더빈-와트슨 檢定의 檢定力 分析

鄭 基 俊*

〈目 次〉

I. 序 論
II. 檢定力의 計算
III. 檢定力統計量 Q의 期待値의 分析
IV. 攪亂項의 自己相關類型과 檢定力
V. 說明變數의 自己相關類型과 檢定力
VI. (n, k)의 變化와 檢定力
VII. 結論—블래트버그와 틸만에 대한 批判

I. 序 論

다음과 같은 線形模型을 고려해 보자.

$$y = X\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathrm{N}(0, \ \sigma^2 P). \tag{1}$$

단, y는 $n\times 1$벡터이며, X는 $n\times k$行列로서 位數는 k이다. 그리고 P는 $n\times n$의 陽定符號行列로 다음과 같은 形態를 취한다고 본다.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & p_1 & p_2 \cdots & p_{n-2} & p_{n-1} \\ p_1 & 1 & p_1 \cdots & p_{n-3} & p_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n-2} & p_{n-3} & p_{n-4} \cdots & 1 & p_1 \\ p_{n-1} & p_{n-2} & p_{n-3} \cdots & p_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

또 X의 첫째 列은 모두 1로 구성되어 있으며, 나머지 列들도 모두 確率變數가 아닌 固定된 값을 취한다고 본다.

式(1)로 주어지는 模型에서 系列相關이 존재하는가의 여부를 檢定하기 위해서 사용하는 標準的인 방법은 歸無假說 H_0를

$$H_0 : P = I_n \tag{2}$$

* 本研究所 研究員, 서울大學校 經濟學科 副敎授. 本研究는 現代基金에서 研究費 補助를 받아 作成된 것임.

으로 놓고, 더빈과 와트슨〔3〕에 의해서 제안된 統計量 d를 計算하여, 이를 利用하여 檢定하는 것이다. 단, 더빈·와트슨 統計量 d는 다음과 같이 定義된다.

$$d=\frac{e'A_d e}{e'e}. \tag{3}$$

여기서 e는 模型 (1)의 最小自乘殘差벡터로서,

$$e=My=M\varepsilon \tag{4}$$

으로 定義되며, M은 또

$$M=I_n-X(X'X)^{-1}X'$$

으로 定義된다. $n\times n$行列 M이 $M^2=M=M'$의 성질을 充足하고, 또 $\mathrm{tr}M=n-k$의 성질을 가지고 있음은 잘 알려진 사실이다. 또 式(3)에서의 $n\times n$行列 A_d는 다음과 같이 定義된다.

$$A_d=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1\cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2\cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0\cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0\cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

歸無假說 (2)에 대해서 가장 흔하게 想定되는 對立假說은 1階自己回歸過程(first order autoregressive process, $AR(1)$)에 의해서 生成되는 系列相關類型이다. 더빈과 와트슨〔3〕은 이 對立假說에 대한 一樣的 最强不變의 檢定(uniformly most powerful invariant test)은 일반적으로는 存在하지 않으나, 回歸說明變數行列 X의 列들이 모두 A_d의 特性벡터들의 線形結合으로 되는 경우에는 그런 性質을 가지는 檢定이 存在하며, 그들의 d檢定은 바로 그런 性質을 가지는 檢定임을 보여 주었다.

블래트버그〔2〕는 이 分析을 擴張하여, $AR(1)$過程뿐만 아니라, 2階自己回歸過程($AR(2)$) 또는 1階移動平均過程(first order moving average process, $MA(1)$)에 의해 生成되는 系列相關의 경우에 대한 檢定力의 分析을 試圖하였다.[(1)] 그러나 그의 分析은 그 分析節次에 있어서나 그 유도된 結論에 있어서 모두 不滿足스럽다. 즉 그의 論文 第III節에 제시된 大標本의

---

(1) 여기에서의 各確率過程은 다음과 같이 定義된다.

$AR(1)$: $\varepsilon_t=\phi_1\varepsilon_{t-1}+u_t$.

$AR(2)$: $\varepsilon_t=\phi_1\varepsilon_{t-1}+\phi_2\varepsilon_{t-2}+u_t$.

$MA(1)$: $\varepsilon_t=u_t-\theta_1 u_{t-1}$.

단 u_t는 白色雜音過程(white noise process) $\{u_t\}$의 元素이다.

경우에 관한 性質들 중의 일부는 第IV節의 中規模標本을 이용한 경우에서 유도된 結果와 모순되고 있다. 예를 들면 그 論文 第III-B節에서 그는 다음과 같은 결론을 내리고 있다.

"Therefore the value of the power function for d will be greater for a second order serial correlation process $AR(2)$ if $\phi_2>0$ than for a first order serial correlation process $[AR(1)]$, but if $\phi_2<0$, the value of the power will be less for a second order process."

그러나 그 論文의 表 3a와 3b에 나타난 28가지 경우 중에서 오직 13개만이 이 진술에 합당하고, 15개는 不合當하다. 또 그 논문 第III-C節에서 그는 다음과 같은 결론을 내리고 있다.

"Thus, a first order moving average process $[MA(1)]$ can be as powerful as a first order serial correlation process with $0<p_1<0.5$. But in larger samples a first order serial correlation process is always more powerful than a first order moving average process when $0.5<p_1<1.0$."

그러나 그 論文의 表 4에서는, $MA(1)$過程이 $AR(1)$過程보다 항상 더 큰 檢定力을 보여 주고 있어서, 이 引用文의 첫째 문장은 너무 弱한 表現이 되어 있는 셈이다. 그리고 둘째 文章은 意味가 없다. 왜냐하면 意味있는 즉 逆轉可能한(invertible) $MA(1)$過程은 p_1이 0.5와 1 사이에서는 定義될 수조차 없기 때문이다.

더빈·와트슨 檢定의 檢定力은 說明變數行列 X에 의존한다. 즉 다른 條件이 모두 같다 할지라도 X의 차이 때문에 檢定力이 달라진다. 이 문제와 관련하여 틸만[6]은 X에 의존하지 않고 다만 그 階數인 n과 k에만 의존하는 檢定力의 上限과 下限을 確定하고자 한다. 그러나 그는 X의 類型과 檢定力 간에 존재하는 特定한 관계를 보여 주는 데는 실패하고 있다. 그의 論文에서 틸만은 다음과 같은 逆說的인 경우를 報告하고 있다.

"It might be thought strange that the upper bound for $\Pr(d<d_{U\alpha})$ is attained for $X=P_2K$ whereas $d_{U\alpha}$ gives a uniformly most powerful test when $X=P_1K$."(2)

그러나 그는 이 逆說에 대해서 아무런 만족스러운 答을 제시하지 못하고 있다.

요컨대 지금까지 아무도 d檢定의 檢定力의 성질에 관해서 滿足할 만한 分析을 해 낸 것같지 않다. 확실히 이 檢定力은 두개의 行列 X와 P에 의존한다. 이 論文에서 우리는 行列 P와 行列 X를 규정하는 파라미터들과 이 檢定力 간의 관계를 규명하고자 한다. 이 檢定力을

(2) 여기서 P_2K는 A_d의 가장 큰 特性根 $k-1$개에 대응하는 $k-1$개의 特性벡터들의 線形結合으로 이루어지는 $n\times k$行列이며, P_1K는 가장 작은 것들의 그것에 대응하는 $n\times k$行列이다.

결정하는 것이 무엇인가를 명확히 할 수 있으면, 우리는 이를 이용하여 計量經濟的 分析에 대하여 어떤 건전한 示唆를 얻을 수 있을 것이다.

II. 檢定力의 計算

檢定力을 定義하기 위하여 우리는 一般性을 상실함이 없이 行列 P에 관해서 다음과 같이 가정할 수 있다. 즉 P는 주어진 行列이며, P의 첫째 小對角線 상의 共通元素인 p_1은 $0<p_1<1$이라고 가정한다. 그러면, 이러한 P에 대응하는 檢定力은 다음과 같이 定義할 수 있다.

$$(\text{檢定力})=\Pr(d<d_\alpha|P). \tag{5}$$

여기서 d_α는 有意水準 α에서의 檢定의 臨界値이다.

自己相關行列 P는 陽定符號行列이므로, $P=SS'$의 관계를 충족하는 非特異行列 S가 존재하여, 攪亂項벡터 ε을 다음과 같이 v로 變換하여,

$$v=\sigma^{-1}S^{-1}\varepsilon\sim \mathrm{N}(0,I) \tag{6}$$

가 되게 할 수 있다. 즉 $n\times 1$벡터 v의 各元素는 서로 獨立인 標準正規變量이다. 그러면 檢定統計量 d를 定義하는 式(3)을 變形하여,

$$d=\frac{v'(S'MA_dMS)v}{v'(S'MS)v} \tag{7}$$

로 쓸 수 있다. 여기서 Q 및 A_d^*를

$$Q=v'S'A_d^*Sv; \tag{8}$$

$$A_d^*=M(A_d-d_\alpha I)M \tag{9}$$

으로 定義하면, 式(5)로 定義되는 檢定力은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(\text{檢定力})=\Pr(Q<0).$$

즉 檢定力은 確率變數 Q가 陰數로 되는 確率과 같다. 그러므로 Q는 檢定力統計量이라고 부를 수 있을 것이다.

檢定力統計量 Q는 式(8)에서 보는 바와 같이 標準正規變量의 2次形式으로 表現되므로, 直交變換(orthogonal transformation)에 의해서 이는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$Q=\sum_{i=1}^{n-k}\lambda_i z_i^2. \tag{10}$$

단 z_i^2들은 서로 獨立인 自由度가 1인 카이自乘($\chi^2(1)$)變量이며, λ_i들은 $S'A_d^*S$의 特性根들이다. 그런데 行列 $S'A_d^*S$와 PA_d^*의 特性根들은 모두 같으므로 λ_i들은 결국 PA_d^*

의 특성근들이라고 볼 수도 있다. 여기서 우리는, 檢定力이 自己相關類型에 의해서 영향을 받는 것은 P를 통해서이며, 說明變數行列 X에 의해서 영향을 받는 것은 行列 A_d^*를 통해서임을 알 수 있다. 그리고 또 式(9)에 의하면, A_d^*가 X에 의해서 영향을 받는 것은 M과 d_α를 통해서임을 알 수 있는데, 왜냐하면, d_α는 α가 주어지면, X에 의해서 완전히 결정되기 때문이다.

III. 檢定力統計量 Q의 期待値의 分析

第II節에서 우리는 우리의 檢定力이 檢定力統計量 Q가 陰數가 되는 確率과 같음을 알았다. 보통 이 確率 자체를 分析하는 것은 그리 쉽지 않다. 그러나 다른 事情이 동일하다면, 確率變數 Q의 期待値가 클수록 Q가 陰數가 될 確率은 작아진다고 말할 수 있다. 그러므로 적어도 一次的인 近似로서 檢定力의 分析 대신 檢定力統計量 Q의 期待値 $\mathrm{E}(Q)$의 分析을 해볼 수 있을 것이다. 그리하여 $\mathrm{E}(Q)$를 增加시키는 要因이 있으면, 그것은 檢定力을 감소시키는 要因으로 반대로 $\mathrm{E}(Q)$를 감소시키는 要因이 있으면 그것은 檢定力을 增加시키는 要因으로 파악할 수 있을 것이다. 이 절에서 우리는 Q의 期待値 $\mathrm{E}(Q)$가 行列 P와 X의 特性을 나타내는 特定한 스칼라들에 의해서 (적어도 近似的으로) 表現될 수 있음을 보이고자 한다.

檢定力統計量 Q의 期待値는 다음과 같이 된다. 즉 式(10)의 兩邊에 期待値를 취하면,

$$\mathrm{E}(Q)=\sum_{i=1}^{n-k}\lambda_i\mathrm{E}(z_i^2)=\sum_{i=1}^{n-k}\lambda_i=\mathrm{tr}PA_d^*$$

로 된다. 둘째 等式은 確率變數 z_i^2의 期待値가 모두 1이기 때문에 성립하며, 세째 등식은 特性根과 對角合(trace) 간에 성립하는 一般的인 등식이다.

行列 PA_d^*의 對角合을 評價하기 위하여, 우리는 특수한 분석도구로 小對角合과 時差行列이라는 개념을 먼저 설명하기로 한다.

먼저 s번째의 時差行列 D_s는 $n\times n$의 對稱行列로서, $(i+s,\ i)$번째 및 $(i,\ i+s)$번째 원소가 모든 $i=1, 2, \cdots, n-s$에 관하여 모두 1/2이고 나머지 원소는 모두 0인 行列로 定義한다. 예컨대 時差行列 D_1과 D_2는 다음과 같은 형태가 된다.

$$D_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\cdots 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\cdots 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\cdots 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0\cdots 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\cdots 1 & 0\end{pmatrix};$$

$$D_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\cdots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\cdots 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

이 時差行列들에 관해서는 다음과 같은 慣行을 채택하기로 한다.

$$D_0=I_n;$$

$$D_{-s}=D_s,\quad s=0,1,\cdots,\ n-1;$$

$$D_s=0,\quad s>n-1.$$

다음은 小對角合(minor trace)을 설명해 보자. $n\times n$對稱行列 A의 s번째 小對角合 tr_sA는 다음과 같이 定義된다.

$$\mathrm{tr}_sA=\sum_{i=1}^{n-s} a_{i+s,i}\ \left(\text{또는 } \sum_{i=1}^{n-s}a_{i,i+s}\right),\quad s=0,1,2,\cdots,n-s.$$

여기서 a_{ij}는 行列 A의 (i,j)번째 元素다. 이 定義로부터 0번째 小對角合은 對角合과 같음을 알 수 있고, 또 行列 A가 對稱임을 고려하면 小對角合은 一般的으로 보통의 對角合과 時差行列을 써서 다음과 같이 표현된다는 것도 쉽게 알 수 있다.

$$\mathrm{tr}_s=\mathrm{tr}D_sA,\quad s=0,1,\cdots,n-1.$$

그리고 특히 우리가 採擇하기로 한 慣行에 따라서, $s=0$일 때에는

$$\mathrm{tr}_0A=\mathrm{tr}D_0A=\mathrm{tr}I_nA=\mathrm{tr}A$$

임도 알 수 있다. 즉 우리의 慣行은 이 表現과 모순되지 않는다.

本論으로 돌아가서 行列 $PA_d{}^*$의 對角合을 評價해 보자. 이를 評價하는 데 우리가 새로 導入한 개념들을 사용하기 위하여 P를 다시 표현해 보면 다음과 같다.

$$P=I_n+2p_1D_1+2p_2D_2+\cdots+2p_{n-1}D_{n-1}.$$

그러면 檢定力統計量 Q의 期待値는 다음과 같이 表現된다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Q)&=\mathrm{tr}PA_d{}^*=\mathrm{tr}A_d{}^*+2p_1\mathrm{tr}D_1A_d{}^*+\cdots+2p_{n-1}\mathrm{tr}D_{n-1}A_d{}^*\\&=g_0+2p_1g_1+\cdots+2p_{n-1}g_{n-1}.\end{aligned}\tag{11}$$

단, 여기서 $g_s(s=0,1,\cdots,n-1)$는 $A_d{}^*$의 s번째 小對角合이다. 즉,

$$g_s=\mathrm{tr}_sA_d{}^*=\mathrm{tr}D_sA_d{}^*,\quad s=0,1,\cdots,n-1$$

이다. 그런데 우리는 여기서 g_s가 行列 M 또는 行列 $X(X'X)^{-1}X'$의 小對角合들을 써서 (近似的으로) 表現할 수 있음을 보이고자 한다.

式(9)에 의하면, A_d^*는 다음과 같이 定義된다.

$$A_d^* = M(A_d - d_\alpha I)M.$$

그리고 A_d를 時差行列 D_1을 써서 나타내면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A_d = 2(I - D_1) - B_{11}.$$

단, B_{11}은 $n\times n$行列로서, $(1,1)$번째 및 (n,n)번째 元素만 1이고 나머지는 모두 0인 行列이다. 여기서 이 관계를 利用하여 g_s를 근사적으로 評價하기 위해서는 다음과 같은 세개의 近似的 關係를 利用하는 것이 必要하다.

命題 1: 다음 세개의 近似的 關係가 成立한다.(3)

(1) $A_d \approx 2(I - D_1)$.

(2) $MD_1 \approx D_1 M$.

(3) $D_s D_1 \approx \frac{1}{2}(D_{s-1} + D_{s+1})$.

이 近似的 關係를 利用하면, 行列 A_d^*는 다음과 같이 變形된다.

$$A_d^* = M(A_d - d_\alpha I)M \approx (2 - d_\alpha)M^2 - 2MD_1M \approx -c_\alpha M - 2D_1 M. \tag{12}$$

여기서 첫번째 近似的 等號는 命題의 近似關係(1)을 적용하여 얻어지며 두번째 것은 近似關係(2)를 適用하여 얻어진다. 단, c_α는 다음과 같이 定義된다.

$$c_\alpha = -(2 - d_\alpha) = d_\alpha - 2.$$

또 近似的 關係를 利用하면, 行列 $D_s A_d^*$는 다음과 같이 變形된다.

$$D_s A_d^* \approx -c_\alpha D_s M - 2D_s D_1 M \approx -(D_{s-1}M + c_\alpha D_s M + D_{s+1}M),$$
$$s = 1, 2, \cdots, n-1. \tag{13}$$

여기서 첫째 近似的 等號는 近似式(12)를 適用하여 얻어지며, 둘째 近似的 等號는 命題의 近似關係(3)을 適用하여 얻어진다.

式 (12) 및 (13)에 의하면, g_s, 즉 A_d^*의 小對角合은 결국 行列 M의 小對角合들로 表現될 수 있음을 알 수 있다. 그런데 行列 M의 小對角合 대신에, 行列 $X(X'X)^{-1}X'$의 小對角合으로 나타내기 위하여 行列 $X(X'X)^{-1}X'$의 s번째 小對角合을 t_s라고 하면, t_s는

$$t_s = \mathrm{tr}_s X(X'X)^{-1}X' \equiv \mathrm{tr} D_s X(X'X)^{-1}X' = -\mathrm{tr} D_s M = -\mathrm{tr}_s M,$$
$$s = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{14}$$

---

(3) 直接 計算에 의해서 確認될 수 있다. 또 關聯된 論議는 鄭〔4〕을 參考할 수 있다.

의 관계를 갖는다. 그리고

$$t_0=k=n-\mathrm{tr}M$$

임은 자명한 사실이다.

위의 결과를 綜合하면 다음 결과가 된다.

$$\begin{aligned} g_0&=\mathrm{tr}A_d^*\approx-(n-k)c_\alpha+2t_1;\\ g_1&=\mathrm{tr}D_1A_d^*\approx k+c_\alpha t_1+t_2-n;\\ g_s&=\mathrm{tr}D_sA_d^*\approx t_{s-1}+c_\alpha t_s+t_{s+1},\quad s=2,3,\cdots,n-1.\end{aligned}\tag{15}$$

여기서 우리는 t_s가 어떤 의미를 갖는지를 보다 直觀的으로 설명할 수 있으면 좋을 것으로 생각한다. 이를 위해서 q_s를 다음과 같이 定義해 보자.

$$q_s=\frac{1}{k-1}(t_s-a_s),\quad s=0,1,\cdots n-1.\tag{16}$$

단 a_s는 $(n-s)/n$으로 定義한다. 그러므로, a_s는 s가 n에 비해서 작을 때는 1에 가까운 數가 된다. 또 r_s를 다음과 같이 定義해 보자.

$$r_s=\frac{q_s}{a_s}.$$

그러면 r_s는 行列 X를 구성하는 k개의 列 중 常數項에 대응하는 列을 제외한 $k-1$개의 列의 각각의 s階自己相關係數들의 平均과 매우 類似함을 보일 수 있다.(4) 그리하여 r_s는 近似的으로 $(-1,\ 1)$의 범위 내에서 변화한다. 우리는 r_s를 간단히 X의 s階自己相關係數라고 부를 수 있을 것이다. 그리고 q_s는 변화범위가 근사적으로$(-a_s,a_s)$인 것을 제외하면 r_s와 같은 것으로 볼 수 있으므로 이는 X의 修正되지 않은 s階自己相關係數라고 부를 수 있다.

이제 우리는 g_s를 t_s 대신 q_s로 表現할 수 있는데, 그 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} g_0&\approx-(n-k)c_\alpha+2a_1+2(k-1)q_1;\\ g_1&\approx(c_\alpha+2)a_1+(k-1)(1+c_\alpha q_1+q_2)-n;\\ g_s&\approx(c_\alpha+2)a_s+(k-1)(q_{s-1}+c_\alpha q_s+q_{s+1}),\quad s=2,3,\cdots,n-1.\end{aligned}\tag{17}$$

그리고 q_s^*를,

$$q_s^*=q_{s-1}+c_\alpha q_s+q_{s+1},\quad s=1,2,\cdots,\ n-1\tag{18}$$

로 定義하면, 式(11) 및 (17)을 結合하여 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Q)\approx\ &2a_1-(n-k)c_\alpha-2np_1+2(c_\alpha+2)\sum_{s=1}^{n-1}p_sa_s+2(k-1)q_1\\ &+2(k-1)\sum_{s=1}^{n-1}p_sq_s^*.\end{aligned}\tag{19}$$

(4) 鄭〔4〕를 參照할 것.

또

$$p_s^* = p_{s-1} + c_\alpha p_s + p_{s+1}, \quad s=1, 2, \cdots, n-1 \tag{20}$$

로 定義하고 式(19)를 p_s^*를 써서 表現하면 다음과 같이 된다.[5]

$$\mathrm{E}(Q) \approx 2a_1 - (n-k)c_\alpha - 2np_1 + 2(c_\alpha+2)\sum_{s=1}^{n-1} p_s a_s + 2(k-1)p_1$$

$$+2(k-1)\sum_{s=1}^{n-1} q_s p_s^*. \tag{21}$$

式(19)와 (21)은 우리의 檢定力統計量 Q의 期待値를 통하여, 檢定力의 決定要因을 分析하는 데 基本이 되는 式이다. 이 式들을 利用하여, 各要因들이 檢定力에 미치는 영향을 評價해 보기로 한다.

IV. 攪亂項의 自己相關類型과 檢定力

攪亂項의 自己相關類型이 ARMA型으로 나타난다고 할 때, 이 類型을 識別하는 방법은 그 相關을 生成하는 確率過程의 構造파라미터에 의할 수도 있고 아니면 自己相關係數 자체에 의할 수도 있다. 前節에서 우리는 檢定力統計量의 期待値 E(Q)를 攪亂項의 自己相關係數 $p_s(s=1,\ 2, \cdots, n-1)$로 表現할 수 있음을 보았다. 여기서 이 自己相關係數에 個別的으로 또 獨立的으로 그 값을 부여할 수 있다면, E(Q)의 p_s에 관한 偏導函數를 구함으로써 p_s의 檢定力에 미치는 效果를 간접적으로 確認할 수 있다. 그리하여 그 導函數의 값이 陰數이면 當該 p_s가 증가할 때 檢定力이 增加한다고 볼 수 있고, 그 값이 陽數이면 當該 p_s의 증가는 檢定力을 減小시킨다고 볼 수 있다.

여기서 그 偏導函數를 구해보면, 式(11)과 式(17) 또는 式(19)로부터 다음 결과를 얻는다.

$$\frac{\partial}{\partial p_1}\mathrm{E}(Q) = 2g_1 \approx 2\{(c_\alpha+2)a_1 + (k-1)(1+c_\alpha q_1 + q_2) - n\}$$

$$= 2\{d_\alpha a_1 + (k-1)q_1^* - n\}; \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_s}\mathrm{E}(Q) = 2g_s \approx 2\{(c_\alpha+2)a_s + (k-1)(q_{s-1} + c_\alpha q_s + q_{s+1})\}$$

$$= 2\{d_\alpha a_s + (k-1)q_s^*\}, \quad s=2, 3, \cdots, n-1. \tag{23}$$

여기서 p_s가 E(Q)에 미치는 영향은, 行列 X의 性質에서 유도되는 q_s^*에 따라서 결정된다고 볼 수 있다. 그런데 論議를 더 진행시키기 위하여, 典型的인 經濟時系列에서 q_s^*가 어떤

(5) (19)의 右邊과 (21)의 右邊의 差는 $p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}$로서 극히 작은 差異가 있음.

特徵을 보이는가를 보고 그것을 기초로 하여 有用한 가정을 도입하기로 하자.

에임즈와 라이터〔1〕는 美國의 통계연감으로부터 임의로 추출된 100개의 經濟時系列(관측치의 數는 각각 25개)을 分析하여, 1階부터 5階까지의 平均的인 自己相關係數의 값이 각각 0.84, 0.71, 0.60, 0.53 및 0.45임을 報告하고 있다. 이 數値를 우리의 q_s와 比較할 수 있게 하기 위하여 여기에 $(25-s)/s$(단 $s=1, 2, \cdots, 5$)를 각각 곱해 주면 그 결과는 0.81, 0.65, 0.53, 0.45 및 0.36으로 된다. 이것이 우리의 q_s에 대응하는 數値라고 해석할 수 있다. 이 數値들을 일별하면 이 값들이 대체로 幾何數列을 이루면서 減小하는 것을 볼 수 있는데, 여기서 $q_s=q_1^s$(단 $s=1, \cdots, 5$)로 가정하면, $q_1=0.814$라 할 때, 小數 2자리까지 취한 q_s의 계산된 값은 다음과 같다.

$$q_1=0.81,\ q_2=0.66,\ q_3=0.54,\ q_4=0.44,\ q_5=0.36.$$

그리고 이 값들과, 에임즈와 라이터가 제시한 數値로부터 계산된 값들을 비교하면, 最大誤差가 0.01 밖에 되지 않을 정도로 매우 가깝다. 그리하여 우리는 다음과 같은 가정을 導入한다.

假定 1: $q_s=q_1^s,\ s=0, 1, 2, \cdots n-1;\ 0\leq q_1<1.$

이 가정하에서 $q_s>0$가 되고, 또

$$q_s^*=q_{s-1}+c_\alpha q_s+q_{s+1}=q^{s-1}(1+c_\alpha q_1+q_1^2)=q^{s-1}q_1^*$$

가 되며, q_1^*의 부호는, $q_1^*=1+c_\alpha q_1+q_1^2$의 判別式이 c_α^2-4이고, c_α의 변화범위는 $-2<c_\alpha<2$이므로, 결국 판별식이 항상 陰數가 되는 셈이어서, $q_1^*>0$가 된다.

이를 綜合하면 q_s^*의 부호와 크기에 관해서 다음 不等式을 얻는다.

$$4>q_s^*>q_{s+1}^*>0,\ s=0, 1, 2, \cdots n-2. \tag{24}$$

그리고 d_α는 가장 保守的으로 생각하더라도 $0<d_\alpha<4$의 不等式이 충족되므로, 다음 不等式이 항상 成立한다.

$$0<d_\alpha a_1+(k-1)q_1^*<4k. \tag{25}$$

式(22)에 의하면, 이 不等式에 의하여 $n>4k$일 때는, 항상 式(22)의 右邊은 陰數가 되고, 式(23)에 의하면, 式(23)의 右邊은 항상 陽數이나, 그 값은 $8k$를 넘을 수 없다. 그리하여 우리는 다음과 같은 假定을 明示的으로 導入하기로 한다.

假定 2: $n>4k$.

以上의 論議를 綜合하여 우리는 다음 命題를 얻을 수 있다.

命題 2: (1) 假定 1과 2가 모두 옳을 때, $\partial E(Q)/\partial p_1<0$이며 따라서 p_1이 獨立的으로 增

加하면 더빈-와트슨의 d檢定의 檢定力은 增加한다.

(2) 假定 1이 옳을 때, $\partial \mathrm{E}(Q)/\partial p_s > 0 (s=2,3,\cdots)$이며, 따라서 $p_2, p_3, \cdots$등이 獨立的으로 增加하면, d檢定의 檢定力은 減小한다. 그리고 그 效果는 s가 增加함에 따라 작아진다.

例 : 다음과 같은 경우를 보자.(6)

$$n=17,\ k=3,\ q_1=0.79(\text{또는 } r=0.84),\ \alpha=0.05,\ d_\alpha=1.50(\text{또는 } c_\alpha=-0.5).$$

이 資料를 式(22) 및 (23)에 代入하여 근사적인 導函數 값을 계산하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial p_1}\mathrm{E}(Q)\approx -26.3, \qquad \frac{\partial}{\partial p_2}\mathrm{E}(Q)\approx 6.5,$$

$$\frac{\partial}{\partial p_3}\mathrm{E}(Q)\approx 5.6, \qquad \frac{\partial}{\partial p_4}\mathrm{E}(Q)\approx 4.7.$$

이 例에서 볼 수 있는 바와 같이 n이 비교적 작은 경우에도, p_1의 檢定力增加效果는 $p_2, p_3, \cdots$등의 檢定力減小效果에 비해서 월등히 크다. 그러나 $p_2, p_3, \cdots$등의 效果도 상당히 큼을 알 수 있고, s가 증가함에 따라 그 效果는 줄어드는 것을 볼 수 있다.

V. 說明變數의 自己相關類型과 檢定力

우리는 第III節에서, 說明變數의 自己相關類型 즉 q_s의 構造가 檢定力統計量 Q의 期待値에 미치는 效果를 式(19) 또는 (21)로 表現할 수 있었다. 여기서 $\mathrm{E}(Q)$의 q_s에 대한 偏導函數를 구해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q_s}\mathrm{E}(Q) &\approx 2(k-1)p_s^* + c^*\frac{\partial}{\partial q_s}c^\alpha \\ &= 2(k-1)p_s^* + c^*\frac{\partial}{\partial q_s}d_\alpha.\end{aligned} \tag{26}$$

단, 여기서 c^*는 다음과 같이 定義된다.

$$c^* = 2\sum_{s=1}^{n-1} p_s a_s + 2(k-1)\sum_{s=1}^{n-1} p_s q_s - (n-k). \tag{27}$$

그런데 式(26)의 右邊을 評價하기 위해서는 d_α의 q_s에 관한 偏導函數가 필요하고, q_s가 d_α에 미치는 영향은 그리 간단할 것같지 않다. 그러나 우리는 d_α가 근사적으로 다음과 같이 表現될 수 있음을 보일 수 있다(鄭〔5〕參照).

$$d_\alpha \approx d_{L\alpha} + (d_{U\alpha} - d_{L\alpha})\frac{r+1}{2} = d_{L\alpha} + (d_{U\alpha} - d_{L\alpha})\frac{q_1+1}{a_1}. \tag{28}$$

(6) 이것은 타일과 나가(Theil and Nagar 〔1961〕)의 "纖維"資料에 해당한다. d_α의 값은 그 資料에 의해서 精密計算한 것이나, 뒤에 설명하는 近似的 方法으로도 計算할 수 있다.

그런데 이 式에서 $d_{L\alpha}$와 $d_{U\alpha}$는 n과 k에 의존하는 下限 및 上限의 臨界値이므로, q_s와는 無關하다. 그리하여 우리는 다음 결과를 얻는다.

$$\frac{\partial}{\partial q_1} d_\alpha \approx \frac{(d_{U\alpha} - d_{L\alpha})}{2a_1} > 0;$$
$$\frac{\partial}{\partial q_s} d_\alpha \approx 0, \quad s=2, 3, \cdots \tag{29}$$

式(29)의 첫째 式의 不等式은 $d_{U\alpha} > d_{L\alpha}$라는 사실에 基因한다.

式(26)이 가지고 있는 性質에 관한 論議를 進行시키기 위하여 다음과 같은 假定을 導入하기로 하자.

假定 3: $p_s = p^s$, $s=0, 1, 2, \cdots, n-1$; $0 \leq p_1 < 1$.

이 假定은 q_s에 관한 假定 1과 類似하다. 그러므로, 同一한 論法으로 다음 性質이 유도될 수 있다.

$$1 > p_s \geq 0, \quad s=1, 2, \cdots, n-1;$$

$$4 > p_s^* > p_{s+1}^* > 0, \quad s=0, 1, \cdots, n-2.$$

그리하여 이 가정 하에서 式(26)의 右邊의 첫째 項은 항상 陽數가 된다.

한편 式(26)의 右邊의 둘째 項의 符號는 $s=1$일 때는 c^*의 符號와 같고, $s \geqq 2$일 때는 근사적으로 0이다. 式(27)에 의하면, c^*의 값은 세 부분으로 나누어 고찰할 수 있는 바, 첫째와 둘째 부분에서는, 가정 1 및 가정 3 하에서 다음 부등식이 항상 성립한다.

$$0 \leq \sum_{s=1}^{n-1} p_s a_s < n-1;$$

$$0 \leq \sum_{s=1}^{n-1} p_s q_s < n-1.$$

그러나 이 두 가정 하에서는 $p_1 = q_1 = 0.7$ 정도로 비교적 큰 경우에 있어서도, ($p_1 a_1 = 0.6$이라고 보면) $\sum p_s a_s = 1.5$, $\sum p_s q_s = 1$이 되므로 式(27)에서 c^*를 결정하는 데는 마지막 부분인 $n-k$가 절대적인 역할을 하게 된다. 그리하여 n이 k에 비하여 매우 큰 경우(예컨대 假定 2에서처럼 $n > 4k$인 경우)에는 c^*는 거의 틀림없이 陰數가 된다.

式(26)으로 돌아가서, n이 k에 비해서 充分히 클 때는 $c^* < 0$이지만, 또 이런 때에는 $\partial d_\alpha / \partial q_1$의 값은 작아지므로, $s=1$일 때 式(26)의 右邊의 둘째 項은 그 절대값이 그리 크지 않은 陰數가 될 가능성이 크다. 그리하여, 우리는 $\partial E(Q) / \partial q_1$의 값은 p_1의 값이 충분히 작을 때는 陰數가 될 것을 기대할 수 있고, 따라서 q_1이 獨立的으로 (즉 다른 q_s에 영향을 미치지 않고)

증가할 때, 우리의 檢定力은 增加할지도 모른다고 말할 수 있다. 그러나 $q_2, q_3, \cdots$등이 增加할 때는 우리의 檢定力은 항상 減小하리라고 기대할 수 있다.

以上을 綜合하면 우리는 다음의 命題를 얻는다.

命題 3: (1)假定 1과 3이 모두 옳을 때, q_1이 獨立的으로 增加하면, 檢定力은 減小할 수도 增加할 수도 있다. 그러나 p_1이 작을 경우에는 檢定力이 增加할 가능성이 크다.

(2)假定 3이 옳을 때, $q_2, q_3, \cdots$등의 獨立的인 增加는 檢定力을 減小시킨다.

例: 前節에서와 같이 다음과 같은 경우를 보자.

$$n=17,\ k=3,\ q_1=0.79(\text{또는 } r=0.84),\ p_1=0.45,\ \alpha=0.05,$$

$$d_{L\alpha}=1.02,\ d_{U\alpha}=1.54,\ d_\alpha=1.50.$$

이 資料를 이용하여 假定 1과 3 하에서 c^*를 계산하면 다음과 같다.

$$c^*=2\times 0.80+2\times(3-1)\times 0.55-(17-3)=-10.2.$$

또

$$p_s^*=2.18\times 0.45^s,\quad s=1,2,\cdots,n-1;$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1}d_\alpha=\frac{1}{2}\times\frac{17}{16}\times(1.54-1.02)=0.28.$$

이를 利用하여 E(Q)의 q_s에 관한 偏導函數를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\mathrm{E}(Q)\approx 1.09;$$

$$\frac{\partial}{\partial q_2}\mathrm{E}(Q)\approx 1.76;$$

$$\frac{\partial}{\partial q_3}\mathrm{E}(Q)\approx 0.79.\ ^{(7)}$$

이 例에서 보면, $q_1, q_2, \cdots$등의 增加는 항상 檢定力을 減小시킨다. 그러나 檢定力을 減小시키는 效果는 q_2가 가장 크다.

VI. (n, k)의 變化와 檢定力

第III節의 式(19) 또는 式(21)은 n과 k가 檢定力에 미치는 效果를 分析하는 데도 使用할

(7) 一般的으로,

$$\frac{\partial}{\partial q_s}\mathrm{E}(Q)\approx 0.869\times 0.45^s,\quad s=2,3,\cdots n-1$$

이 된다.

수 있다. 式(21)을 n 및 k에 관하여 偏微分하면 각각 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial n}\mathrm{E}(Q)\approx c^{*}\frac{\partial}{\partial n}d_{\alpha}-(c_{\alpha}+2p_{1})\,; \tag{30}$$

$$\frac{\partial}{\partial k}\mathrm{E}(Q)\approx c^{*}\frac{\partial}{\partial k}d_{\alpha}+(c_{\alpha}+2p_{1})+2\sum_{s=1}^{n-1}q_{s}p_{s}^{*}. \tag{31}$$

단 c^*는 式(27)로 定義된 값이다.

여기서 d_α의 n 및 k에 관한 偏導函數가 필요한데, 이를 위해서는 前節의 式(28)을 利用할 수 있다. 즉 式(28)에 의하면 다음 결과를 얻는다.

$$\frac{\partial}{\partial n}d_{\alpha}\approx\frac{\partial}{\partial n}d_{L\alpha}+\left(\frac{\partial}{\partial n}d_{U\alpha}-\frac{\partial}{\partial n}d_{L\alpha}\right)\frac{1+r}{2}\,; \tag{32}$$

$$\frac{\partial}{\partial k}d_{\alpha}\approx\frac{\partial}{\partial k}d_{L\alpha}+\left(\frac{\partial}{\partial k}d_{U\alpha}-\frac{\partial}{\partial k}d_{L\alpha}\right)\frac{1+r}{2}. \tag{33}$$

여기서 n과 k가 $d_{L\alpha}$와 $d_{U\alpha}$에 어떠한 영향을 미치는가를 나타내는 偏導函數들의 값은 널리 보급되어 있는 $d_{L\alpha}$와 $d_{U\alpha}$의 數表를 利用하여 계산할 수 있다. 數表에 의하면, ($\alpha=0.05$일 때,) n이 增加할 때 $d_{L\alpha}$는 單調增加하나 增加速度는 n이 커짐에 따라서 감소한다. $d_{U\alpha}$는 n이 增加함에 따라서 減小하다가 增加하는데, 數表에 의하면, $k=2$일 때는 $n=10$에서 $d_{U\alpha}$는 極小가 되며, $k=3$일 때는 $n=18$에서, $k=4$일 때는 $n=30$에서, $n=5$일 때는 $n=45$에서 그리고 $k=6$일 때는 $n=65$에서 각각 $d_{U\alpha}$는 極小가 된다. 그런데 減小區間에서는 비교적 빨리 감소하나, 增加區間에서의 증가속도는 매우 느리다.

또 이 數表에 의하면 k가 增加할 때 $d_{L\alpha}$는 單調減小하며, 減小速度는 비교적 고르다. 그리고 n이 작을 때는 n이 클 때 보다 減小速度가 크다. 한편 k가 增加할 때 $d_{U\alpha}$는 單調增加하며 增加速度는 $d_{L\alpha}$의 감소속도와 비슷하다. 그리고 n이 작을 때는 n이 클 때보다 이 增加速度는 크다.

이렇게 볼때, 式(30)의 右邊의 첫째 項은 陰數 또는 陽數가 될 수 있으나 그 절대치는 대부분의 경우 둘째 項보다 훨씬 작을 것으로 예상되며, 따라서 p_1이 극히 작지 않은 한, $\frac{\partial}{\partial n}\mathrm{E}(Q)$의 符號는 陰이 될 것이다. 즉 n이 增加함에 따라서 檢定力은 增加할 것이다. 또 式(31)의 右邊의 첫째 項은 r이 0보다 커서 1에 가까울수록 陰數가 될 가능성이 크다. 그러나 그 절대치는 뒤의 두 項의 合보다 작을 것이다. 그리고 마지막 項은 $r>0$일 때는 陽數가 되므로, 결국은 $\frac{\partial}{\partial k}\mathrm{E}(Q)$의 符號는 陽이 될 것으로 기대할 수 있다. 즉, k가 증가함에 따라 檢定力도 減小할 것이다. 그리하여 우리는 다음과 같은 命題를 얻을 수 있다.

命題 4: $p_1>0$, $q_1>0$일 때, n의 增加는 檢定力을 增加시키고, k의 增加는 檢定力을 減

小시킬 가능성이 크다.

例 : 前節에서와 같이 다음과 같은 경우를 보자.

$$n=17,\ k=3,\ q_1=0.79(\text{또는 } r=0.84),\ p_1=0.45,\ \alpha=0.05;$$

$$q_s=q_1^s,\ p_s=p_1^s,\ s=1,2,\cdots,n-1.$$

여기서 d_α의 近似値인 式(28)의 右邊의 값을 $d_\alpha^*(n,k)$라고 나타내면, 다음 결과를 얻는다.

$$d_\alpha^*(17,3)=1.494,\ d_\alpha^*(17,4)=1.645,\ d_\alpha^*(18,3)=1.496.$$

그리고 以上의 資料를 이용하여 다음 결과를 얻는다.

$$c^*=-10.2;$$

$$\frac{\partial}{\partial n}d_\alpha\approx\frac{\partial}{\partial n_+}d_\alpha^*=0.002;$$

$$\frac{\partial}{\partial k}d_\alpha\approx\frac{\partial}{\partial k_+}d_\alpha^*=0.151;$$

$$\sum_{s=1}^{n-1}q_s p_s^*=1.20.$$

그리하여 $\mathrm{E}(Q)$의 n 및 k에 관한 도함수는 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial}{\partial n}\mathrm{E}(Q)\approx-0.02-(-0.50+0.90)=-0.42;$$

$$\frac{\partial}{\partial k}\mathrm{E}(Q)\approx-1.65+(-0.50+0.90)+2.40=1.15.$$

이 例에서 보면, n의 增加는 檢定力을 增加시키나, k의 增加는 檢定力을 減小시킨다.

VII. 結論——블래트버그와 틸만에 대한 批判

以上에서 우리는 더빈—와트슨의 檢定에서 檢定力에 영향을 미치는 各要因들의 作用을 分析하였다. 즉 系列相關에 관한 더빈—와트슨 檢定力은 攪亂項의 系列相關類型, 說明變數의 系列相關類型 및 n, k에 의해서 영향을 받는 것을 알 수 있었다. 이 영향의 크기의 정도를 比較하기 위하여 구체적으로 앞에서 든 例에서 各要因이 $\mathrm{E}(Q)$에 미치는 영향의 크기를 나타내는 導函數의 크기를 다시 써보면 다음 表와 같다.

이 결과에 의하면 說明變數의 系列相關係數보다는 攪亂項의 系列相關이 훨씬 큰 정도로 檢定力에 영향을 주는 것으로 나타나고 있어, 이 檢定이 교란항의 系列相關을 찾아내기 위한 檢定임을 뒷받침해 준다. 그리고 교란항의 系列相關係數 가운데서도 p_1의 영향이 뛰어나게 큰 것은 이 檢定이 결국 p_1의 存在를 검정하기 위한 檢定에 가까움을 나타내 주고 있

——에 대한 偏導函數	그 값
p_1	−26.3
p_2	6.5
p_3	5.6
q_1	1.09
q_2	1.76
q_3	0.79
n	−0.42
k	1.15

다. 관측치의 數 n이 커짐에 따라 檢定力이 커지고 說明變數의 數 k가 커짐에 따라 檢定力이 작아지는 것은 自由度 $n-k$의 중요성을 강조하는 듯도 하나 우리의 例에서 그 편도함수의 크기를 비교해 보면, k의 증가로 말미암은 검정력의 감소를 보상하기 위해서는 n은 4배가량 더 증가시켜야 한다는 것으로 나타나, 自由度의 문제는 아닌 것으로 되고 있다.

우리의 分析 결과는 序論에서 言及한 블래트버그와 틸만의 分析의 결함에 대한 明快한 答을 제공한다.

블래트버그는 $AR(1)$과 $AR(2)$의 검정력을 比較하는 데 있어서, 各確率過程의 파라미터 ϕ_1과 (ϕ_1, ϕ_2)를 이용하고 있다. $\phi_2=0$일 때의 $AR(2)$과정이 $AR(1)$과정임을 고려하면, 몇 개의 選定된 ϕ_1과 ϕ_2에 대응하는 p_1과 p_2의 값은 다음과 같이 計算된다.[(8)]

確 率 過 程	ϕ_1	ϕ_2	p_1	p_2
$AR(1)$	0.30	0.00	0.30	0.09
$AR(2)$	0.30	0.50	0.60	0.68
$AR(2)$	0.30	−0.50	0.20	−0.44
$AR(1)$	0.60	0.00	0.60	0.36
$AR(2)$	0.60	0.30	0.86	0.82
$AR(2)$	0.60	−0.30	0.46	−0.02

이 表에 의하면, ϕ_1을 고정시키고, $\phi_2=0$(즉 $AR(1)$과정)의 경우와 비교해 보면, $\phi_2>0$이면 p_1은 증가하고 p_2도 증가하는데, p_1의 증가보다 p_2의 증가폭이 더 크다. 우리의 分析에 의하면 이 경우에는 p_1의 증가는 검정력을 증가시키는 효과를 가지나, p_2의 증가는 검정력을 감소시키는 효과를 가지기 때문에 검정력의 변화방향에 대해서 사전에 무어라 말할 수 없다. 또 $\phi_2<0$이면, p_1은 감소하고 p_2도 감소하는데, p_1의 감소보다 p_2의 감소폭이 더 커서, 이 경우 역시 검정력의 변화방향을 예측할 수 없다. 블래트버그의 數値例는 바로 이러한 不確定性을 뒷받침해 줄 뿐이다. 그러므로 $AR(1)$과 $AR(2)$의 兩過程을 分析하는 데 있어서

(8) 計算方法은 鄭〔4〕의 附錄 參考.

는 파라미터(ϕ_1, ϕ_2)에 의할 것이 아니라 우리의 分析처럼 p_1, p_2 등 相關係數에 의하는 것이 더욱 바람직한 결과를 얻을 수 있는 길이라고 생각된다.

블래트버그는 $AR(1)$과 $MA(1)$過程을 比較하는 데 있어서 p_1이 같으면 $MA(1)$과정의 검정력이 $AR(1)$과정보다 항상 더 크다는 것을 그의 數値例에 의해서 보여 주고 있다. 그런데, 兩過程에 있어서 選定된 p_1의 값이 0.30과 0.45인 경우 兩過程의 p_2가 각각 다음 表와 같이 된다.

確 率 過 程	p_1	p_1에 대응하는 p_2
$AR(1)$	0.30	0.09
$MA(1)$	0.30	0.00
$AR(1)$	0.45	0.20
$MA(1)$	0.45	0.00

그리고 우리의 分析에 의하면 p_1이 같다면 p_2가 작을수록 檢定力이 크다는 것을 보여주고 있으므로, 우리는 $AR(1)$보다 $MA(1)$과정의 檢定力이 더 크다는 결론을 이 表로부터 내릴 수가 있는 것이다.

틸만은 行列 X의 변화에 따른 더빈-와트슨 檢定의 檢定力의 上限과 下限을 구하고자 한다. 그리고 이 때 그가 使用하는 檢定力이란 $\Pr(d<d_{U\alpha})$ 또는 $\Pr(d<d_{L\alpha})$로서, 擬似檢定力이라 할 수 있다. 그리고 序論에서 言及한 대로, 擬似檢定力 $\Pr(d<d_{U\alpha})$의 上限이 $X=P_2K$일 때 얻어진다는 데 대해서 이상스럽다는 태도를 보이고 있다. 이와 관련하여 우리는 式(26), 즉,

$$\frac{\partial}{\partial q_s}\mathrm{E}(Q) \approx 2(k-1)p_s^* + c^*\frac{\partial}{\partial q_s}d_\alpha, \quad s=1, 2, \cdots n-1 \tag{34}$$

을 想起할 필요가 있다. 위의 擬似檢定力에서 처럼 d_α를 $d_{U\alpha}$로 고정시키고 보면, 이 式의 右邊의 둘째 項은 항상 0이 된다. 그러므로 그 擬似檢定力의 統計量 Q의 기대치는 q_s^*가 작을수록 작아진다고 볼 수 있는데, 특히 가장 영향력이 큰 q_1은 $X=P_2K$ 근방에서 그 極小値에 도달하므로, 틸만이 관찰한 사실은 조금도 이상할 것이 없다. 같은 論理로써, q_1은 $X=P_1K$일 때 그 極大値에 가까와지는 경향이 있으므로, 그 擬似檢定力의 下限은 $X=P_1K$(근방)에서 얻어질 수 있으리라고 기대된다. 그런데 그는 $X=P_1K$에서 보다 낮은 下限을 제시하고 있다. 그러나 그가 제시한 下限은 그가 제시한 일부 數値例와도 相馳된다.[9]

(9) 예를 들면, $p_1=0$일때, 어떤 檢定力이 0.05보다 작다는 것은 $d_{L\alpha}$가 d_α의 下限이라는 말과 모순된다. 그런데 틸만의 논문에서는 (n, k)의 組合이 (15, 2), (15, 3), (15, 4), (30, 3), (30, 4), 및 (60, 4)의 경우에 그런 사태가 발생되고 있다.

위에서 본 擬似檢定力이 아니라 眞正檢定力 $\Pr(d<d_\alpha)$에 관해서 틸만은 명백한 언급과 분석을 결여하고 있다. 이와 관련하여 틸만은 충분한 주의를 기울이지 않은 채 眞正檢定力의 上限 역시 $X=P_2K$에서 도달될 수 있다고 말하고 있다(그의 論文 p. 972). 그러나 그의 이러한 추측은 그의 논문의 表I 및 表II의 內容과 相馳된다. 즉, $d_{U\alpha}$는 $X=P_1K$에 대응하고 $d_{L\alpha}$는 $X=P_2K$에 대응하는 것인데, (n, k, p_1)이 (30, 2, 0. 1), (30, 4, 0. 1), (60, 2, 0. 1) 및 (60, 3, 0. 1)인 組合에서 $\Pr(d<d_{U\alpha})$가 $\Pr(d<d_{L\alpha})$보다 큰 값을 보이는 것은 그의 추측과 정면으로 상치되는 결과인 것이다.

또 틸만의 論文에 제시된 擬似檢定力의 上下限幅을 보면 眞正檢定力의 幅도 넓으리라는 인상을 주기 쉬우나, 사실은 그렇지 않을 수 있다. 왜냐하면, 第V節에서 설명한 바와 같이 式(26) 또는 式(34)의 右邊의 두 項은 $s=1$일 때 첫 項은 陽數, 둘째 項은 陰數가 되어 서로 相殺되는 경향이 있다. 그리하여 q_1이 진정검정력에 미치는 영향은 q_1이 의사검정력에 미치는 영향보다 작다. 틸만의 表I 및 II는 이 주장을 강하게 뒷받침해 주고 있다. 즉 이 表에서는 $X=P_1K$와 $X=P_2K$에 관한 진정검정력의 폭이 그리 넓지 않은 것이다.

參 考 文 獻

〔1〕 Ames, E., and S. Reiter, "Distribution of Correlation Coefficients in Economic Time Series," *Journal of the American Statistical Association*, 56 (1961), 637-656.

〔2〕 Blattberg, C., "Evaluation of the Power of the Durbin-Watson Statistic for Non-First Order Serial Correlation Alternatives," *Review of Economics and Statistics*, 55 (1973), 508-515.

〔3〕 Durbin, J., and G.S. Watson, "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression (I, II, III)," *Biometrika*, 37 (1950), 409-428; 38 (1951), 159-178; and 58 (1971), 1-19.

〔4〕 Jeong, Ki-Jun, "The Distribution of the Least Squares Variance Estimator under Serial Correlation," *The Korean Economic Journal*, 15 (1976), 304-349.

〔5〕 Jeong, Ki-Jun., "A Simple Solution of the Inconclusiveness of the Durbin-Watson Bounds Test for Serial Correlation," 第1回 韓日統計學會 共同심포지움(日本 岡山, 1982) 發表論文.

〔6〕 Tillman, J.A., "The Power of the Durbin-Watson Test," *Econometrica*, 42 (1975), 959-974.