터의 借入의 가능성도 고려해야 한다. 이 때의 期待利潤은

$$E(\pi)_3 = E(\pi)_1 - m\int_{E(d)-l-s}^{E(d)-l} [\theta - E(d) + l + s] f(\theta; T)\, d\theta$$

$$- \int_{E(d)-l}^{zT} [ms + n(\theta - E(d) + l)] f(\theta; T)\, d\theta \tag{A-12}$$

의 형태를 띠게 된다.

결국 銀行이 직면한 극대화 문제는 다음과 같이 요약될 수 있다.

$$\underset{i,r,s,T}{\mathrm{Max}}\ E(\pi) = \begin{cases} E(\pi)_1, & \text{if } 0 < T \leq \frac{1}{z}[E(d)-l-s]. \\ E(\pi)_2, & \text{if } \frac{1}{z}[E(d)-l-s] < T \leq \frac{1}{z}[E(d)-l]. \\ E(\pi)_3, & \text{if } \frac{1}{z}[E(d)-l] < T. \end{cases} \tag{A-13}$$

B. 本文 III-3에 나타난 比較靜學分析結果의 導出

극대화의 일차조건을 정리하면 다음과 같다.

$$z^2T^2 = \frac{4za}{n} + [(\alpha_2 + \beta_2)i + K]^2. \tag{32}$$

$$n\beta_2[zT - (\alpha_2 + \beta_2)i - K] = 2zT(\beta_1 + 2\beta_2 i). \tag{31}$$

(1) $\partial T^*/\partial a > 0$의 도출

우선 (32)식을 a에 관해서 미분하면,

$$2z^2T\frac{\partial T^*}{\partial a} = \frac{4z}{n} + 2[E(d)-l](\alpha_2 + \beta_2)\frac{\partial i^*}{\partial a} \tag{B-1}$$

를 얻고 이를 $\frac{\partial i^*}{\partial a}$에 관해 정리하면 (33)식을 얻게 된다. 또한 (31)식을 a로 미분하면,

$$n\beta_2\left[z\frac{\partial T^*}{\partial a}-(\alpha_2+\beta_2)\frac{\partial i^*}{\partial a}\right]=2z(\beta_1+2\beta_2 i)\frac{\partial T^*}{\partial a}+4\beta_2 zT\frac{\partial i^*}{\partial a} \qquad \text{(B-2)}$$

를 얻는다. 이제 위 식에 (33)식을 대입하면

$$n\beta_2\left[z\frac{\partial T^*}{\partial a}-\frac{1}{E(d)-l}\left[z^2T\frac{\partial T^*}{\partial a}-\frac{2z}{n}\right]\right]$$

$$=2z(\beta_1+2\beta_2 i)\frac{\partial T^*}{\partial a}+\frac{4\beta_2 zT}{[E(d)-l](\alpha_2+\beta_2)}\left[z^2T\frac{\partial T^*}{\partial a}-\frac{2z}{n}\right]. \qquad \text{(B-3)}$$

이제 이를 $\frac{\partial T^*}{\partial a}$에 관해 정리하면 本文의 (34)식을 얻게 된다. 여기서 지금 $E(c)=E(d)-l\geq 0$이고 $T>\frac{1}{z}[E(d)-l]$의 범위에 있다는 사실에 유의하면 $\frac{\partial T^*}{\partial a}>0$라는 (34)$'$식을 얻어낼 수 있다.

(2) $\frac{\partial T^*}{\partial n}<0$의 도출

우선 계산의 편의를 위해 (32)식의 양변에 n을 곱하면

$$nz^2T^2=4za+n[(\alpha_2+\beta_2)i+K]^2 \qquad (32)'$$

을 얻는다. 이제 (32)$'$식을 n에 관해 미분하면

$$z^2T^2+2nz^2T\frac{\partial T^*}{\partial n}=[E(d)-l]^2+2n[E(d)-l](\alpha_2+\beta_2)\frac{\partial i^*}{\partial n} \qquad \text{(B-4)}$$

을 얻는다. 이를 $\frac{\partial i^*}{\partial n}$에 관하여 정리하면 본문의 (35)식을 얻게 된다. 이제 (31)식을 n에 관하여 미분하면

$$\beta_2[zT-(E(d)-l)]+n\beta_2\left[z\frac{\partial T^*}{\partial n}-(\alpha_2+\beta_2)\frac{\partial i^*}{\partial n}\right]$$

$$=2z(\beta_1+2\beta_2 i)\frac{\partial T^*}{\partial n}+4zT\beta_2\frac{\partial i^*}{\partial n} \qquad \text{(B-5)}$$

을 얻게 된다. (B-5)식에 (35)식을 대입하면

$$\beta_2[zT-(E(d)-l)]+n\beta_2 z\frac{\partial T^*}{\partial n}-\frac{n\beta_2}{2n(E(d)-l)}$$

$$\times\left[2nz^2T\frac{\partial T^*}{\partial n}+[z^2T^2-(E(d)-l)^2]\right]$$

$$=2z(\beta_1+2\beta_2 i)\frac{\partial T^*}{\partial n}+\frac{4\beta_2 zT}{2n[E(d)-l](\alpha_2+\beta_2)}$$

$$\times\left[2nz^2T\frac{\partial T^*}{\partial n}+[z^2T^2-(E(d)-l)^2]\right] \qquad \text{(B-6)}$$

을 얻는다. 이를 $\frac{\partial T^*}{\partial n}$에 관하여 정리하면

$$\frac{\partial T^*}{\partial n}\left[2n^2\beta_2(\alpha_2+\beta_2)z[zT-(E(d)-l)]+4nz(\beta_1+2\beta_2 i)(\alpha_2+\beta_2)[E(d)-l]\right.$$

$$\left.+8n\beta_2 z^3T^2\right]$$

$$=-n\beta_2(\alpha_2+\beta_2)[h(T)]-4\beta_2 zT[z^2T^2-(E(d)-l)^2]$$

$$(\text{단, } h(T)=z^2T^2-(E(d)-l)^2-2(E(d)-l)[zT-(E(d)-l)]) \qquad \text{(B-7)}$$

이 된다. 그런데

$$h(T)=[zT+(E(d)-l)][zT-(E(d)-l)]-2(E(d)-l)(zT-(E(d)-l)]$$

$$=[zT-(E(d)-l)][zT+(E(d)-l)-2(E(d)-l)]$$

$$=[zT-(E(d)-l)]^2>0 \qquad \text{(B-8)}$$

이므로 (B-7)식의 우변은 −가 된다. 따라서 $\frac{\partial T^*}{\partial n}<0$라는 (36)′식이 성립하게 된다.

(3) $\frac{\partial T^*}{\partial z}<0$의 도출

(32)식을 z에 관해 미분하면

$$2zT^2+2z^2T\frac{\partial T^*}{\partial z}=2[E(d)-l](\alpha_2+\beta_2)\frac{\partial i^*}{\partial z}+\frac{4a}{n} \qquad \text{(B-9)}$$

를 얻고 이를 $\frac{\partial i^*}{\partial z}$에 관해 정리하면 (37)식을 얻게 된다. 한편 (31)식을 z에 관해 미분하면

$$n\beta_2\left[T+z\frac{\partial T^*}{\partial z}-(\alpha_2+\beta_2)\frac{\partial i^*}{\partial z}\right]$$

$$=2\left[T(\beta_1+2\beta_2 i)+z(\beta_1+2\beta_2)i\frac{\partial T^*}{\partial z}+zT2\beta_2\frac{\partial i^*}{\partial z}\right] \qquad \text{(B-10)}$$

을 얻게 된다. 이제 (B-10)식에 (37)식을 대입하면

$$n\beta_2 T+n\beta_2\left[z\frac{\partial T^*}{\partial z}-\frac{1}{[E(d)-l]}\left[z^2T\frac{\partial T^*}{\partial z}+\left(zT^2-\frac{2a}{n}\right)\right]\right]$$

$$=2T(\beta_1+2\beta_2 i)+2z(\beta_1+2\beta i)\frac{\partial T^*}{\partial z}$$

$$+\frac{4\beta_2 zT}{[E(d)-l](\alpha_2+\beta_2)}\left[z^2T\frac{\partial T^*}{\partial z}+\left(zT^2-\frac{2a}{n}\right)\right] \qquad \text{(B-11)}$$

을 얻게 된다. 이를 $\frac{\partial T^*}{\partial z}$에 관해 정리하면,

$$\frac{\partial T^*}{\partial z}\left[n\beta_2(\alpha_2+\beta_2)z[zT-(E(d)-l)]+2z(\beta_1+2\beta_2 i)[E(d)-l](\alpha_2+\beta_2)\right.$$

$$\left.+4\beta_2 z^3T^2\right]$$

$$=-n\beta_2(\alpha_2+\beta_2)[g(T)]-2T(\beta_1+2\beta_2 i)[E(d)-l](\alpha_2+\beta_2)$$

$$-4\beta_2 zT\left(zT^2-\frac{2a}{n}\right)$$

$$(\text{단, } g(T)=zT^2-\frac{2a}{n}-[E(d)-l]T) \tag{B-12}$$

를 얻는다. 그런데 (32)식을 변형하면

$$\frac{2a}{n}=\frac{1}{2z}\left[z^2T^2-(E(d)-l)^2\right]$$

이 되므로 이를 $g(T)$에 대입하면

$$\begin{aligned} g(T)&=zT^2-\frac{1}{2}zT^2+\frac{1}{2z}[E(d)-l]^2-[E(d)-l]T \\ &=\frac{1}{2}zT^2-[E(d)-l]T+\frac{1}{2z}[E(d)-l]^2 \\ &=\frac{1}{2z}\left[z^2T^2-2(E(d)-l)zT+(E(d)-l)^2\right] \\ &=\frac{1}{2z}\left[zT-(E(d)-l)\right]^2>0 \end{aligned} \tag{B-13}$$

을 얻는다. 결국 (B-12)식의 우변은 (−)가 되어 $\frac{\partial T^*}{\partial z}<0$라는 (38)′식이 성립하게 된다.