結合線形模型의 推定 및 檢證 (其一)

表 鶴 吉*

<目 次>

I. 序

結合線形模型(Multivariate Linear Regression Model)은 高級計量經濟學을 공부하는 데 중요한 비중을 차지하는 모형이다. 이 모형은 일반교과서에서 The Combination of Several Linear Relations (Theil, [Ch. 7]), Sets of Equations (Johnston, [8—6] 및 Schmidt, [2—6]), 또는 Seemingly Unrelated Model (Intriligator, [6—5])로 불리우며 젤너(Zellner)의 논문에 의해 연구의 관심이 提高되었다고 볼 수 있는 모형이다.

이 모형의 특색은 內生變數가 說明變數로 등장하지 않는다는 점에서 單一方程式一般回歸模型(Single Equation Multiple Regression Model)과 같으나 여러 개의 방정식이 係數間의 制約關係나 攪亂項(disturbance term)間의 相關關係 등으로 연결되어 하나의 體系(system)를 이룬다는 점에서는 聯立方程式模型(Simultaneous Equation System)과 같은 특성을 갖고 있다. 바로 이러한 특성때문에 이 모형을 잘 이해하는 것이 계량경제학의 공부에 절대적으로 필요하다고 생각된다.

실제로 聯立方程式模型에 대한 연구야말로 계량경제학이 통계학의 영역에서 한 걸음 더 나아가 독특한 適用可能性을 제시한 분야라고 볼 수 있다.[1] 그 이유는 經濟學에서 다루는

* 本硏究所 硏究員, 서울大學校 國際經濟學科 助敎授. 本論文은 現代基金의 財政的 支援을 받아 作成된 것임.

(1) Jerry A. Hausman, "Specification and Estimation of Simultaneous Equation Models," in Griliches Z., and M.D. Intriligator, eds., *Handbook of Econometrics*, Vol. I, North Holland, 1983.

一般均衡模型, 즉 여러 經濟變數의 同時的 決定關係가 聯立方程式體系의 대표적인 예로 등장할 수 있었기 때문이다.

本稿에서 다룰 結合線形模型은 물론 一般均衡模型은 아니지만 부분적으로 일반균형모형적인 특성을 갖는 것으로 經濟理論이 갖는 또 하나의 독특한 側面을 부각시키는 모형이다. 이 모형은 주로 소비자의 需要體系 및 生産函數推定 등에 적용되었는 데 스톤(Stone)의 線形支出體系(Linear Expenditure System), 부트-데위트(Boot & de Witt) 및 젤너에 의한 그룬펠드(Grunfeld)의 投資函數推定, 크리스텐슨-조르겐슨-라우(Christensen, Jorgenson & Lau)의 초월로그함수(Transcendental Logarithmic Function)에 의한 생산함수 및 소비자 수요체계의 추정 등이 그 대표적인 적용사례라고 볼 수 있다. 이 모형은 需要 및 生産函數의 推定이외에도 線形確率模型(Linear Probability Model) 및 교란항의 共分散이 特異行列(singular matrix)을 이루는 混合模型(Mixed Model)의 推定에도 응용되기 때문에 그 적용범위가 상당히 넓다고 볼 수 있다.(2)

本稿에서 이 모형의 추정과 검증에 대한 論議를 정리해 보고자 하는 또 다른 이유는 이 모형이 單一方程式一般回歸模型과 聯立方程式模型의 架橋的 役割을 할 수 있다는 점을 강조하기 위한 것이다. 筆者의 강의경험에 의하면 單一方程式一般回歸模型을 강의한 후 結合線形模型을 설명하지 않고 바로 聯立方程式模型을 강의하면 대부분의 학생들이 상당한 理解의 空白을 일으킨다고 생각된다. 타일(Theil)이 이 모형을 별도의 章에 취급하고 있는 이유도 대체로 같은 이유 때문이 아닌가 한다. 존스톤(Johnston)도 비교적 상세히 다루고 있으나 타일이 취급한 정도에는 미치지 못하며 대부분의 다른 교과서에서는 一般最小自乘法(Generalized Least Squares Method: GLS)에 대한 설명의 後尾에서 간략히 소개하는 정도에 그치고 있다. 그러나 타일도 結合線形模型의 推定法을 論議함에 있어 주로 結合一般最小自乘法(Joint GLS Approach)을 소개하고 있을 뿐 最尤推定法(Maximum Likelihood Estimation Method)은 생략되어 있으며, 이 模型에 대한 檢證統計量의 導出過程이나 制約條件下의 推定量 誘導過程에 있어 충분한 설명이 缺如되어 있지 않나 생각된다.

本稿의 目的은 結合線形模型의 推定과 檢證에 관한 이해를 돕기 위해 타일類의 敎科書的 說明을 보충하는 데 있다. 本稿에서는 특히 最尤推定法에 초점을 맞추려 하는 데, 이 推定方法은 여러 교과서에 생략되어 있을 뿐 아니라 다음과 같은 이유에서 중요하다고 생각된다.

(2) G.G. Judge, W.E. Griffiths, R.C. Hill & T. Lee, *The Theory and Practice of Econometrics*, John Wiley & Sons, New York, 1980, pp. 275-278 참조.

첫째, 텔서(Telser) 등에 의해 제시된 反復一般最小自乘法(Iterative GLS Method)도 그 推定量을 最尤推定量에 漸近시키기 위한 것이라고 볼 때 最尤推定法이 가장 一般的인 推定法이라는 점이다.

둘째, 情報行列式(Information Matrix)과 크레머-라오(Cramer-Rao) 不等式行列을 바로 유도할 수 있다.

세째, 模型에 대한 統計的 推論을 단행하기 위해 필요한 檢證統計量의 도출이 용이해 진다.

마지막으로, 聯立方程式模型의 측정을 위한 部分情報最尤推定法(Limited Information Maximum Likelihood Estimation Method)이나 完全情報最尤推定法(Full Information Maximum Likelihood Estimation Method)의 理解에 결정적 도움을 준다.

本稿에서 소개될 주요내용은 물론 여러 교과서나 논문에서 이미 취급된 것들인데 특히 조르겐슨, 앤더슨(Anderson), 및 관련 논문들에서 인용하여 타일을 보충하는 형식으로 정리해 본 것이다.

이하에는 먼저 結合線形模型의 이해에 절대적으로 필요한 多變數正規分布理論을 정리한 다음 이 模型의 여러가지 推定法을 소개한다. 그리고 推定量에 대한 假設檢證과 線形制約下의 推定問題를 논의한 후 經濟理論에의 適用事例를 요약 정리해 보기로 한다.

II. 多變數正規分布와 線形結合

結合線形模型을 이해하기 위해서는 먼저 多變數正規分布의 特性과 正規分布變量의 線形結合을 살펴볼 필요가 있다.

1. 多變數正規分布의 特性

多變數正規分布(multivariate normal distribution)는 多變數確率分布理論(multivariate distribution theory)에서 가장 중요한 위치를 점하는 分布인데 多變數統計分析을 다룬 一般教科書에서 상세히 취급되고 있다. 이 分布가 計量經濟理論의 展開에 중요한 이유는 一般模型式을 回歸模型式으로 만들 때 첨가시키는 攪亂項의 分布가 보통 正規分布를 이룬다는 가정을 도입하기 때문이다.

多變數正規分布는 타일〔pp. 67-72, pp. 187-191〕과 존스톤〔pp. 161-165〕에서도 간략히 정리되어 있으나 앤더슨〔Ch. 2〕에 보다 완벽하게 취급되어 있으므로 주로 앤더슨을 引用하여 정리해 보기로 한다.

多變數正規分布를 定義하기 위해 一變數正規分布(univariate normal distribution)의 一般化를 시도해 보기로 하자. 一變數正規分布의 밀도함수는 다음 식으로 표시된다.

$$ke^{-\frac{1}{2}\alpha(x-\beta)^2}=ke^{-\frac{1}{2}(x-\beta)\alpha(x-\beta)} \tag{2-1}$$

이 함수가 밀도함수로 정의되기 위해서는 $k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\alpha}$가 되어야 한다는 것은 基礎數理統計學에서 설명된 바와 같다.[(3)] 이제 多變數正規分布를 定義하기 위해 확률변수와 모수를 벡타로 일반화하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \tag{2-2}$$

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} \tag{2-3}$$

또한 陽의 常數인 α를 다음과 같은 對稱陽定符號行列(positive definite symmetric matrix)로 대체한다.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{pp} \end{pmatrix} \tag{2-4}$$

따라서 (2-1)식의 $\alpha(x-\beta)^2=(x-\beta)\alpha(x-\beta)$항은 다음과 같은 2차형식(quadratic form)으로 대체된다.

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})'A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})=\sum_{i,j=1}^{p}a_{ij}(x_i-b_i)(x_j-b_j) \tag{2-5}$$

그 결과 p-변수 정규분포의 밀도함수는 다음과 같이 표현된다.

$$f(x_1,\cdots,x_p)=Ke^{-\frac{1}{2}(x-b)'A(x-b)} \tag{2-6}$$

단 (2-6)식이 적정한 밀도함수가 되기 위해서는 p차공간에서의 적분이 1이 되어야 할 것이다. 그리고 확률밀도 $f(x_1,\cdots,x_p)$는 물론 非陰(nonnegative)이다.

그런데 A는 陽定符號行列이므로 어떠한 벡터를 양쪽에 곱하더라도 非陰의 값을 갖는다.

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})'A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}) \geq 0 \tag{2-7}$$

따라서 (2-6)식, 즉 p-변수정규분포의 밀도함수의 값은 K를 초과할 수 없다.

$$f(x_1,\cdots,x_p) \leq K \tag{2-8}$$

이제 K를 결정하는 일만 남았으므로 K^*를 다음과 같이 정의해 보자.

(3) A.M. Mood, F.A. Graybill & D.C. Boes, pp. 108-109 참조.

$$K^*=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(x-b)'A(x-b)}\quad dx_1\cdots dx_p \tag{2-9}$$

그런데 우리는 A가 陽定符號行列이면 다음 조건을 만족시키는 非特異行列 C가 存在한다는 것을 알고 있다.[4]

$$C'AC=I \tag{2-10}$$

이와 같이 定義된 C를 이용하여 다음과 같은 直交轉換(orthogonal transformation)을 정의하자.

$$x-b=Cy \tag{2-11}$$

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \tag{2-12}$$

(2-11)식을 (2-5)식에 대입하고 (2-10)식을 사용하면 다음 식이 성립한다.

$$(x-b)'A(x-b)=y'C'ACy=y'y \tag{2-13}$$

多變數轉換(multivariate transformation)의 자코비안決定係數를 J로 表記하면,

$$J=|C| \tag{2-14}$$

이다.

따라서 (2-9)식을 變數轉換한 형태는 다음과 같다.

$$K^*=\|C\|\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}y'y}\ dy_1\cdots dy_p \tag{2-15}$$

그런데 위 식의 被積分函數는 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$e^{-\frac{1}{2}y'y}=e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}y_i^2}=\prod_{i=1}^{p}e^{-\frac{1}{2}y_i^2} \tag{2-16}$$

이를 (2-15)식에 대입하면,

$$K^*=\|C\|\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}y_1^2}\cdots e^{-\frac{1}{2}y_p^2}\ dy_1\cdots dy_p$$

$$=\|C\|\prod_{i=1}^{p}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}y_i^2}\ dy_i\right\}$$

---

(4) A가 陽定符號行列이면 A의 特性벡터(eigen vector)들이 列이 되는 特性行列 X를 A의 前後에 곱함으로써 A行列을 對角化(diagonalization)할 수 있다는 것은 잘 알려진 사실이다(Theil, p. 27 참조).

$X'AX=\Lambda$ (단, Λ는 A의 特性根 λ_i로 구성된 對角行列)

이제 $\sqrt{\lambda_i}$ 를 대각 요소로 하는 대각행렬 $\Lambda^{\frac{1}{2}}$을 정의하면,

$(X\Lambda^{-\frac{1}{2}})'\ A(X\Lambda^{-\frac{1}{2}})=\Lambda^{-\frac{1}{2}'}\Lambda\Lambda^{-\frac{1}{2}}=I$

가 성립한다. 따라서 $C=X\Lambda^{-\frac{1}{2}}$임을 알 수 있다.

$$=\|C\|\prod_{i=1}^{p}\{\sqrt{2\pi}\}$$

$$=\|C\|(2\pi)^{\frac{1}{2}p} \tag{2-17}$$

위 식에서 세번째 等式이 성립하는 이유는 표준정규분포의 전구간 積分値가 1이기 때문이다.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt=1 \tag{2-18}$$

그리고 (2-10)식에 상응하는 決定係數方程式(determinantal equation)은 아래와 같으므로,

$$|C'|\cdot|A|\cdot|C|=|I| \tag{2-19}$$

다음 두 식이 성립한다.

$$|C'|=|C| \tag{2-20}$$

$$\|C\|=\frac{1}{\sqrt{|A|}} \tag{2-21}$$

이를 다시 (2-17)식에 대입하면,

$$K^*=\frac{1}{\sqrt{|A|}}(2\pi)^{\frac{1}{2}p} \tag{2-22}$$

가 성립하고 (2-9)식의 양변을 K^*로 나누면 다음과 같은 p-변수정규분포식이 정의된다.

$$\frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}p}}e^{-\frac{1}{2}(x-b)'A(x-b)} \tag{2-23}$$

이와 같이 정의된 p-변수정규분포의 特性을 살펴보자.

먼저 平均을 구하기 위해 (2-11)식을 고쳐 쓴다.

$$x=Cy+b \tag{2-24}$$

x와 y를 확률벡타(random vector)라고 보면,

$$\mathcal{E}x=c\mathcal{E}y+b \tag{2-25}$$

가 성립된다.

그런데 우리는 이미 y의 확률밀도가 (2-16)식에 比例한다는 것을 알고 있다. 따라서 다음 식이 y의 밀도함수가 된다.

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}p}}e^{-\frac{1}{2}y'y}=\prod_{j=1}^{p}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y_j^2}\right\} \tag{2-26}$$

이제 y의 i번째 요소의 기대치를 구하면 그 값이 0이 됨을 알 수 있다.

$$\mathcal{E}y_i=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} y_i\prod_{j=1}^{p}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y_j^2}\right\}dy_1\cdots dy_p$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y_i e^{-\frac{1}{2}y_i^2} dy_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y_j^2} dy_j\right\} \tag{2-27}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y_i e^{-\frac{1}{2}y_i^2} dy_i$$

$$=0$$

위 식에서 마지막 等式은 표준정규분포의 평균이 0이라는 사실을 이용한 것이다.

이와 같이 $\mathcal{E}y=0$이므로 이를 (2-28)식에 대입하면,

$$\mathcal{E}X=\mu=b \tag{2-28}$$

임을 알 수 있다.

다음에는 X의 共分散行列을 정의해 보자.

$$C(X, X')=\mathcal{E}(X-\mu)(X-\mu)'$$
$$=(\mathcal{E}(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)) \tag{2-29}$$

이 행렬의 대각요소 $\mathcal{E}(X_i-\mu_i)^2$은 X_i의 分散이며 대각요소, $\mathcal{E}(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)$는 X_i와 X_j의 共分散이다.

또한 (2-24)식을 이용하면 다음이 성립한다.

$$\mathcal{E}(X-\mu)(X-\mu)'=\mathcal{E}CYY'C'$$
$$=C(\mathcal{E}YY')C' \tag{2-30}$$

$\mathcal{E}YY'$의 i, j번째 요소는 (2-26)식을 이용하여 다음 식으로 표현된다.

$$\mathcal{E}Y_iY_j=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} y_i y_j \prod_{h=1}^{p}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y_h^2}\right\} dy_1\cdots dy_p \tag{2-31}$$

그런데 $i=j$일 경우 위 식은,

$$\mathcal{E}Y_i^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y_i^2 e^{-\frac{1}{2}y_i^2} dy_i \prod_{\substack{h=1\\ h\neq i}}^{p}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y_h^2} dy_h\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y_i^2 e^{-\frac{1}{2}y_i^2} dy_i$$

$$=1 \tag{2-32}$$

이 된다. 마지막 等式은 표준정규분포의 分散이 1이라는 사실을 이용한 것이다.

그리고, $i\neq j$일 경우 (2-31)식은,

$$\mathcal{E}Y_iY_j=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y_i e^{-\frac{1}{2}y_i^2} dy_i\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y_j e^{-\frac{1}{2}y_j^2} dy_j \prod_{\substack{h=1\\ h\neq i, j}}^{p}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y_h^2} dy_h\right\}$$

$$=0 \tag{2-33}$$

이 되는 데 그 이유는 첫번째 적분값이 표준정규분포의 평균을 의미하므로 0이 되기 때문

이다.

이제 (2-32)와 (2-33)식을 정리하면 다음이 성립한다.

$$\mathcal{E}YY'=I \tag{2-34}$$

또한 이를 (2-30)식에 대입하면,

$$\mathcal{E}(X-\mu)(X-\mu)'=CIC'=CC' \tag{2-35}$$

이 성립한다.

그런데 (2-10)식 $C'AC=I$를 $A=(C')^{-1}C^{-1}$로 고쳐쓰고 양변에 逆行列을 취하면,

$$A^{-1}=CC' \tag{2-26}$$

이 성립한다.

따라서 X의 共分散行列을 Σ로 표기하면,

$$\Sigma=\mathcal{E}(X-\mu)(X-\mu)'=A^{-1} \tag{2-37}$$

이고 (2-36)식으로부터 Σ는 陽定符號行列임을 알 수 있다.[(5)]

이상의 결과는 다음의 정리로 요약할 수 있다.

定 理 1: 벡타 μ와 陽定符號行列 Σ가 존재할 때,

$$2\pi^{-\frac{1}{2}p}|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)} \tag{2-38}$$

는 다변수정규분포의 밀도함수이며 평균벡타는 μ이고 共分散行列은 Σ이다.

보통 (2-38)식과 같은 p-변수정규분포의 밀도함수를 $n(X|\mu,\Sigma)$로, 또 그 분포법칙을 $N(\mu,\Sigma)$로 표기한다.

2. 多變數正規變量의 線形結合

계량경제학에서는 확률변수벡타의 선형결합(linear combinations of random vector)의 분포에 관해 논의하는 경우가 많이 발생한다. 따라서 이하에는 다변수정규분포를 이루는 확률변수벡타의 선형결합이 갖는 분포상의 특성을 정리해 보기로 한다. 結合線形模型의 논의에서는 특히 特異正規分布(singular normal distribution)의 개념에 대한 정확한 이해가 필요한데 존스톤은 이에 대한 言及이 없고 타일〔pp. 209-291〕에도 충분한 설명이 생략되어 있다. 以下에는 앤더슨에 수록된 몇 가지 주요정리를 요약해 본다.

定 理 2: X가 p-변수정규분포를 갖는다면, 즉 $X\sim N(\mu,\Sigma)$이면,

$$Y=CX \quad (\text{단, } C\text{는 非特異行列}) \tag{2-39}$$

는 $N(C\mu, C\Sigma C')$의 분포를 갖는다.

(5) (4)식에서 정의된 A가 陽定符號行列이므로 A^{-1} 역시 陽定符號行列이다(Theil, p. 22 참조).

證 明: 多變數確率分布의 變換定理에 따라 Y의 확률밀도는 X의 확률밀도함수 $n(x|\mu, \Sigma)$에서 x를,

$$x = C^{-1}y \tag{2-40}$$

로 치환하고 (2-40)의 자코비안($\|C^{-1}\|$)을 곱하여 유도한다. 그런데,

$$\|C^{-1}\| = \frac{1}{\|C\|} = \sqrt{\frac{1}{|C|^2}} = \sqrt{\frac{|\Sigma|}{|C|\cdot|\Sigma|\cdot|C'|}} = \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{|C\Sigma C'|^{\frac{1}{2}}} \tag{2-41}$$

이고 $n(x|\mu, \Sigma)$에서 指數項에 나타나는 二次形式,

$$Q = (x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu) \tag{2-42}$$

에 (2-40)식을 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q &= (C^{-1}y-\mu)'\Sigma^{-1}(C^{-1}y-\mu) \\ &= (C^{-1}y - C^{-1}C\mu)'\Sigma^{-1}(C^{-1}y - C^{-1}C\mu) \\ &= [C^{-1}(y-C\mu)]'\Sigma^{-1}[C^{-1}(y-C\mu)] \\ &= (y-C\mu)'(C^{-1})'\Sigma^{-1}C^{-1}(y-C\mu) \\ &= (y-C\mu)'(C\Sigma C')^{-1}(y-C\mu) \end{aligned} \tag{2-43}$$

따라서 Y의 확률밀도함수는,

$$\begin{aligned} n(C^{-1}y|\mu, \Sigma)\|C^{-1}\| &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}p}|C\Sigma C'|^{-\frac{1}{2}}\exp[-\frac{1}{2}(y-C\mu)'(C\Sigma C')^{-1}(y-C\mu)] \\ &= n(y|C\mu,\ C\Sigma C') \end{aligned} \tag{2-44}$$

이로써 證明이 完了되었다.

다음은 多變數正規分布와 限界分布와의 관계를 규명해 보자.

定 理 3: $X_1, \cdots, X_p$가 多變數正規分布를 이룰 때 一部變量들과 나머지 變量들 간에 獨立을 이룰 必要充分條件은 一部 變量들 중 i번째 變量과 나머지 變量들 중 j번째 變量 간의 共分散이 0인 것이다.

證 明: 먼저 充分條件의 성립을 검토하기 위해 p-변수를 $X_1, \cdots, X_q$ 및 $X_{q+1}, \cdots, X_p$의 두 부분으로 나누었다고 생각하자.

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_q \end{bmatrix}, \quad X^{(2)} = \begin{bmatrix} X_{q+1} \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} \tag{2-45}$$

즉 X는 다음과 같이 部分行列(partitioned matrix)로 표시된다.

$$X = \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} \tag{2-46}$$

이제 p-변수는 다변수정규분포를 가지며 그 평균은,

$$\mathcal{E}X^{(1)}=\mu^{(1)},\quad \mathcal{E}X^{(2)}=\mu^{(2)} \tag{2-47}$$

이고, 분산은,

$$\mathcal{E}(X^{(1)}-\mu^{(1)})(X^{(1)}-\mu^{(1)})'=\Sigma_{11} \tag{2-48}$$

$$\mathcal{E}(X^{(2)}-\mu^{(2)})(X^{(2)}-\mu^{(2)})'=\Sigma_{22} \tag{2-49}$$

$$\mathcal{E}(X^{(1)}-\mu^{(1)})(X^{(2)}-\mu^{(2)})'=\Sigma_{12}=0\quad(\Sigma_{21}=\Sigma_{12}'=0) \tag{2-50}$$

이라고 가정하자.

즉, μ와 Σ도 부분행렬로 표시된다.

$$\mu=\begin{bmatrix}\mu^{(1)}\\ \mu^{(2)}\end{bmatrix} \tag{2-51}$$

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Sigma_{11} & 0\\ 0 & \Sigma_{22}\end{bmatrix} \tag{2-52}$$

이러한 가정밑에서 $X^{(1)}$과 $X^{(2)}$가 서로 독립적인 정규분포를 이루는지를 검토해 보자.

먼저 Σ의 逆行列을 구한다.

$$\Sigma^{-1}=\begin{bmatrix}\Sigma_{11}^{-1} & 0\\ 0 & \Sigma_{22}^{-1}\end{bmatrix} \tag{2-53}$$

따라서 $n(X|\mu,\Sigma)$의 指數項에 나타나는 二次形式은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}Q&=(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)\\ &=[(X^{(1)}-\mu^{(1)})',\ (X^{(2)}-\mu^{(2)})']\begin{bmatrix}\Sigma_{11}^{-1} & 0\\ 0 & \Sigma_{22}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X^{(1)}-\mu^{(1)}\\ X^{(2)}-\mu^{(2)}\end{bmatrix}\\ &=[(X^{(1)}-\mu^{(1)})'\Sigma_{11}^{-1},\ (X^{(2)}-\mu^{(2)})'\Sigma_{22}^{-1}]\begin{bmatrix}X^{(1)}-\mu^{(1)}\\ X^{(2)}-\mu^{(2)}\end{bmatrix}\\ &=(X^{(1)}-\mu^{(1)})'\Sigma_{11}^{-1}(X^{(1)}-\mu^{(1)})+(X^{(2)}-\mu^{(2)})'\Sigma_{22}^{-1}(X^{(2)}-\mu^{(2)})\\ &=Q_1+Q_2\end{aligned} \tag{2-54}$$

단,

$$\begin{aligned}Q_1&=(X^{(1)}-\mu^{(1)})'\Sigma_{11}^{-1}(X^{(1)}-\mu^{(1)})\\ Q_2&=(X^{(2)}-\mu^{(2)})'\Sigma_{22}^{-1}(X^{(2)}-\mu^{(2)})\end{aligned} \tag{2-55}$$

그런데 $|\Sigma|=|\Sigma_{11}|\cdot|\Sigma_{22}|$이므로 X의 확률밀도함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}n(X|\mu,\Sigma)&=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}p}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}Q}\\ &=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}q}|\Sigma_{11}|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}Q_1}\cdot\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(p-q)}|\Sigma_{22}|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}Q_2}\\ &=n(X^{(1)}|\mu^{(1)},\Sigma_{11})\cdot n(X^{(2)}|\mu^{(2)},\Sigma_{22})\end{aligned} \tag{2-56}$$

그리고 $X^{(1)}$의 限界密度函數(marginal density function)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} n(x|\mu,\Sigma)\,dX_{q+1}\cdots dX_p \\
&=n(X^{(1)}|\mu^{(1)},\Sigma_{11})\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} n(X^{(2)}|\mu^{(2)},\Sigma_{22})\,dX_{q+1}\cdots dX_p \qquad (2\text{-}57)\\
&=n(X^{(1)}|\mu^{(1)},\Sigma_{11})
\end{aligned}$$

따라서 $X^{(1)}$의 한계분포는 $N(\mu^{(1)},\Sigma_{11})$이고 $X^{(2)}$의 한계분포도 동일한 방법으로 $N(\mu^{(2)}, \Sigma_{22})$가 됨을 알 수 있다. 즉 $X_1,\cdots,X_p$의 다변수밀도함수는 $X_1,\cdots,X_q$의 한계밀도함수와 $X_{q+1},\cdots,X_p$의 한계밀도함수의 곱인 것을 알 수 있고 두 部分變量은 서로 독립이다.

다음에는 定理 3의 必要條件이 성립하는지를 검토해 보자. 만일 X_i와 X_j가 각각 다른 부분의 變量이라면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}&=\mathcal{E}(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)\ f(X_1,\cdots,X_q)\ f(X_{q+1},\cdots,X_p)\ dX_1\cdots dX_p\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(X_i-\mu_i)\ f(X_1,\cdots,X_q)\ dX_1\cdots dX_q\\
&\qquad\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(X_j-\mu_j)\ f(X_{q+1},\cdots,X_p)\,dX_{q+1}\cdots dX_p\\
&=0 \qquad (2\text{-}58)
\end{aligned}$$

그런데 $\sigma_{ij}=\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}$($\rho_{ij}$는 X_i와 X_j의 상관계수)이고 Σ는 非特異行列임을 가정하였으므로 $\sigma_i\neq 0$이다. 따라서 $\sigma_{ij}=0$의 조건은 곧 $\rho_{ij}=0$이다. 즉, 다변수정규분포의 一部變量들이 餘他部分變量들과 無相關이면 두 變量들 간에는 獨立性이 성립된다. 이는 多變數正規分布가 갖는 중요한 특징의 하나로 일반적으로 두 변량이 無相關이어야 서로 獨立性을 갖는 것임에 유의할 필요가 있다. 이로써 證明이 完了되었다.

물론 위 定理의 特殊한 예가 다름아닌 二變數正規分布(bivariate normal distribution)이다. 즉 $X^{(1)}=X_1$, $X^{(2)}=X_2$, $\mu^{(1)}=\mu_1$, $\mu^{(2)}=\mu_2$, $\Sigma_{11}=\sigma_{11}=\sigma_1^2$, $\Sigma_{22}=\sigma_{22}=\sigma_2^2$, 및 $\Sigma_{12}=\Sigma_{21}=\sigma_{12}=\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$의 경우를 말한다. 따라서 만일 X_1과 X_2가 二變數正規分布를 이룬다면 두 변량이 無相關일 때만 두 변량간에는 獨立性이 存在한다. 이렇게 無相關일 때 X_i의 한계분포는 평균이 μ_i이고 분산이 σ_i^2인 정규분포를 이룬다. 以上의 論議는 존스톤[p. 164] 및 무드 등 (Mood et al.) [pp. 162-168]의 二變數正規分布에 대한 論議의 擴張이라고 볼 수 있다.

또한 定理 3의 證明은 다음과 같은 補助定理(corollary)의 證明과 같다.

補助定理 3: 만일 X가 $N(\mu,\Sigma)$로 분포되어 있고 X의 一部變量들이 餘他部分의 變量들과 無相關인 경우에는 部分變量들의 限界分布函數는 μ와 Σ의 적절한 部分을 각각 평균과

분산으로 하는 다변수정규분포가 된다.

이제 多變數正規分布의 線形結合에 대한 두번째 論議로 위 補助定理 3이 두 部分變量들이 상호 獨立的이 아닌 경우에도 성립함을 보여주기로 하자.

定 理 4: X가 $N(\mu, \Sigma)$의 분포를 갖는다면 X의 어떠한 一部變量도 그 한계분포는 μ와 Σ의 적절한 부분을 각각 평균과 분산으로 하는 다변수정규분포를 갖는다.

證 明: 먼저와 같이 X, μ 및 Σ를 部分行列로 표기하고, 다음과 같은 非特異線形變換(non-singular linear transformation)을 정의하자.

$$Y^{(1)} = X^{(1)} + MX^{(2)} \tag{2-59}$$

$$Y^{(2)} = X^{(2)} \tag{2-60}$$

여기에서 $Y^{(1)}$의 要素가 $Y^{(2)} = X^{(2)}$의 要素와 無相關이 되도록 M을 선택하는 것이 전제되어야 한다. 즉 M은 다음 方程式을 만족시켜야 한다.

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{E}(Y^{(1)} - \varepsilon Y^{(1)})(Y^{(2)} - \varepsilon Y^{(2)})' \\ &= \mathcal{E}(X^{(1)} + MX^{(2)} - \varepsilon X^{(1)} - M\varepsilon X^{(2)})(X^{(2)} - \varepsilon X^{(2)})' \\ &= \mathcal{E}[(X^{(1)} - \varepsilon X^{(1)}) + M(X^{(2)} - \varepsilon X^{(2)})](X^{(2)} - \varepsilon X^{(2)})'] \\ &= \Sigma_{12} + M\Sigma_{22} \end{aligned} \tag{2-61}$$

$M = -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}$이므로 이를 (2-59)에 대입하면 다음이 성립한다.

$$Y^{(1)} = X^{(1)} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X^{(2)} \tag{2-62}$$

그런데,

$$\begin{bmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{bmatrix} = Y = \begin{bmatrix} I & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} X \tag{2-63}$$

는 X의 非特異變換이므로 Y는 정규분포를 이루며 그 평균과 분산은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\begin{bmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{bmatrix} &= \varepsilon \begin{bmatrix} I & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} X \\ &= \begin{bmatrix} I & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^{(1)} \\ \mu^{(2)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mu^{(1)} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\mu^{(2)} \\ \mu^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{bmatrix} \\ &= v \end{aligned} \tag{2-64}$$

$$\begin{aligned} C(Y, Y') &= \mathcal{E}(Y - v)(Y - v)' \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon(Y^{(1)} - v^{(1)})(Y^{(1)} - v^{(1)})' & \varepsilon(Y^{(1)} - v^{(1)})(Y^{(2)} - v^{(2)})' \\ \varepsilon(Y^{(2)} - v^{(2)})(Y^{(1)} - v^{(1)})' & \varepsilon(Y^{(2)} - v^{(2)})(Y^{(2)} - v^{(2)})' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2-65}$$

마지막 등식이 성립하는 이유는,

$$\mathcal{E}(Y^{(1)}-v^{(1)})(Y^{(1)}-v^{(1)})'$$
$$=\varepsilon[(X^{(1)}-\mu^{(1)})-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X^{(2)}-\mu^{(2)})][(X^{(1)}-\mu^{(1)})-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X^{(2)}-\mu^{(2)})]'$$
$$=\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}+\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{22}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$$
$$=\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \qquad (2\text{-}66)$$

따라서 $Y^{(1)}$과 $Y^{(2)}$는 서로 獨立이며, 補助定理 3에 따라 $X^{(2)}=Y^{(2)}$의 한계분포는 $N(\mu^{(2)}, \Sigma_{22})$임을 알 수 있다. 이로써 證明이 完了되었다.

定理 4는 補助定理 3보다 훨씬 일반적인 定理이다. 이제 定理 4를 이용하여 定理 3보다 일반적인 다음과 같은 定理를 증명해 보자.

定 理 5: X가 $N(\mu, \Sigma)$ 분포를 이루고 $Z=DX$ (단, D는 位數(rank)가 $q\leq p$인 $q\times p$ 행렬이다)로 X를 變換하면 Z는 $N(D\mu, D\Sigma D')$의 분포를 갖는다.

證 明: X를 $q\times p$ 행렬 D에 의해 변환시켜 얻게 되는 $q\times 1$ 벡타 Z를 정의하자.

$$Z=DX \qquad (2\text{-}67)$$

Z의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$\mathcal{E}Z=D\mu \qquad (2\text{-}68)$$

$$\mathcal{E}(Z-D\mu)(Z-D\mu)'=D\Sigma D' \qquad (2\text{-}69)$$

물론 $q=p$이고 D가 非特異行列인 경우는 이미 上述한 바 있다. 그런데 만일 $q\leq p$이고 D의 位數가 q인 경우에는 우리는 非特異變換(nonsingular transformation)을 가능하게 하는 $(p-q)\times p$ 行列 E를 발견할 수 있다.[6]

$$\begin{bmatrix} Z \\ W \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D \\ E \end{bmatrix}X \qquad (2\text{-}70)$$

그러면 定理 4에 따라 Z와 W는 共通正規分布(joint normal distribution)을 갖고 Z는 限

(6) 陽定符號行列 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$를 정의하자. 그러면

$A'=\begin{bmatrix} A_{11}' & A_{21}' \\ A_{12}' & A_{22}' \end{bmatrix}$이고, 만일 $A_{12}=A_{21}=0$이라면 $A^{-1}=\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$이다. 또한

$\begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix}=|A_{11}|\cdot|A_{22}|$이며

$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & A_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & I \end{vmatrix}=|A_{11}|\cdot|A_{22}|$임을 알 수 있다.

이제 만일 A_1이 位數가 q인 $q\times p$ 行列이라면 $A=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$가 非特異行列이 되는 $(p-q)\times p$의 A_2行列이 존재한다. 이는 A_1의 처음 q行으로 구성된 A_{11}(적어도 한개의 $q\times q$ A_1小行列式(minor)은 0이 아니다) 이 非特異行列이 되고 나머지 A_2를 $(0\ I)$로 취급할 수 있기 때문이다. 그 결과 다음 식이 성립한다.

$|A|=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & I \end{vmatrix}=|A_{11}|\neq 0$

따라서 A_1은 非特異行列임을 알 수 있다.

界正規分布를 갖는다. 이로써 證明이 完了되었다.

3. 特異正規分布

이제 이와 같은 정규분포의 선형결합분포에 대한 논의를 토대로 特異正規分布(singular or degenerate normal distribution)에 대한 特性을 정리해 보자. 計量經濟理論에서는 주로 結合線形模型에서 攪亂項들 간에 선형종속(linear dependence)이 일어나는 경우에 特異正規分布에 대한 논의를 援用하게 된다. 타일〔6.9〕에도 간단히 소개되어 있으나 앤더슨을 인용하기로 한다.[7]

多變數正規分布의 共分散行列이 特異行列일 경우에는 밀도함수를 (2-76)식과 같이 표현할 수 없게 된다. 特異分布란 p次空間의 分布가 p보다 低次空間(lower dimensional set)에 집중되어 있는 분포를 의미한다. 따라서 特異正規分布의 경우에는 質量(mass)이 특정한 선형집합(linear set)에 집중되게 된다.

이제 y를 선형집합에서의 coordinates의 집합(coordinates의 수는 이 선형집합의 次數와 같다)으로 정의하면 이 선형집합에 대한 "系數的(parametric)" 定義는 $x=Ay+\lambda$ (단, A는 $p\times q$ 行列이고 X는 $p\times 1$ 벡타)이다.

Y가 q차선형집합상에서 정규분포를 이룬다고 가정하자. 그러면 우리는,

$$X=AY+\lambda \tag{2-71}$$

가 p차공간에서 特異正規分布를 이룬다고 말한다.

만일 $\mathcal{E}Y=v$이면 $\mathcal{E}X=Av+\lambda=\mu$이고 $\mathcal{E}(Y-v)(Y-v)'=T$라면 다음이 성립한다.

$$\mathcal{E}(X-\mu)(X-\mu)'=\mathcal{E}A(Y-v)(Y-v)'A'=ATA'=\Sigma$$

이 경우 만일 $p>q$라면 Σ는 特異行列이 되고 따라서 X는 밀도를 가질 수 없게 된다. 왜냐하면 q-집합과 교차하지 않는 어떠한 집합의 확률도 0이라는 사실은 곧 확률밀도가 전부 0이라는 것을 의미하기 때문이다.

이제 逆으로 X가 μ를 평균으로 位數가 r인 Σ를 공분산행렬로 하는 확률변수라면 확률이 0인 경우를 제외하고는 (2-71)식과 같이 표현할 수 있다. (2-71)식에서 X는 임의의 분포를 갖고 $r(\leq p)$요소를 갖는 Y는 적절한 분포를 갖고 있는 것으로 볼 수 있다.

만일 Σ의 位數가 r이면 다음과 같은 조건을 만족시키는 $p\times p$ 非特異行列 B가 존재한다.[8]

---

(7) 상세한 논의는 Marsaglia, G. (1964), "Conditional Means and Variances of Normal Variables with Singular Covariance Matrix," *Journal of the American Statistical Association*, 59, pp. 1203-1204 참조.

(8) Σ는 $(p\times p)$ 陽定符號行列인데 位數가 $r(\leq p)$이라면 다음과 같은 $(p-r)\times p$ 行列 B_2가 존재한다.
$B_2\ \Sigma=0$

$$B\Sigma B'=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2-72}$$

이와 같은 행렬 B를 이용하여 X의 變換을 다음과 같이 정의하면,

$$BX=V=\begin{bmatrix} V^{(1)} \\ V^{(2)} \end{bmatrix} \tag{2-73}$$

行列 v는 확률변수벡타로서 그 평균은 다음 식이고 공분산행렬은 (2-72)식이 된다.

$$\mathcal{E}V=B\mu=v=\begin{bmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{bmatrix} \tag{2-74}$$

그런데 $V^{(2)}$ 各要素의 분산은 0이므로 항상 $V^{(2)}=v^{(2)}$이다.

이제 B^{-1}을 r行으로 구성된 C와 D로 분할하자.

$$B^{-1}=[C\ D] \tag{2-75}$$

그러면 (2-73)식은 다음과 같다.

$$X=B^{-1}V=[C\ D]\begin{bmatrix} V^{(1)} \\ V^{(2)} \end{bmatrix}=CV^{(1)}+DV^{(2)} \tag{2-76}$$

즉, 항상,

$$X=CV^{(1)}+Dv^{(2)} \tag{2-77}$$

이 성립하는 데 이것은 바로 (2-71)식에서 A가 C로, $V^{(1)}$이 Y로, $Dv^{(2)}$가 λ로 치환된 것일 뿐이다. 이제 特異分布를 포함하는 正規分布에 대하여 다음과 같은 형식적인 定義를 생각할 수 있다.

定 義 1: 평균이 $\mathcal{E}X=\mu$이고 분산이 $\mathcal{E}(X-\mu)(X-\mu)'=\Sigma$인 p-요소확률변수 벡타 X는 (2-71)식(A의 列數는 p이고 行數는 Σ의 位數, 즉 r)과 같은 變換이 정의되면 $N(\mu,\Sigma)$ 분포를 갖는다. 또한 r-요소 y는 非特異分布를 갖는 데 그 밀도함수는,

$$ke^{-\frac{1}{2}(y-v)'T^{-1}(y-v)} \tag{2-78}$$

이다.

이상의 정의에서 만일 Σ의 位數가 p면 A는 I로, λ는 0으로 간주되므로 $X=Y$가 되고 이때는 바로 前節에서 설명한 非特異正規分布가 되는 것이다. 즉, 非特異正規分布도 特異正規分布의 특수 경우로 취급하는 것이 보다 일반적인 正規分布의 定義라고 볼 수 있다.

이제 $r\times p$ 행렬 A를 골라 $\begin{bmatrix} A \\ B_2 \end{bmatrix}$를 만들면 이는 非特異行列이다. 따라서 다음 식이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} A \\ B_2 \end{bmatrix}\Sigma[A'\ B_2']=\begin{bmatrix} A\Sigma \\ 0 \end{bmatrix}[A'\ B_2']=\begin{bmatrix} A\Sigma A' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

그런데 이 행렬은 位數가 r이므로 $A\Sigma A'$는 非特異行列이다. 또한 행렬 Σ가 陽定符號行列이면 註(4)에서 언급한대로 다음과 같은 非特異行列 D가 존재한다.

$$D(BCB')D'=I$$

따라서

$$B=\begin{bmatrix} DA \\ B_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B_2 \end{bmatrix}는\ B\Sigma B'=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

를 성립시킨다.