結合線形模型의 推定 및 檢證(其二)

表　鶴　吉*

<目　次>

III. 結合線形模型의 構造와 推定

結合線形模型은 여러 개의 방정식이 결합되어 하나의 體系를 이루는 模型으로 교란항구조에 대한 가정에 따라 同時相關攪亂型(Model with Contemporaneously Correlated Disturbances)과 自己相關攪亂型(Model with Autocorrelated Disturbances)으로 大別된다. 本稿에서는 주로 同時相關攪亂型을 다루려고 한다.

結合線形模型은 또한 교란항구조에 대한 특별한 가정이나 係數間의 制約條件에 따라 몇 가지 類型으로 區分해 볼 수 있다. 이들 諸類型에 관해서는 推定方法을 논의할 때 설명하기로 하고 이하에는 一般最小自乘法, 二段階一般最小自乘法, 反復最小自乘法, 最尤推定法 및 結給線形模型의 豫測問題를 차례로 살펴 보기로 한다.

1. 結合線形模型의 構造와 基本假定

p개의 방정식으로 구성되는 다음과 같은 회귀방정식 체계를 생각하자.

$$y_i = X_i\beta_i + u_i \quad i=1, 2, \cdots, p \tag{3-1}$$

위 식에서 y_i와 u_i는 각각 $(n\times 1)$벡타이고 X_i는 $(n\times k_i)$행렬이며 β_i는 $(k_i\times 1)$계수벡타이다. $p=1$인 경우에는 $y=X\beta+u$가 되어 통상의 單一方程式 一般線形模型이 된다. 또한 식 (3-1)은 다음과 같나 표현될 수도 있다.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & & \\ & X_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & X_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \tag{3-2}$$

* 本研究所 研究員, 서울大學校 國際經濟學科 副敎授. 本論文은 現代基金의 財政的 支援을 받아 作成된 것임.

또는

$$y=X\beta+u \qquad (3\text{-}3)$$

단, 이 경우에는 y는 $np\times 1$벡타이고, X는 $np\times\sum_{i=1}^{p}k_i$ 행렬이며, β는 $\sum_{i=1}^{p}k_i\times 1$ 계수벡타, u는 $np\times 1$교란항벡타이다.

이상과 같이 표현되는 結合線形模型에 흔히 도입되는 기본가정은 다음과 같다.

基本假定 :

(i) $\mathcal{E}u_i=0$

(ii) $\mathcal{E}uu'=\Omega$

$$=\Sigma\otimes I_n$$

(단, $\Sigma=[\sigma_{jl}]$은 $p\times p$ 陽定符號行列)

(iii) X는 비확률변수(non-stochastic variable)로 $\lim_{n\to\infty}\frac{X_i'X_j}{n}$이 有限非特異行列을 이루며 $\mathcal{E}u_iu_j'=\sigma_{ij}I_n$에서 σ_{ij}는 有限數이다.

이와 같은 기본가정의 의미를 생각해 보기로 하자. 경제모형의 경우 y_i 및 $X_i(i=1,2,\cdots,p)$는 대개 n개의 時點과 n개의 소비단위나 기업 또는 지역단위를 나타낸다. 따라서 식 (3-3)으로 표현되는 모형은 時系列資料와 橫斷面資料를 집합(pooling)시킨 모형으로도 생각할 수 있다. 소위 集合模型(Pooling Model)은 각 방정식의 교란항 및 계수에 대한 가정에 따라 攪亂項構成模型(Error Components Model), 分散構成模型(Variance Components Model) 및 確率係數模型(Random Coefficients Model) 등으로 분류된다.[9]

만일 y_i 및 X_i값의 각각이 상이한 時點의 값인 경우에 위의 기본가정 (ii)는 어떤 一定時點에서 i방정식의 교란항과 j방정식의 교란항사이에 상관관계가 있을 수 있으나 다른 時點의 교란항사이에는 상관관계가 없다는, 즉 自己相關關係가 없다는 것을 가정한 것이다. 이를 우리는 同時相關攪亂(contemporaneous correlation disturbances)의 假定이라고 부르며 일련의 경제모형에 있어서는 상당히 타당한 가정이 될 수 있다.

이와 같은 기본가정 밑에서 結合線形模型을 추정하는 방법들은 대체로 다음에 소개되는 네가지 방법으로 분류될 수 있다.

2. 一般最小自乘法

(3-2)식으로 표현된 結合線形模型을 (3-3)식과 같이 표현하면 單一方程式模型으로 볼 수 있기 때문에 $\Omega=\Sigma\otimes I$가 旣知인 경우에는 一般最小自乘法(Generalized Least Squares Method: GLS)을 적용하여 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_P)$를 추정할 수 있다.

---

(9) G.G. Judge et. al. 前揭書(Ch. 8)는 集合模型에 대해 상세한 소개를 하고 있다.

만일 X의 位數가 $K=\sum_{i=1}^{P} k_i$이고 Σ는 位數가 p인 旣知의 行列이라면, 애이킨 定理(Aitken's Theorem)에 따라 GLS추정량 $\hat{\beta}_{GLS}$가 존재한다.

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{GLS} &= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y \\ &= [X'(\Sigma^{-1}\otimes I)X]^{-1}X'(\Sigma^{-1}\otimes I)y \qquad (3\text{-}4)\end{aligned}$$

이를 보다 상세히 표현하면 다음과 같다.

$$\hat{\beta}_{GLS}=\begin{pmatrix}\hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\\ \vdots\\ \hat{\beta}_P\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma^{11}X_1'X_1 & \sigma^{12}X_1'X_2\cdots\sigma^{1P}X_1'X_P\\ \sigma^{12}X_2'X_1 & \sigma^{22}X_2'X_2\cdots\sigma^{2P}X_2'X_P\\ \vdots & \vdots \ddots \vdots\\ \sigma^{1P}X_P'X_1 & \sigma^{2P}X_P'X_2\cdots\sigma^{PP}X_P'X_P\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{P}\sigma^{1i}X_1'y_i\\ \sum_{i=1}^{P}\sigma^{2i}X_2'y_i\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{P}\sigma^{Pi}X_P'y_i\end{pmatrix}$$

단, σ^{ij}는 Σ^{-1}의 (i, j)번째 요소이다.

이 추정량($\hat{\beta}_{GLS}$)은 y의 線形不偏函數에 속하는 모든 추정량 가운데서 最小分散을 갖는 推定量이다. $\hat{\beta}_{GLS}$의 平均과 共分散은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\hat{\beta}_{GLS}) &= \mathcal{E}(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y \\ &= \mathcal{E}(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}(X\beta+u) \\ &= \beta+\mathcal{E}(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}u \\ &= \beta \qquad (3\text{-}5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_{GLS}) &= \mathcal{E}[(\hat{\beta}_{GLS}-\beta)(\hat{\beta}_{GLS}-\beta)'] \\ &= \mathcal{E}[(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}uu'\Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}] \\ &= [(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}(\mathcal{E}uu')\Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}] \\ &= (X'\Omega^{-1}X)^{-1} \qquad (3\text{-}6)\end{aligned}$$

만일 結合線形模型에 單純最小自乘法(Ordinary Least Squares Method: OLS)을 적용하여 OLS推定量($\hat{\beta}_{OLS}$)을 얻는다면 그것은 P개의 회귀식 각각을 OLS로 따로 추정하는 것과 같다.

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{OLS} &= (X'X)^{-1}X'y \\ &= \begin{bmatrix}(X_1'X_1')^{-1} & & 0\\ & (X_2'X_2)^{-1} & \\ 0 & & \ddots\ (X_P'X_P)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1'y_1\\ X_2'y_2\\ \vdots\\ X_P'y_P\end{bmatrix} \\ &= (X_i'X_i)^{-1}X_i'y_i \\ &= \{\hat{\beta}_{iOLS}\} \quad (\text{단, } i=1, 2, \cdots, p) \qquad (3\text{-}7)\end{aligned}$$

$\hat{\beta}_{OLS}$의 平均과 共分散은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\hat{\beta}_{OLS}) &= \mathcal{E}(X'X)^{-1}X'y \\ &= \mathcal{E}(X'X)^{-1}X'(X\beta+u) \\ &= \beta+\mathcal{E}(X'X)^{-1}X'u \\ &= \beta \end{aligned} \tag{3-8}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_{OLS}) &= \mathcal{E}[(X'X)^{-1}X'uu'X(X'X)^{-1}] \\ &= (X'X)^{-1}X'(\mathcal{E}uu')X(X'X)^{-1} \\ &= (X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1} \end{aligned} \tag{3-9}$$

$\hat{\beta}_{GLS}$가 最小分散을 갖는 不偏推定量이라는 것은 結合線形模型을 GLS模型으로 해석하여 애이킨定理를 연장하면 쉬게 이해될 수 있다. 특히 $\hat{\beta}_{GLS}$와 $\hat{\beta}_{OLS}$의 效率性對比를 보다 구체적으로 살펴 볼 필요가 있다. 그 이유는 우리가 $\hat{\beta}_{GLS}$가 $\hat{\beta}_{OLS}$에 비해 갖고 있는 상대적 효율성을 상실하는 일련의 조건을 발견할 수 있다면 그러한 조건 밑에서는 OLS대신 구태여 GLS를 적용할 필요가 없기 때문이다.

$\hat{\beta}_{GLS}$와 $\hat{\beta}_{OLS}$의 效率性對比를 위해 다음 식을 생각해 보자.

$$\begin{aligned}(X'X)^{-1}X' &= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega+B \\ &= A^{-1}X'\Omega^{-1}+B \quad (\text{단, } A=X'\Omega^{-1}X) \end{aligned} \tag{3-10}$$

위 식의 양변에 X를 곱하면

$$(X'X)^{-1}X'X=(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega X+BX \tag{3-11}$$

이 되고 이는 곧

$$BX=0 \tag{3-12}$$

임을 의미한다.

이제 (3-10)식을 (3-9)식에 대입하면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_{OLS}) &= \mathcal{E}[(X'X)^{-1}X'uu'X(X'X)^{-1}] \\ &= \mathcal{E}[A^{-1}X'\Omega^{-1}uu'\Omega^{-1}XA^{-1}+Buu'B'+Buu'\Omega^{-1}XA^{-1}+A^{-1}X'\Omega^{-1}uu'B'] \\ &= A^{-1}+B\Omega B' \\ &= \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_{GLS})+B\Omega B' \end{aligned} \tag{3-13}$$

이를 바꾸어 쓰면 다음과 같다.

$$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_{OLS})-\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_{GLS})=B\Omega B' \tag{3-14}$$

그런데 Ω는 기본가정에 따라 陽定符號行列이므로 $B\Omega B'$는 陽定符號行列이 되고 $\hat{\beta}_{GLS}$는 $\hat{\beta}_{OLS}$보다 상대적으로 非效率的일 수가 없다.

결국 B가 零行列을 이룰 때에만 $\hat{\beta}_{GLS}$가 갖는 相對的 效率性이 사라지게 되는데 이는 곧 다음과 같은 條件을 의미한다.

$$(X'X)^{-1}X'=(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1} \tag{3-15}$$

젤너는 $\hat{\beta}_{GLS}$가 $\hat{\beta}_{OLS}$와 동일해져 追加的인 效率性을 상실하게 되는 두가지 경우를 지적하였다. 그 첫번째 경우는 $\sigma_{ij}=0$(모든 $i\neq j$에 대하여)인 경우로 Σ가 대각행렬이 되는 경우이고 두번째는 $X_1=X_2=\cdots=X_P=\bar{X}$ 즉 각 방정식의 설명변수가 동일한 경우이다. 後者의 경우에 속하는 대표적인 예는 스톤(R. Stone)의 線形支出體系(Linear Expenditure System), 바텐(A.P. Barten)과 타일에 의해 발전된 로텔담需要模型(the Rotterdam Demand Model), 그리고 크리스텐슨-조르겐슨-라우에 의한 초월로그함수를 이용한 생산함수 및 수요모형 등이다. 그러나 addilog效用函數로부터 유도된 수요함수에서 볼 수 있는 바와 같이 수요모형중에는 설명변수가 서로 상이한 모형도 있다는 점에 유의하여야 한다. 이를 定理로 요약하면 다음과 같다

定理 6: (3-2)식으로 표현되는 結合線形模型이 上記한 기본가정 (i)(ii)(iii)을 만족시킨다고 하자. 다음의 두 경우에 $\hat{\beta}_{i,GLS}=\hat{\beta}_{i,OLS}$가 성립한다.

(a) $\sigma_{ij}=0 \ (i\neq j)$ (3-16)

(b) $X_1=X_2=\cdots=X_P=\bar{X} \ (j=1, 2, \cdots, p)$ (3-17)

證明: $y=X\beta+u$, $u\sim N(0,\ \Omega=\Sigma\otimes I_n)$에서 $\hat{\beta}_{GLS}=(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y$이고 $\hat{\beta}_{OLS}=(X'X)^{-1}X'y$이다.

만일 (a)가 성립하면

$$X'\Omega^{-1}X=\mathrm{diag}\left(\frac{X_1'X_1}{\sigma_{11}},\ \frac{X_2'X_2}{\sigma_{22}},\ \cdots,\ \frac{X_P'X_P}{\sigma_{PP}}\right) \tag{3-18}$$

이고 따라서

$$(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y=(X'X)^{-1}X'y \tag{3-19}$$

이다. 즉 $\hat{\beta}_{GLS}=\hat{\beta}_{OLS}$가 성립한다.

또한 만일 (b)가 성립하면

$$X=I\otimes\bar{X} \tag{3-20}$$

가 되며 이를 이용하면

$$\begin{aligned}X'\Omega^{-1}X&=(I\otimes\bar{X}')(\Sigma^{-1}\otimes I)(I\otimes\bar{X})\\&=(\Sigma^{-1}\otimes\bar{X}'\bar{X})\end{aligned} \tag{3-21}$$

이 도출된다.

이제 이를 $\hat{\beta}_{GLS}$와 $\hat{\beta}_{OLS}$에 대입하면

$$\hat{\beta}_{GLS}=(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y$$
$$=(\Sigma^{-1}\otimes\bar{X}'\bar{X})^{-1}(\Sigma^{-1}\otimes\bar{X}')y$$
$$=[I\otimes(\bar{X}'\bar{X})^{-1}\bar{X}']y$$
$$\hat{\beta}_{OLS}=[(I\otimes\bar{X}')(I\otimes\bar{X})]^{-1}[I\otimes\bar{X}']y$$
$$=[I\otimes(\bar{X}'\bar{X})^{-1}\bar{X}']y$$

가 성립되어 $\hat{\beta}_{GLS}=\hat{\beta}_{OLS}$임을 알 수 있다. 이로써 證明이 完了되었다.

이제 $\hat{\beta}_{GLS}$의 分布에 관해 논의해 보자. $\hat{\beta}_{GLS}$의 分布函數를 유도하기 위해서는 다음과 같은 일련의 中心極限定理들을 먼저 인용해 둘 필요가 있다.[10]

定理 7(린드버그-펠러定理) : $\{X_i : i=1,2,\cdots\}$를 平均이 0이고 分散이 σ_i^2인 상호독립적 확률변수의 列(sequence)이라고 하자. 또한 그 분포함수를 $F_i(\cdot)$라고 하자. 그러면 確率變數列 $Z_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{s_n}=\sum_{i=1}^{n}x_{in}$가 표준정규분포, 즉 $N(0,1)$에 점근하고, 모든 $\varepsilon>0$에 대해

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le i\le n}P_r\{|X_{in}|>\varepsilon\}=0 \tag{3-22}$$

이 성립될 필요충분조건은 모든 $\eta>0$에 대해서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\eta^2S_n^2}\sum_{i=1}^{n}\int_{|\xi|>\eta S_n}\xi^2dF_i(\xi)=0 \tag{3-23}$$

일 것이다.

證明 : 라오(p. 128) 참조.

定理 8 : $\{X_i : i=1,2,\cdots\}$를 有限平均 μ와 共分散行列 Σ를 갖는 m次 $i.i.d.$ 확률벡타의 列이라고 하자. 그러면 벡타列

$$Z_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{n^{\frac{1}{2}}} \tag{3-24}$$

는 벡타 Z에 다음과 같이 점근한다.

$$Z\sim N(0,\Sigma) \tag{3-25}$$

證明 : 임의의 비확률벡타 α와 변수

$$y_i=\alpha'(x_i-\mu) \tag{3-26}$$

를 생각하자. 그러면 確率變數列 $\{y_i : i=1,2,\cdots\}$는 平均이 0이고 분산이 $\alpha'\Sigma\alpha$인 $i.i.d.$ 확률변수들로 구성되어 있다. 따라서 確率變數列

(10) 드라임즈 Ch. 3 및 Ch. 4 참조.

$$w_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n^{\frac{1}{2}}} \tag{3-27}$$

는 다음과 같이 하나의 확률변수로 점근한다.[11]

$$w \sim N(0, \alpha' \Sigma \alpha) \tag{3-28}$$

이제 w_n의 特性函數(characteristic function)를 $\psi_n(u)$로 표기하면

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(u) = \exp[-(u^2/2)(\alpha' \Sigma \alpha)] \tag{3-29}$$

이다.

한편 벡타 Z_n의 特性函數는 다음과 같다.

$$\phi_n(v) = \mathcal{E}[\exp(iv' Z_n)] \tag{3-30}$$

또한 λ와 α를 각각 실수와 실수벡타라고 할 때

$$v = \lambda\alpha \tag{3-31}$$

의 경우에도

$$\begin{aligned} \phi_n(\lambda\alpha) &= \mathcal{E}[\exp(i\lambda\alpha' z_n)] = \mathcal{E}[\exp(i\lambda y_n)] \\ &= \psi_n(\lambda) \end{aligned} \tag{3-32}$$

이 성립한다.

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \phi_n(\lambda\alpha) &= \exp[-(\lambda\alpha)' \Sigma (\lambda\alpha)/2] \\ &= \exp[-\lambda^2 \alpha' \Sigma \alpha/2] \end{aligned} \tag{3-33}$$

이 성립한다.

그러나 이것은 바로 z가 (3-24)식에서 정의된 確率變數列의 극한값이라면 各要素로 구성되는 그러한 線形結合도 正規分布를 이룬다는 것을 뜻한다. 따라서

$$z \sim N(0, \Sigma)$$

이다. 이로써 證明이 完了되었다.

定理 9 : $\{X_i : i=1, 2, \cdots\}$를 벡타확률변수의 한 列(sequence)이라고 하고 $F_i(\cdot)$를 관련된

---

(11) $\{x_i : i=1, 2, \cdots\}$를 平均이 μ이고 分散이 σ^2인 i, i, d확률변수들의 列이라고 할때 標準化된 變數들의 列

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)}{S_n} \quad (S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(x_i) = n\sigma^2)$$

는 $z \sim N(0, 1)$에 접근한다. 이를 린드버그-레비(Lindberg-Levy)의 中心極限定理라고 한다. 라오(p. 127) 참조.

분포함수라고 하자. 또한 $F_{\lambda_i}(\cdot)$를

$$u_{\lambda_i}=\lambda' X_i \text{ (}\lambda\text{는 實常數벡타)} \tag{3-24}$$

즉 스칼라(scalar) 확률변수의 분포함수라고 하자. 그러면 분포함수의 列 $\{F_i : i=1, 2, \cdots\}$가 한 분포함수 F에 접근하기 위한 필요충분조건은 u_{λ_i}의 분포함수를 F_{λ_i}라고 할때 모든 벡타 λ에 대해 列 $\{F_{\lambda_i} : i=1, 2, \cdots\}$가 어떠한 극한점에 접근하는 것이다.

證明 : 이를 흔히 多變數中心極限定理(Multivariate Central Limit Theorem)라고 부른다. 라오(p. 128) 참조.

定理 10 : $\{X_i : i=1, 2, \cdots\}$를 平均이 0이고 共分散行列이 Φ_i인 상호독립적인 벡타확률변수의 列이라고 하자. 또한

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Phi_i=\Phi\neq 0 \tag{3-25}$$

이고 모든 $\varepsilon>0$에 대해 다음이 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon\sqrt{n}}|x|^2dF_i(x)=0 \tag{3-26}$$

단, $|x|$는 벡타 x의 길이(length)이고 $F_i(\cdot)$는 X_i의 분포함수이다.

그러면 確率變數列 $\{z_n=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sqrt{n}} : n=1, 2, \cdots\}$는 $N(0, \Phi)$에 접근한다.

證明 : 定理 9를 이용하여 多變數를 一變數로 취급하자. 즉 다음과 같은 確率變數列을 정의하기로 한다.

$$w_n=\lambda' z_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda' x_i}{\sqrt{n}}\right)=\sum_{i=1}^{n}y_i \quad y_i=\frac{\lambda' x_i}{\sqrt{n}} \tag{3-27}$$

이제 모든 실수벡타 λ에 대해 변수 y_i가 (3-23)식과 같은 린드버그-펠러조건을 만족한다면 린드버그-펠러定理(定理 7)에 의해 $z_n=\sum_{i=1}^{n}x_i/\sqrt{n}$은 $N(0, \Phi)$에 접근한다.

이를 위해 $F_i(\cdot)$를 x_i의, $G_i(\cdot)$를 y_i의 분포함수로 생각하자. 그러면 모든 $\varepsilon>0$에 대해

$$\int_{|\xi|>\varepsilon}\xi^2dG_i(\xi)=\frac{1}{n}\int_{|\lambda'\zeta|>\varepsilon\sqrt{n}}|\lambda'\zeta|^2dF_i(\zeta) \tag{3-28}$$

이 성립한다.

그런데 $|\lambda'\zeta|\leq|\lambda||\zeta|$이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\int_{|\lambda'\zeta|>\varepsilon\sqrt{n}}|\lambda'\zeta|^2dF_i(\zeta)&\leq\frac{1}{n}\int_{|\lambda'\zeta|>\varepsilon\sqrt{n}}|\lambda|^2|\zeta|^2dF_i(\zeta)\\&\leq\frac{|\lambda|^2}{n}\int_{|\zeta|>(\varepsilon/|\lambda|)\sqrt{n}}|\zeta|^2dF_i(\zeta)\end{aligned} \tag{3-29}$$

이제 η를 다음과 같이 정의하자.

$$\eta=\frac{\varepsilon}{|\lambda|} \tag{3-30}$$

그러면 (3-29)식과 (3-26)식으로 부터 다음 식이 도출된다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{t=1}^{n}\int_{|\xi|>\varepsilon}\xi^2 dG_t(\xi)\le\lim_{n\to\infty}\frac{|\lambda|^2}{n}\sum_{t=1}^{n}\int_{|\zeta|>\eta\sqrt{n}}|\zeta|^2 dF_t(\zeta)=0 \tag{3-31}$$

그런데

$$\mathrm{Var}(w_n)=\lambda'\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\Phi_t\right)\lambda \tag{3-32}$$

임에 유의하면 定理 7에 의해

$$z_n\sim N(0,\Phi)$$

임을 쉽게 알 수 있다. 이로써 증명은 완료되었다.

마지막으로 證明한 定理 10은 $\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}}$의 分布를 규명하는 데 결정적인 역할을 하는 중요한 정리이다. 이제 $\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}}$의 分布를 다음 定理로 규명하여 보자.

定理 11 : (3-2)식 또는 (3-3)식으로 표현된 結合線形模型에서 $X_j(j=1,2,\cdots,p)$는 기본가정에 따라 일률적으로 경계를 갖는(bounded) 비확률변수라고 하자.

$$u=(u_{\cdot 1},\ u_{\cdot 2},\ \cdots,\ u_{\cdot p}) \tag{3-33}$$

를 정의하고 $u_{i\cdot}$를 i번째 列이라고 하자. 만일 모든 $\varepsilon>0$에 대해

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{|\phi|>\varepsilon\sqrt{n}}|\phi|^2 dF_i(\phi)=0 \tag{3-34}$$

이고 $u_{i\cdot}$이 서로 독립이면

$$\sqrt{n}\,(\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}}-\beta)\sim N\left[0,\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{X'\Omega^{-1}X}{n}\right)^{-1}\right] \tag{3-35}$$

이다. 또, 前記한대로 $\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}}=(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y$이고 $\Omega=\Sigma\otimes I_n$이며 $\Sigma=\mathrm{Cov}(u_{i\cdot}\ u_{j\cdot}')$이다.

證明 : $\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}}=(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y$

$$\begin{aligned}&=(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}(X\beta+u)\\&=\beta+(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}u\\&=\beta+\left(\frac{X'\Omega^{-1}X}{n}\right)^{-1}\frac{X'\Omega^{-1}u}{n}\end{aligned} \tag{3-36}$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\sqrt{n}\,(\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}}-\beta)=\left(\frac{X'\Omega^{-1}X}{n}\right)^{-1}\frac{X'\Omega^{-1}u}{\sqrt{n}} \tag{3-37}$$

그런데 기본가정에서 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{X'\Omega^{-1}X}{n}\right)^{-1}$는 有限非特異行列로 존재한다고 하였으므로 $X'\Omega^{-1}u/$

$\sqrt{n}$에만 관심을 가지면 된다. 그런데 이것은 바로 $K(=\sum_{j=1}^{p}k_j)$차 列벡타이다.

이제 $c_s^{(j)}$를 X_j'의 s번째 列이라고 하고 $\sigma^{k\cdot}$를 Σ^{-1}의 k번째 行이라고 하자. 그러면 다음과 같은 $(k_i \times p)$行列을 정의할 수 있다.

$$V_s^{(j)}=c_s^{(j)}\sigma^{j\cdot} \quad j=1,2,\cdots,p \tag{3-38}$$

그러면

$$V_s=\begin{pmatrix} V_s^{(1)} \\ V_s^{(2)} \\ \vdots \\ V_s^{(p)} \end{pmatrix} \tag{3-39}$$

이 정의되고 다음이 성립한다.

$$\frac{X'\Omega^{-1}u}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{s=1}^{n}V_s u_s' \tag{3-40}$$

그런데 $u_{s\cdot}'(s=1,2,\cdots,n)$은 서로 독립적인 확률벡타들이라고 하였으므로 列벡타들인 $V_s u_s'$ 역시 상호독립적이며 다음과 같은 특성을 갖게 된다.

$$\mathcal{E}(V_s u_s')=0, \quad \mathrm{Cov}(V_s u_s')=V_s \Sigma V_s' \tag{3-41}$$

또한 $V_s u_s'/\sqrt{n}$은 (3-34)식과 같은 조건을 만족시킴을 쉽게 알 수 있다.

이제 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{T}V_s\Sigma V_s'/n$을 생각하면 된다. 그러나 이것은 바로

$$\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}V_s\Sigma V_s'=\frac{1}{n}(X'\Omega^{-1}X) \tag{3-42}$$

이다.

따라서 定理 10에 따라 점근적으로 다음이 성립됨을 알 수 있다.

$$\frac{X'\Omega^{-1}u}{\sqrt{n}}\sim N\left(0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{X'\Omega^{-1}X}{n}\right) \tag{3-43}$$

또한 (3-37)식을 이용하면 $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}}-\beta)$의 분포도 점근적으로는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}}-\beta)\sim N\left[0,\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{X'\Omega^{-1}X}{n}\right)^{-1}\right]$$

이로써 증명이 완료되었다.

이상의 證明過程에서 한가지 特記할 점은 (3-34)식과 같은 가정인데, 이를 '攪亂項分散의 一律的 漸近假定'이라고 부른다. 만일 $\{u_i : i=1,2,\cdots\}$가 동일한 분포를 갖고 있다면 이 가정은 당연히 만족된다. 그러나 동일한 분포를 갖지 않을 때는 중심극한정리의 증명에 꼭 필요한 가정이 되는 것이다. 다시 말하면 $u_i\sim i.i.d$라고 가정하면 (3-34)식의 가정은 자동적으로 만족되는 것이다. 또한 u_i가 正規分布를 이룬다는 보다 강한 가정을 도입하면 이는

곧 u_i가 同一分布를 갖는다는 것이므로 (3-34)의 가정은 자동적으로 만족되는 것이다. 이러한 正規分布의 가정 밑에서는 표본의 크기가 有限하더라도 반드시 $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{GLS}-\beta)\sim N\left[0, \lim_{n\to\infty}\left(\frac{X'\Omega^{-}{}_{1}X}{n}\right)^{-1}\right]$이 성립한다. 또한 正規分布의 가정 밑에서 $\hat{\beta}_{GLS}$는 크래머-라오의 最小分散推定量이 되는데 이는 最尤推定法에서 再論하기로 한다.

3. 二段階一般最小自乘法

結合線形模型에서 攪亂項의 共分散構造를 아는 경우 前述한 것과 같이 GLS에 의한 추정량 도출과 또 統計的 推論을 단행하기 위한 GLS추정량의 분포함수 도출이 가능하다.

그런데 거의 모든 경우에 있어 Σ는 未知의 行列이므로 어떤 推定量으로 대체되지 않으면 안된다. Ω는 $(np\times np)$의 行列이지만 $p(p+1)/2$개의 Σ의 요소에 의해 완전히 識別될 수 있으므로 Σ의 一致推定量을 발견할 수 있다. 젤너는 p개의 방정식 각각(equation-by-equation)을 단순최소자승법으로 추정하여 얻게 되는 殘差項

$$e_i=y_i-X_i\hat{\beta}_{i,OLS} \tag{3-44}$$

을 이용하여

$$\hat{\Sigma}=\{\hat{\sigma}_{ij}\}=\left\{\frac{e_i'e_j}{n}\right\}\ i, j=1, 2, \cdots, p \tag{3-45}$$

$$\hat{\Omega}=\hat{\Sigma}\otimes I_n \tag{3-46}$$

을 구하고 이를 (3-4)식에 대입하는 2단계 일반최소자승법(Estimated or Two-Stage Generalized Least Squares: EGLS)에 의한 추정량($\hat{\beta}_{EGLS}$)을 제시하였다.

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{EGLS}&=[X'(\hat{\Sigma}^{-1}\otimes I)X]^{-1}X'(\hat{\Sigma}^{-1}\otimes I)y\\&=(X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}y\end{aligned} \tag{3-47}$$

그런데 p개의 방정식에 나타나는 설명변수의 수(k_i)는 서로 다를 수 있기 때문에 $e_i'e_j$를 어떻게 적절한 자유도로 나누어 줄 것인가 하는 문제가 남게 된다. (3-45)식에서와 같이 n으로 나누어 주게 되면 $\hat{\sigma}_{ij}$은 不偏性을 잃게 된다.

젤너의 原論文에서는 $e_i'e_j$를 $(n-K)$로 나누어 주는 것을 제시하였으나 이는 각 방정식의 설명변수가 동일한 경우 $(k_1=k_2=\cdots=k_p=k)$를 전제로 한 것이다. 일반적으로 $k_i\neq k_j$인 경우 n대신 $(n-k_i)^{\frac{1}{2}}(n-k_j)^{\frac{1}{2}}$이나 $n-k_i-k_j+t_r[(X_i'X_i)^{-1}X_i'X_j(X_j'X_j)^{-1}X_j'X_i]$으로 나누어 주는 방법이 젤너-후앙(Zellner & Huang)에 의해 제시되었다.

前者의 方法은 $i=j$ 즉 分散推定量만을 不偏推定量으로 만드는 데 반하여 後者의 方法은 分散 및 共分散推定量 전부를 不偏推定量으로 만든다. 그러나 後者의 方法을 적용할 때 $\hat{\Sigma}$은 陽定符號行列이 되지 않을 수 있기 때문에 그 결과 얻게되는 β의 측정량이 $\hat{\beta}_{EGLS}$보다 낫

다는 보장이 없게 된다. (12)

다음에는 $\hat{\beta}_{EGLS}$의 分布에 관해 생각해 보자. 젤너는 그의 논문 (pp. 352-353)에서 $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{EGLS}-\beta)$는 $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{GLS}-\beta)$와 동일한 近似正規分布(asymptotic normal distribution)을 이룬다는 것을 증명한 바 있다. (13) $\hat{\beta}_{EGLS}$의 分布를 규명하기 위해서는 $\hat{\Sigma}$의 一致性부터 證明할 필요가 있다.

命題 12 : $\hat{\Sigma}=\{\hat{\sigma}_{ij}\}=\{n^{-1}e_i'e_j\}$는 $\Sigma=\{\sigma_{ij}\}$의 一致推定量이다.

證明 : i번째 방정식의 OLS殘差項을 e_i라고 하자.

$$\begin{aligned} e_i &= y_i - X_i\hat{\beta}_{i,OLS} \\ &= y_i - X_i(X_i'X_i)^{-1}X_i'y_i \\ &= X_i\beta_i + u_i - X_i(X_i'X_i)^{-1}X_i'(X_i\beta_i+u_i) \\ &= [I - X_i(X_i'X_i)^{-1}X_i']u_i \end{aligned} \tag{3-48}$$

$$\begin{aligned} n^{-1}e_i'e_j &= n^{-1}u_i'[I-X_i(X_i'X_i)^{-1}X_i'][I-X_j)X_j'X_j)^{-1}X_j']u_j \\ &= \frac{u_i'u_j}{n} - \frac{u_i'X_i}{n}\left(\frac{X_i'X_i}{n}\right)^{-1}\frac{X_i'u_j}{n} - \frac{u_i'X_j}{n}\left(\frac{X_j'X_j}{n}\right)^{-1}\frac{X_j'u_j}{n} \\ &\quad + \frac{u_i'X_i}{n}\left(\frac{X_i'X_i}{n}\right)^{-1}\frac{X_i'X_j}{n}\left(\frac{X_j'X_j}{n}\right)^{-1}\frac{X_j'u_j}{n} \end{aligned} \tag{3-49}$$

그런데 기본가정(iii)에 따라

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_i'X_i}{n},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{X_j'X_j}{n},\quad \text{및}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{X_i'X_j}{n}$$

은 有限非特異行列을 이루고

$$\text{plim}\frac{X_i'u_i}{n},\quad \text{plim}\frac{X_j'u_j}{n},\quad \text{plim}\frac{X_i'u_j}{n},\quad \text{및}\quad \text{plim}\frac{X_j'u_i}{n}$$

이 전부 0이 되므로

$$\text{plim}(n^{-1}e_i'e_j)=\sigma_{ij} \tag{3-50}$$

이다. 이로써 證明이 完了되었다.

定理 13 : $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{EGLS}-\beta)$는 $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{GLS}-\beta)$와 동일한 近似分布를 갖는다. 즉

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{EGLS}-\beta)\sim N\left[0,\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{X'\Omega^{-1}X}{n}\right)^{-1}\right] \tag{3-51}$$

이다.

證明 : 定義에 따라 $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{EGLS}-\beta)$의 近似分布는 이 確率變數列이 점근하는 확률변수의

---

(12) 後者의 方法에 대한 理論的 根據는 正準相關分析理論(canonical correlation theory)에서 구할 수 있다. 타일(pp. 317-322) 참조.

(13) 젤너의 證明이 보다 직접적인 증명이나 여기에서는 드라임즈와 스미트를 인용하기로 한다.

분포를 말한다. 그런데 어떤 확률변수列 $\{X_i : i=1, 2, \cdots\}$이 확률변수 X에 확률적으로 점근 한다면(converges in probability) 그 列의 분포함수 $F_i(\cdot)$도 x의 분포함수 $F(\cdot)$에 점근한다는 점근분포의 정리[14]에 따라 $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{\text{EGLS}}-\beta)$가 가령 z라는 확률변수에 확률적 점근을 이룬다면 그 분포함수 역시 z의 분포함수에 점근한다.

이제 $\hat{\beta}_{\text{EGLS}}=(X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}y$로 부터

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{\text{EGLS}}-\beta)=\left(\frac{X'\hat{\Omega}^{-1}X}{n}\right)^{-1}\frac{X'\hat{\Omega}^{-1}y}{\sqrt{n}} \tag{3-52}$$

을 유도할 수 있다.

그런데 $\hat{\Omega}$은 命題 12에서 證明한 대로 Ω의 一致推定量이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\sqrt{n}(\hat{\beta}_{\text{EGLS}}-\beta)&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{X'\Omega^{-1}X}{n}\right)^{-1}\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\frac{X'\Omega^{-1}y}{\sqrt{n}}\\&=\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\sqrt{n}(\hat{\beta}_{\text{GLS}}-\beta)\end{aligned} \tag{3-53}$$

그런데 定理 11에 의해 $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{\text{GLS}}-\beta)\sim N\left[0,\ \lim\left(\frac{X'\Omega^{-1}X}{n}\right)^{-1}\right]$이므로 $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{\text{EGLS}}-\beta)\sim N\left[0,\ \lim\left(\frac{X'\Omega^{-1}X}{n}\right)^{-1}\right]$이다. 이로써 증명이 완료되었다.

이상의 論議로 부터 우리는 다음과 같은 두가지 사실을 도출할 수 있다.

첫째, $\sqrt{n}(\hat{\beta}_{\text{EGLS}}-\beta)$의 近似分布의 共分散에 대한 一致推定量은 $(X'\hat{\Omega}^{-1}X/n)^{-1}$임을 알 수 있다.

둘째, β의 요소에 대한 가설검증은 t分布 대신 z分布나 χ^2-分布에 의존해야 한다는 점이다. 그 이유는 $\hat{\beta}_{\text{GLS}}$에 대한 分布가 近似分布이기 때문이다. 예를 들어 $\beta^{(s)}$를 β의 s번째 요소로, q_{ss}를 $(X'\hat{\Omega}^{-1}X/n)^{-1}$의 s번째 대각요소라고 보면 점근적으로는 다음이 성립된다.

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\beta}_{\text{GLS}}{}^{(s)}-\beta^{(s)})}{q_{ss}}\sim N(0,1) \tag{3-54}$$

마지막으로 Σ의 分布를 규명하기 위해서는 교란항이 正規分布를 이룬다는 가정이 필요하다. 따라서 이 문제역시 最尤推定法에서 다루기로 한다.

젤너-후앙은 젤너가 제안한 二段階一般最小自乘推定量$(\hat{\beta}_{\text{EGLS}})$이 單純最小自乘推定量$(\hat{\beta}_{\text{OLS}})$에 비해 어느 정도의 점근적 效率性을 갖고 있는가를 분석하고 $\hat{\beta}_{\text{EGLS}}$의 一般分散(generalized variance)이 諸說明變數間의 關係에 의해 영향을 받게 된다는 점을 摘示하였다. 젤너(1963)는 나중에 발표한 논문에서 $\hat{\beta}_{\text{EGLS}}$의 小標本特性(small sample properties)을 고찰하였는데 $X_1'X_2=X_2'X_1=0\,(p=2)$의 경우와 攪亂項이 正規分布를 이루는 경우에 국한하였다. 그는

(14) 이 정리의 증명은 로에브(M. Loève) Ch. 6에 있다.

$\hat{\beta}_{EGLS}$가 不偏推定量이고 그 分散이 $\hat{\beta}_{OLS}$의 分散보다 작다는 것을 보여준 바 있으며 u_1과 u_2의 상관관계가 낮거나 또는 표본의 크기가 아주 작은 경우에는 그 相對的 效率性이 작아진다는 것을 지적한 바 있다. 또한 가쿠와니(N.C. Kakwani)는 $\hat{\beta}_{EGLS}$의 平均이 존재하고 교란 항들이 連續對稱確率法則[15] (continuous symmetric probability law)을 따르는 한 說明變數間의 直交關係라는 조건이 없이도 $\hat{\beta}_{EGLS}$가 不偏性을 갖는다는 점을 證明하였다.

4. 反復最小自乘法

텔서는 結合線形模型의 推定을 위해 二段階一般最小自乘法에서 한걸음 더 나아가 反復最小自乘法(Iterative Least Squares Method)을 제안하였다. 그는 각 방정식의 교란항을 餘他方程式의 교란항들로 구성된 線形函數로 다음과 같이 정의하였다.

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + \cdots + a_{1p}u_p + v_1 \\ u_2 &= a_{21}u_1 + a_{23}u_3 + \cdots + a_{2p}u_p + v_2 \\ &\vdots \\ u_p &= a_{p1}u_1 + a_{p2}u_2 + \cdots + a_{p,p-1}u_{p-1} + v_p \end{aligned} \tag{3-55}$$

단, a_{ij}는 계수이며 v_i는 $n\times 1$ 벡타로서 $Eu_iv_j=0\,(i\neq j)$이다.

텔서가 제시한 반복추정법은 (3-2)식으로 표현된 結合線形模型에서 各 方程式의 攪亂項들을 (3-55)식으로 대체하는 것으로 이렇게 함으로써 各 方程式의 교란항들과 餘他方程式의 교란항들간의 관계를 明示的으로 고려할 수 있다는 것이다. 만일 u_i가 어떠한 餘他方程式의 교란항 u_j와도 상관관계를 갖지 않는 경우에는 (3-55)식으로 부터

$$u_i = v_i \tag{3-56}$$

이 됨을 쉽게 알 수 있다.

또한 텔서는 結合線形模型의 기본가정 (ii)에서 정의된 $\mathcal{E}uu'=\Omega=\Sigma\otimes I_n$에서 Σ의 역행렬 (Σ^{-1})의 요소를 σ^{ij}라고 표기할 때 $a_{ij}=-\dfrac{\sigma^{ij}}{\sigma^{ii}}$임을 다음과 같이 보여주고 있다.

먼저 (3-55)식으로 부터 $(n\times p)$行列

$$U=[u_1, u_2, \cdots, u_p] \tag{3-57}$$

---

(15) $\hat{\Omega}$을 Ω의 推定量이라고 할 때 $\hat{\Omega}$은 u의 偶數函數(even function)라고 볼 수 있다. 즉 u의 부호가 바뀌더라도 Ω에는 변화가 없다. 그러면 $\hat{\beta}_{EGLS}$의 分布는 β를 중심으로 對稱分布를 이룬다. 즉 $\hat{\beta}_{EGLS}$의 平均이 存在한다면 $\hat{\beta}_{EGLS}$는 不偏推定量이다. 그 이유는 $\hat{\beta}_{EGLS}=\beta+(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}u$에서 u는 對稱分布를 이룬다고 하였으므로 u와 $-u$는 같은 確率密度를 갖는다.

그리고 u와 $-u$는 같은 값의 Ω을 의미하므로

$$\hat{\beta}_{EGLS}-\beta=(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}u$$

와

$$\beta-\hat{\beta}_{EGLS}=(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}(-u)$$

는 동일한 確率密度를 갖는다. 따라서 $\hat{\beta}_{EGLS}$는 β를 중심으로 對稱分布를 이룬다. 스미트(p. 72 및 p. 85) 참조.

를 정의하고 이로부터 i번째 행렬을 제외시킨 $n\times(p-1)$行列 U_i를 정의하자.

$$U_i=[u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_{i-1},\ u_{i+1},\ \cdots,\ u_p] \tag{3-58}$$

이를 이용하여 (3-55)식을 달리 표현하면 다음과 같다.

$$u_i=U_ia_i+v_i \tag{3-59}$$

단,

$$\mathcal{E}U_i'v_i=0 \tag{3-60}$$

의 조건이 내포되어 있다. 또한 a_i는 (3-55)식에서 이미 정의한 바 있는데 율(Yule)의 表記法을 따라 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$a_i=\begin{bmatrix} a_{i1\cdot2\cdots p} \\ a_{i2\cdot1\cdots p} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{ip\cdot1\cdots p-1} \end{bmatrix} \tag{3-61}$$

가령 $a_{i1\cdot2\cdots p}$는 u_i를 u_1에 회귀시킨 경우의 계수를 의미한다. 또한 표기의 편의를 위해 혼동이 되지 않는 경우에는 점(·) 이후의 添字는 생략하기로 한다.

또한 다음과 같은 列벡타를 정의하자.

$$c_i=\begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \cdots \\ -1 \\ \cdots \\ a_{ip} \end{pmatrix} \tag{3-62}$$

즉 c_i는 a_i의 $(i-1)$번째 行에다 -1을 추가시킨 것이다.

따라서 (3-59)식은 다음 식으로 고쳐 쓸 수 있다.

$$-v_i=Uc_i \tag{3-63}$$

이제 v_i로 구성되는 $(n\times p)$행렬 V와 c_i로 구성되는 行列 C를 각각 정의하자.

$$V=[v_1\cdots v_p] \tag{3-64}$$

$$C=[c_1\cdots c_p] \tag{3-65}$$

그러면 (3-63)식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$-V=UC \tag{3-66}$$

또한 v_i와 v_j의 共分散을 θ_{ij}로 정의하자. 즉

$$\frac{1}{n}\mathcal{E}v_i'v_j=\theta_{ij}\frac{1}{n}\mathcal{E}V'V=\theta \tag{3-67}$$

단, θ는 $p\times p$의 陽定符號對稱行列이므로, θ_{ii}는 음수일 수가 없고 따라서 (3-59)식의 v_i 역시 동일하게 0이 될 수는 없다.

따라서 (3-66)식에다 U'을 곱하면

$$-U'V=U'UC \tag{3-68}$$

이 성립한다.

그런데 확률적으로 $\frac{1}{n}U'U \underset{i.p.}{\longrightarrow} \Sigma$이고 (3-60)에 의해 비대각요소는 전부 0이 되므로 $\frac{1}{n}U'V$는 확률적으로 θ에서 대각요소만을 취한 θ_d에 접근하게 된다.

$$D=-\theta_d=\Sigma C=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sigma^{11}} & & 0 \\ & -\frac{1}{\sigma^{22}} & \\ 0 & & \ddots -\frac{1}{\sigma^{pp}} \end{pmatrix} \tag{3-69}$$

(단, σ^{ij}는 Σ^{-1}의 각 요소)

그런데 C의 대각요소는 전부 -1이므로

$$\sigma^{ii}=1/\theta_{ii} \tag{3-70}$$

이고 (3-69)식은 또한 다음 식과 같다.

$$\Sigma^{-1}D=C \tag{3-71}$$

따라서 (3-55)식과 같은 회귀방정식체계의 계수는 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$a_{ij}=-\frac{\sigma^{ji}}{\sigma^{ii}} \tag{3-72}$$

이제 (3-55)식을 (3-2)식에 대입하면 結合線形模型의 推定問題는 β와 a의 推定問題로 귀착된다. 예컨대 첫번째 방정식은 다음과 같다.

$$y_1=X_1\beta_1+[u_2, u_3, \cdots, u_p]\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ \vdots \\ a_{1p} \end{bmatrix}+v_1 \tag{3-73}$$

(3-73)식을 볼 때 만일 u가 觀測可能한 變數라면 OLS의 적용이 가능할 것이다. 그런데 교란항은 觀測不可能하므로 텔서는 模型의 各方程式을 OLS로 추정하여 $\hat{\beta}_{i,\mathrm{OLS}}$를 구하고 이로부터 e_i를 구하여 이를 (3-73)식의 추정에 사용할 것을 제시하였다. 이와 같이 첫번째로 얻은 OLS 추정치를 텔서는 각각 $\hat{\beta}_{\mathrm{OLS}}(0)$와 $e(0)$로 표기하고 있다.

$$\hat{\beta}_{\mathrm{OLS}}{}^{(0)}=(X'X)^{-1}X'y \tag{3-74}$$

$$e(0)=y-X\hat{\beta}_{\mathrm{OLS}}(0) \tag{3-75}$$

가령 (3-73)식에서 $e(0)$를 이용하여 추정한 β를 $\hat{\beta}_1(1)$으로 표기하면 이는 다시 $u_1(1)$을 생성한다.

$$u_1(1)=y_1-X_1\hat{\beta}_1(1) \tag{3-76}$$

다음에는 $u_1(1)$과 $u_3(0), u_4(0), \cdots, u_p(0)$를 이용하여 두번째 방정식

$$y_2 = X_2\beta_2 + [u_1(1)u_3(0)\cdots u_p(0)]\begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{2p} \end{bmatrix} + v_2(1) \tag{3-77}$$

이 추정된다. 또 그 추정량을 $\hat{\beta}_2(1)$이라 하면 이번에는 $u_2(1)$이 생성된다.

$$u_2(1) = y_2 - X_2\hat{\beta}_2(1) \tag{3-78}$$

이와 같은 반복과정을 $\hat{\beta}$이 수렴할 때까지 되풀이 하면 i번째 방정식은

$$y_i = X_i\hat{\beta}_i(t) + [u_1(t), \cdots, u_{i-1}(t), u_{i+1}(t-1), \cdots u_p(t-1)]a_i(t) + v_i(t) \tag{3-79}$$

가 되고 그 결과 얻게 되는 OLS 추정량을 텔서의 反復推定量(Telser's Iterative Estimator: TIE)이라고 부른다. 이를 $\hat{\beta}_{\mathrm{TIE}}$라 표기하기로 한다.

텔서는 그의 論文에서 이와 같은 방법은 바르가(R.S. Varga)에 설명된 反復行列分析(matrix iterative analysis)의 技法인 가우스-자이델(Gauss-Seidel)의 線形同次方程式解法을 적용한 것임을 지적하고 있다.

또한 텔서는 反復過程에서 추정된 $\hat{\beta}_i(\cdot)$와 $\hat{a}_i(\cdot)$들이 표본적률의 有理函數(rational function)로 이들 표본적률의 일부는 그 자체가 표본적률의 有理函數인 교란항의 一致推定量들이므로 슬러츠키定理[16](Slutsky's Theorem)에 따라 이들 역시 一致推定量이 된다고 하였다.

텔서는 이와 같은 방법에 의한 반복추정량 $\hat{\beta}(t)$이 $\hat{\beta}_{\mathrm{TIE}}$에 수렴하는 것을 증명하였다.

$$\hat{\beta}(t) \to \hat{\beta}_{\mathrm{TIE}} \tag{3-80}$$

그리고 그는 $\hat{\beta}_{\mathrm{TIE}}$가 $\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}}$나 $\hat{\beta}_{\mathrm{EGLS}}$와 같이 多變數正規分布에 접근한다는 것을 보여 주었다.

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{\mathrm{TIE}} - \beta) \sim N\left[0,\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{X'\Omega^{-1}X}{n}\right)^{-1}\right] \tag{3-81}$$

젤너 역시 이와 같은 反復推定法의 可能性을 그의 原論文(p. 363 註 13)에서 이미 摘示한 바 있다. 즉 $\hat{\beta}_{\mathrm{EGLS}}$를 이용하면 새로운 殘差項 $e_{\mathrm{EGLS}} = y - X\hat{\beta}_{\mathrm{EGLS}}$을 생성할 수 있고 그 결과 또 다른 $\hat{\Omega}$($\hat{\Omega}_{\mathrm{EGLS}}$라고 하자) 추정할 수 있기 때문이다. 이러한 과정을 반복하는 추정법을 反復一般最小自乘法(Iterative Generalized Least Squares Method: IGLS)이라고 부르고 최종적으로 수렴되어 얻는 추정량($\hat{\beta}_{\mathrm{IGLS}}$)을 反復一般最小自乘推定量이라고 부른다. 크멘타-길버트(J. Kmenta and R.F. Gilbert)는 $\hat{\beta}_{\mathrm{IGLS}}$ 역시 一致推定量이고 $\hat{\beta}_{\mathrm{EGLS}}$와 동일한 점근적 특성을 갖는다는 것을 증명하였는데 이는 $\hat{\beta}_{\mathrm{EGLS}}$가 β의, 그리고 $\hat{\Omega}_{\mathrm{EGLS}}$가 Ω의 一致推定量이므로 前述한 슬러츠키定理에 따라 $\hat{\beta}_{\mathrm{IGLS}}$ 역시 一致性을 갖기 때문이다.

그리고 $\hat{\beta}_{\mathrm{EGLS}}$가 $\hat{\beta}_{\mathrm{OLS}}$보다 效率的이므로 $\hat{\Omega}_{\mathrm{EGLS}}$ 역시 $\hat{\Omega}$보다 더 效率的이라고 볼 수 있고

(16) 슬러츠키定理에 의하면 연속함수의 확률극한은 확률극한의 함수이다. 즉 plim $x = x^*$이고 $g(x)$가 연속함수이면 plim $g(x) = g(x^*)$이다. 증명은 윌크스(Wilks) pp. 102-103 참조.

이에 근거하여 $\hat{\beta}_{IGLS}$가 $\hat{\beta}_{EGLS}$보다 優越하다고 말할 수 있을지 모른다. 그러나 $\hat{\beta}_{IGLS}$와 $\hat{\beta}_{EGLS}$의 近似的 特性이 同一하므로 相對的 效率性 比較는 小標本의 경우에 국한하여 몬테—칼로 시험에 의존할 수 밖에 없을 것이다.

코멘타-길버트가 행한 몬테-칼로연구에 의하면 $\hat{\beta}_{TIE}$와 $\hat{\beta}_{IGLS}$는 다음에 논의하는 最尤推定量($\hat{\beta}_{MLE}$)과 거의 동일한 推定値를 가져오는 것으로 나타났다. 즉 그들은 이들 세 추정법이 동일한 非線形方程式體系의 解를 구하는 相異한 方法으로 간주할 수 있다는 것이다.

크멘타-길버트의 小標本硏究에 의하면 $\hat{\beta}_{EGLS}$가 $\hat{\beta}_{OLS}$보다 效率的인 것은 확실하나 $\hat{\beta}_{IGLS} \simeq \hat{\beta}_{TIE} \simeq \hat{\beta}_{MLE}$의 $\hat{\beta}_{EGLS}$에 대한 相對的 效率性은 극히 미미하다는 것이다. 따라서 그들은 계산상의 부담이 적은 $\hat{\beta}_{EGLS}$가 더욱 選好된다는 잠정적 결론을 내리고 있다.

5. 最尤推定法

結合線形模型의 기본가정으로

iv) $u \sim N(0, \Omega)$

즉 교란항이 多變數正規分布를 갖는다는 가정을 추가하면 最尤推定量을 도출할 수 있다. 드라임즈〔7〕, 오버호퍼-크멘타(W. Oberhofer and J. Kmenta) 및 매그너스(J.R. Magnus) 등은 最尤推定法에 의해 도출된 推定量들이 前述한 $\hat{\beta}_{GLS}$, $\hat{\beta}_{EGLS}$ 및 $\hat{\beta}_{IGLS}$ 등의 推定量들과 동일한 점근적 특성을 갖는다는 것을 보여준 바 있다.

最尤推定量의 유도과정을 이해하기 위해서는 뉴데커(Neudecker)類의 벡타代數의 정리들을 먼저 요약해 둘 필요가 있다.

벡타代數의 定理 : $A=[a_{ij}]$를 $(m\times n)$행렬, $A._j$를 A의 j번째 列로 정의하면 Vec A는 다음과 같은 $(mn\times 1)$列벡타이다.

$$\text{Vec } A=\begin{pmatrix} A._1 \\ \vdots \\ A._n \end{pmatrix}$$

또한 $(s\times t)$행렬 Q를 정의하고 $(ms\times nt)$행렬 $A\otimes Q=[a_{ij}Q]$를 정의하자.

그러면 다음 식이 성립한다.

(1) $\text{Vec } ABC=(C'\otimes A)\text{Vec } B$

단, A는 $(m\times n)$, B는 $(n\times p)$, 그리고 C는 $(p\times q)$행렬이다.

(1)식의 特殊한 경우로 다음 식을 생각할 수 있다.

(2) $\text{Vec } AB=(I_p\otimes A)\text{Vec } B=(B'\otimes I_m)\text{Vec } A$

$$=(B'\otimes A)\text{Vec } I_n$$

또한 Vec(•)은 trace와도 다음과 같은 관련을 갖는다.

(3) $\mathrm{tr}\,AZ=(\mathrm{Vec}\,A')'(\mathrm{Vec}\,Z)$

단, Z는 $(n\times m)$행렬이다.

(3)식으로부터 다음 식이 성립된다.

$$\begin{aligned}(4)\ \mathrm{tr}\,ABCD&=(\mathrm{Vec}\,B')'(A'\otimes C)\,\mathrm{Vec}\,D\\&=(\mathrm{Vec}\,C')'(B'\otimes D)\,\mathrm{Vec}\,A\\&=(\mathrm{Vec}\,D')'(C'\otimes A)\,\mathrm{Vec}\,B\\&=(\mathrm{Vec}\,A')'(D'\otimes B)\,\mathrm{Vec}\,C\end{aligned}$$

단 D는 $(q\times m)$행렬이다.

(4)식을 이용하여 가장 일반적인 公式을 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(5)\ \mathrm{tr}\,ABCEF&=(\mathrm{Vec}\,E')'(C'\otimes FA)\,\mathrm{Vec}\,B\\&=(\mathrm{Vec}\,E)'(FA\otimes C')\,\mathrm{Vec}\,B'\end{aligned}$$

단, E는 $(q\times r)$행렬이고 F는 $(r\times m)$행렬이다.

그리고 (4)식의 특수한 경우로 다음 식을 생각할 수 있다.

(6) $\mathrm{tr}\,GVHV=(\mathrm{Vec}\,G)'(V\otimes V)\,\mathrm{Vec}\,H$

단, G, H 및 V는 대칭행렬이다.

그리고 마지막으로 다음 식이 성립된다.

(7) $x'AB=(\mathrm{Vec}\,A)'(B\otimes x)=(\mathrm{Vec}\,A')'(x\otimes B)$

단, 이 경우 x는 $(m\times 1)$벡타를 의미한다.

벡타代數의 定理들을 이용하기 위해 먼저 (3-2)식으로 표현된 結合線形模型의 尤度函數(likelihood function)를 정의하자. 多變數正規分布에서 既述한 대로 만일 $u\sim N(0,\Omega)$이면 그 분포함수는 (2-38)식과 같다. 따라서 尤度函數는 아래 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned}L&=(2\pi)^{-\frac{1}{2}np}|\Omega|^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}u'\Omega^{-1}u\right]\\&=(2\pi)^{-\frac{1}{2}np}|\Sigma\otimes I|^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}u'\Omega^{-1}u\right]\end{aligned}\tag{3-82}$$

그런데 $\Omega=\Sigma\otimes I$의 決定係數인 $|\Omega|=|\Sigma\otimes I_n|$는

$$|\Omega|=|\Sigma\otimes I_n|=|\Sigma|^n|I|^p=|\Sigma|^n\tag{3-83}$$

이고, $u=y-X\beta$이므로 이를 (3-82)식에 대입하면

$$L=(2\pi)^{-\frac{1}{2}np}|\Sigma|^{-\frac{1}{2}n}\exp\left[-\frac{1}{2}(y-X\beta)'(\Sigma\otimes I)^{-1}(y-X\beta)\right]\tag{3-84}$$

가 된다.

이제 $(pp\times 1)$벡타 $\mathrm{Vec}(\Sigma)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathrm{Vec}(\Sigma)=\sigma_{ij}=\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{12}\\ \vdots\\ \sigma_{1p}\\ \sigma_{21}\\ \vdots\\ \sigma_{2p}\\ \vdots\\ \sigma_{pp}\end{pmatrix} \tag{3-85}$$

그러면 (3-84)식을 (β,σ)에 대해 極大化하는 것은 로그 尤度函數를 極大化하는 것으로 충분하다.

$$\log L=-\frac{1}{2}np\log 2\pi-\frac{1}{2}n\log|\Sigma|-\frac{1}{2}(y-X\beta)'(\Sigma\otimes I)^{-1}(y-X\beta) \tag{3-86}$$

이를 β에 대해 一次微分하면

$$\begin{aligned}\frac{\partial\log L}{\partial\beta}&=\frac{\partial}{\partial\beta}\left[-\frac{1}{2}(y-X\beta)'(\Sigma\otimes I)^{-1}(y-X\beta)\right]\\&=\frac{\partial}{\partial\beta}\left[-\frac{1}{2}\{y'(\Sigma\otimes I)^{-1}y-2\beta'X'(\Sigma\otimes I)^{-1}y+\beta'X'(\Sigma\otimes I)^{-1}X\beta\}\right]\\&=X'(\Sigma\otimes I)^{-1}y-X'(\Sigma\otimes I)^{-1}X\beta\end{aligned} \tag{3-87}$$

를 얻게 되고 一階條件으로서

$$\begin{aligned}\hat{\beta}&=[X'(\Sigma\otimes I)^{-1}X]^{-1}X'(\Sigma\otimes I)^{-1}y\\&=(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y\end{aligned} \tag{3-88}$$

가 성립된다.

또 다른 一階條件을 구하기 위해 이번에는 로그 尤度函數를 Σ^{-1}의 요소인 σ^{ij}에 대해 一次微分을 구하자. (17)

$$\begin{aligned}\frac{\partial\log L}{\partial\sigma^{ij}}&=\frac{1}{2}n\frac{\partial}{\partial\sigma^{ij}}\log|\Sigma^{-1}|-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\sigma^{ij}}(y-X\beta)'(\Sigma^{-1}\otimes I)(y-X\beta)\\&=\frac{1}{2}n\sigma_{ji}-\frac{1}{2}(y_i-X\beta_i)'(y_j-X\beta_j)\end{aligned} \tag{3-89}$$

이 식을 0에 一致시키고 $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$를 이용하면 다음 식이 도출된다.

$$\hat{\sigma}_{ij}=\frac{1}{n}(y_i-X\hat{\beta}_i)'(y_j-X\hat{\beta}_j) \tag{3-90}$$

(3-88)식과 (3-90)식을 동시에 만족시키는 解가 바로 結合線形模型의 最尤推定量이다.

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{\mathrm{MLE}}&=[X'(\hat{\Sigma}_{\mathrm{MLE}}\otimes I)^{-1}X]^{-1}X'(\hat{\Sigma}_{\mathrm{MLE}}\otimes I)^{-1}y\\&=[X'\hat{\Omega}_{\mathrm{MLE}}{}^{-1}X]^{-1}X'\hat{\Omega}_{\mathrm{MLE}}{}^{-1}y\end{aligned} \tag{3-91}$$

---

(17) 行列微分公式중 $\frac{\partial\log|A|}{\partial a_{ij}}=a^{ji}(i;\ j=1,\ \cdots p)$과 $\frac{\partial a^{ij}}{\partial a_{hk}}=-a^{ih}a^{kj}(i,j,h,k=1\cdots p)$이 사용된다. 드라임즈(A.4) 참조.

$$\hat{\Sigma}_{\mathrm{MLE}}=\{\hat{\sigma}_{ij,\mathrm{MLE}}\}=\frac{1}{n}(y-X\hat{\beta}_{\mathrm{MLE}})'(y-X\hat{\beta}_{\mathrm{MLE}})=\frac{1}{n}E'E \tag{3-92}$$

단, $E=y-X\hat{\beta}_{\mathrm{MLE}}$이고 $\hat{\Omega}_{\mathrm{MLE}}=\hat{\Sigma}_{\mathrm{MLE}}\otimes I_n$이다.

이제 크레머-라오行列을 구하기 위해 一階條件들로부터 情報行列을 도출해 보자. 먼저 $\log L$ 函數로부터 제 2 차 미분값을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial\beta\partial\beta'}=-X'\hat{\Omega}^{-1}X \tag{3-93}$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial\sigma^{ij}\partial\beta_j}=-\frac{1}{2}(X'\hat{\Omega}^{-1}X\hat{\beta}_i-X'\hat{\Omega}^{-1}y_i) \tag{3-94}$$

(단 $i,j=1\cdots p$)

단, $\hat{\beta}_{\mathrm{MLE}}$와 $\hat{\Omega}_{\mathrm{MLE}}$의 添字 MLE는 생략하기로 한다.

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial\sigma^{ij}\partial\sigma^{hk}}=-\frac{n}{2}\hat{\sigma}_{jk}\hat{\sigma}_{hi} \tag{3-95}$$

(단, $i,j,h,k=1\cdots p$)

위식들에 기대값을 취하면 다음과 같은 식들이 유도된다.

$$\mathcal{E}\left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial\beta\partial\beta'}\right)=-X'\Omega^{-1}X \tag{3-96}$$

$$\mathcal{E}\left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial\sigma^{ij}\partial\beta_j}\right)=0 \tag{3-97}$$

$$\mathcal{E}\frac{\partial^2 \log L}{\partial\sigma^{ij}\partial\sigma^{hk}}=-\frac{n}{2}\sigma_{jk}\sigma_{hi} \tag{3-98}$$

즉 情報行列式의 要素는 이들 기대값에다 (−)를 붙인 값이므로 다음이 성립한다.

$$R(\theta)=\begin{bmatrix} X'\Omega^{-1}X & 0 \\ 0 & \frac{n}{2}(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1}) \end{bmatrix} \tag{3-99}$$

$$=\begin{bmatrix} X'\Omega^{-1}X & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \operatorname{Vec}\Omega^{-1}}{\partial\theta}\right)(\Omega\otimes\Omega)\left(\frac{\partial \operatorname{Vec}\Omega^{-1}}{\partial\theta}\right)' \end{bmatrix} \tag{3-100}$$

$$=\begin{bmatrix} X'(\Sigma^{-1}\otimes I)X & 0 \\ 0 & \frac{n}{2}(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1}) \end{bmatrix} \tag{3-101}$$

따라서 크래머-라오 행렬은 다음과 같이 유도된다.

$$R(\theta)^{-1}=\begin{bmatrix} [X'(\Sigma^{-1}\otimes I)X]^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{2}{n}(\Sigma\otimes\Sigma) \end{bmatrix} \tag{3-102}$$

다음에는 $\hat{\beta}_{\mathrm{MLE}}$와 $\hat{\sigma}_{ij\mathrm{MLE}}$의 分布函數와 그 特性을 導出하기로 하자. 이를 위해 먼저 다음과 같은 두 定理를 소개하기로 한다.

定理 14: (3-82)식의 極大化 一階條件式은 다음과 같이 쓸 수 있다.

(a) $\beta_{\mathrm{MLE}}=(X'\hat{\Omega}^{-1}{}_{\mathrm{MLE}}X)^{-1}X'\hat{\Omega}_{\mathrm{MLE}}{}^{-1}y$ (3-103)

(b) $\mathrm{tr}\left(\frac{\partial\Omega^{-1}}{\partial\theta_h}\Omega\right)_{\theta=\theta}=e'\left(\frac{\partial\Omega^{-1}}{\partial\theta_h}\right)_{\theta=\theta}e$ (3-104)

(단 $h=1\cdots p$)

여기에서 Ω는 m개의 係數$(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$의 2차 미분가능함수라고 가정하자. 즉 $\Omega=\Omega(\theta)$ $\theta\in\Theta$이다.

또한 $|\Omega|$이 θ_j에 의존하지 않으면 (3-104)식의 j번째 방정식은 다음과 같다.

$$e'\left(\frac{\partial\otimes\Omega^{-1}}{\partial\theta_j}\right)_{\theta=\hat{\theta}}e=0 \tag{3-105}$$

證明: (3-82)식을 옮겨 쓴다.

$$L=(2\pi)^{-\frac{1}{2}np}|\Omega|^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}u'\Omega^{-1}u\right] \tag{3-82}$$

그러면 $\log L$은 다음과 같다.

$$\log L=\mathrm{const}+\frac{1}{2}\log|\Omega^{-1}|-\frac{1}{2}u'\Omega^{-1}u \tag{3-106}$$

이 식을 (β, θ)에 대해 1차 미분하면

$$u'\Omega^{-1}X=0 \tag{3-107}$$

$$\mathrm{tr}(\Omega-uu')\frac{\partial\Omega^{-1}}{\partial\theta_h}=0(\text{단}, \ h=1, \cdots, m) \tag{3-108}$$

이제 $|\Omega^{-1}|$가 θ_j에 의존하지 않는다고 보자. 그러면

$$0=\frac{\partial\log|\Omega^{-1}|}{\partial\theta_j}=\mathrm{tr}\,\Omega\frac{\partial\Omega^{-1}}{\partial\theta_j} \tag{3-109}$$

가 성립하고 이로써 證明이 完了되었다.

다음에는 $\log L$함수의 헤시안(Hessian)을 다음의 定理로 도출할 수 있다.

定理 15: 다음과 같은 $(n\times m)$대칭행렬을 정의하자.

$$M^{ij}=\frac{\partial\Omega_{ij}{}^{-1}}{\partial\theta\partial\theta'}\ (\text{단}, \ i, j=1, \cdots, n) \tag{3-110}$$

그리고 $\Omega=[w_{ij}]$라고 표기하면 $\log L$함수의 헤시안은 다음과 같다.

$$H=\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12}' \\ H_{12} & H_{22} \end{bmatrix} \tag{3-111}$$

$$H_{11}=-X'\Omega^{-1}X$$

$$H_{12}=\left(\frac{\partial\,\mathrm{Vec}\,\Omega^{-1}}{\partial\theta}\right)(X\otimes u)$$

$$H_{22}=\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\omega_{ij}-u_i u_j)\,M^{ij}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\,\mathrm{Vec}\,\Omega^{-1}}{\partial\theta}\right)(\Omega\otimes\Omega)\left(\frac{\partial\,\mathrm{Vec}\,\Omega^{-1}}{\partial\theta}\right)$$

證明 : 매그너스(J.R. Magnus, pp. 286-287) 참조.

이제 마지막으로 $\hat{\beta}_{\mathrm{MLE}}$와 $\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}$의 分布上의 特性을 다음의 定理로 考察해 보자.

定理 16 : (3-28)식을 極大化하는 $\hat{\beta}_{\mathrm{MLE}}$, $\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}$는 近似正規分布를 가지며 一致推定量인 동시에 近似的으로 效率的인 推定量이다.

證明 : 빅커즈(M.K. Vickers)는 $H=(h_{ij})$를 定理 15에서 정의한 헤시안 행렬로, 또 $R(\theta)=(r_{ij})$를 情報行列이라고 할때 다음의 두 조건이 만족되면 $\hat{\beta}_{\mathrm{MLE}}$와 $\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}$는 近似正規分布를 갖는 一致推定量인 동시에 近似的으로 效率的인 推定量이라는 것을 증명한 바 있다.

(a) $n\to\infty$일때 $n^{-1}r_{ij}$가 β와 θ의 有限函數(finite function)로 점근한다.

(b) $n\to\infty$일때 $n^{-2}\mathrm{Var}(h_{ij})$가 0에 수렴한다.

이제 우리가 지금까지 고려해 온 바가 이 두 조건을 만족시킨다면 $\hat{\beta}_{\mathrm{MLE}}$와 $\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}$의 特性은 빅커즈定理로 규명되는 셈이다.

이를 위해 X를 다음과 같이 구분하자.

$$X=(X_1\cdots X_k)$$

그러면 다음 식들이 성립한다.

$$\frac{\partial^2\log L}{\partial\beta_i\partial\beta_j}=-X_i'\hat{\Omega}^{-1}X_j\ \ (\text{단},\ i,j=1\cdots k) \tag{3-112}$$

$$\frac{\partial^2\log L}{\partial\theta_i\partial\theta_j}=X_j'\frac{\partial\hat{\Omega}^{-1}}{\partial\theta_i}u\ \ (\text{단},\ i=1\cdots m,\ j=1\cdots k) \tag{3-113}$$

$$\frac{\partial^2\log L}{\partial\theta_i\partial\theta_j}=-\frac{1}{2}\left[\mathrm{tr}\frac{\partial\hat{\Omega}^{-1}}{\partial\theta_i}\hat{\Omega}\frac{\partial\hat{\Omega}^{-1}}{\partial\theta_j}\hat{\Omega}+u'\frac{\partial^2\hat{\Omega}^{-1}}{\partial\theta_i\partial\theta_j}u-\mathrm{tr}\frac{\partial^2\hat{\Omega}^{-1}}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\hat{\Omega}\right]$$
$$(\text{단},\ i,j=1\cdots m) \tag{3-114}$$

따라서 위 식들에 기대값을 취하면 다음과 같은 일련의 식들이 도출된다.

$$\mathcal{E}\left[-\frac{\partial^2\log L}{\partial\beta_i\partial\beta_j}\right]=X_i'\Omega^{-1}X_j \tag{3-115}$$

$$\mathrm{Var}\left[-\frac{\partial^2\log L}{\partial\beta_i\partial\beta_j}\right]=0 \tag{3-116}$$

$$\mathcal{E}\left[-\frac{\partial^2\log L}{\partial\theta_i\partial\beta_j}\right]=0 \tag{3-117}$$

$$\mathrm{Var}\left[-\frac{\partial^2\log L}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right]=X_j'\frac{\partial\Omega^{-1}}{\partial\theta_i}\Omega\frac{\partial\Omega^{-1}}{\partial\theta_i}X_j \tag{3-118}$$

$$\mathcal{E}\left[-\frac{\partial^2 \log L}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right]=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial\Omega^{-1}}{\partial\theta_i}\Omega\frac{\partial\Omega^{-1}}{\partial\theta_j}\Omega\right) \tag{3-119}$$

$$\mathrm{Var}\left[-\frac{\partial^2 \log L}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right]=\frac{1}{4}\mathrm{Var}\left(u'\frac{\partial^2\Omega^{-1}}{\partial\theta_i\partial\theta_j}u\right)$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial^2\Omega^{-1}}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\Omega\right)^2 \tag{3-120}$$

그런데 이식들은 바로 위의 (a)와 (b) 두 조건을 의미하므로 $\hat{\beta}_{MLE}$와 $\hat{\theta}_{MLE}$의 特性은 빅커즈의 定理를 따라 近似正規分布를 갖고 一致推定量인 동시에 近似的으로 效率的인 推定量이다. 이로써 證明이 完了되었다.

이상의 논의로 우리는 $\hat{\beta}_{MLE}$의 分布를 다음과 같이 요약할 수 있다. 켄달-스튜아트(Kendall and Stuart)에 의하면 추정하고저 하는 계수(θ)에 대한 最尤推定量은 一般的으로 一致性, 近以的 不偏性 및 近似的 效率性을 갖고

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta}-\theta)\sim N[0,\ \lim_{n\to\infty} nR_{(\theta)}{}^{-1}] \tag{3-121}$$

의 분포를 이룬다.

따라서 $\hat{\beta}_{MLE}$의 分布는 다음과 같다.

$$\sqrt{n}\,(\hat{\beta}_{MLE}-\beta)\sim N[0,\ \lim_{n\to\infty}[nR(\theta)]^{-1}]$$
$$\sim N[0,\ \lim_{n\to\infty}[n(X'\Omega^{-1}X)]^{-1}]$$
$$\sim N\left[0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{(X'\Omega^{-1}X)^{-1}}{n}\right] \tag{3-122}$$

즉 $\hat{\beta}_{MLE}$의 近似分布는 $\hat{\beta}_{GLS}$, $\hat{\beta}_{EGLS}$ 및 $\hat{\beta}_{TIE}$의 近似分布와 같음을 알 수 있다. 한가지 유의할 점은 $\hat{\beta}_{EGLS}$가 線形不偏推定量들 가운데에서 最小分散을 갖는 推定量이었던 데 반해 $\hat{\beta}_{MLE}$는 '攪亂項의 正規性'이라는 追加的인 假定 대신 '線形推定量'이라는 制限에서 벗어날 수 있다는 점이다. 즉 $\hat{\beta}_{MLE}$는 非線形推定量을 포함하는 모든 不偏推定量集合中에서 最小分散을 갖는 推定量이라는 점이다.

最尤推定法에 의한 結合線形模型의 推定은 同次方程式體系(Simultaneous Equation System)의 完全情報最尤推定法에 사용되는 컴퓨터패키지를 그대로 사용할 수 있다. 다만 설명변수들이 전부 외생변수이고 내생변수가 없다는 차이점만 있을 뿐이다.

6. 結合線形模型의 豫測

이제 上述한 結合線形模型의 諸推定法을 근거로 이 模型에 입각한 豫測問題를 논의해보자.

先決說明變數(predetermined explanatory variables) X_0을 이용하여 結合從屬變數(jointly dependent variables) Y_0을 豫測하는 경우를 고려하자.

$$y_0=\begin{bmatrix} y_{11}{}^0 & y_{21}{}^0\cdots y_{p1}{}^0 \\ y_{12}{}^0 & y_{22}{}^0\cdots y_{p2}{}^0 \\ \vdots & \\ y_{1m}{}^0 & y_{2m}{}^0\cdots y_{pm}{}^0 \end{bmatrix} \quad X_0=\begin{bmatrix} x_{11}{}^0 & x_{21}{}^0\cdots x_{k1}{}^0 \\ x_{12}{}^0 & x_{22}{}^0\cdots x_{k2}{}^0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ x_{1m}{}^0 & x_{2m}{}^0\cdots x_{km}{}^0 \end{bmatrix} \tag{3-123}$$

結合從屬變數가 다음과 같은 線形模型에 의해 예측된다고 가정한다.

$$y_0=X_0B+u_0 \tag{3-124}$$

단,

$$u_0=\begin{bmatrix} u_{11}{}^0 & u_{21}{}^0\cdots u_{p1}{}^0 \\ u_{12}{}^0 & u_{22}{}^0\cdots u_{p2}{}^0 \\ \vdots & \vdots \\ u_{1m}{}^0 & u_{2m}{}^0\cdots u_{pm}{}^0 \end{bmatrix} \tag{3-125}$$

이제 結合線形模型의 기본가정들에 다음과 같은 가정을 추가하자.

(iv) X_0은 비확률변수이다.

(v) $\mathcal{E}(u_0)=0$

(vii) $\mathrm{Cov}\begin{bmatrix} u \\ u_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Sigma\otimes I_n & 0 \\ 0 & \Sigma\otimes I_m \end{bmatrix}$

이러한 가정 밑에서 GLS예측량은 最小分散線形不偏豫測量임을 보여줄 수 있다. 먼저 GLS 豫測量을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \hat{y}_0&=X_0\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}} \\ &=X_0(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y \end{aligned} \tag{3-126}$$

이 $\hat{y}_0$은 (3-124)식에 정의된 y의 最小分散線形不偏推定量이다. 먼저 예측량 $\hat{y}_0$의 기대값을 취하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\hat{y}_0&=X_0(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}(X\beta+u) \\ &=\mathcal{E}(X_0\beta)+\mathcal{E}[X_0(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}u] \\ &=X_0\beta \end{aligned} \tag{3-127}$$

이것은 (3-124)식에 기대값을 취한 것과 같다.

$$\mathcal{E}y_0=X_0\beta \tag{3-128}$$

따라서 예측오차를 $\hat{y}_0-y_0$으로 정의할 때 예측오차의 기대값은 0이다.

$$\mathcal{E}(\hat{y}_0-y)=0 \tag{3-129}$$

이제 예측오차의 分散을 계산하면 다음과 같다.

$$\mathrm{Var}(\hat{y}_0-y_0)=\mathrm{Var}(\hat{y}_0)+\mathrm{Var}(y_0) \tag{3-130}$$

위 식에서 共分散은 0이 되어 없어진다:

$$\mathrm{Cov}(\hat{y}_0,y_0)=\mathcal{E}[\hat{y}_0-\mathcal{E}(\hat{y}_0)][y_0-\mathcal{E}(y_0)]'$$

$$=\mathcal{E}[X_0(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}uu_0']$$
$$=X_0(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\mathcal{E}(uu_0')$$
$$=0 \tag{3-131}$$

이제 $\mathrm{Var}(\hat{y}_0)$을 계산하면 다음과 같다.

$$\mathrm{Var}(\hat{y}_0)=\mathrm{Var}[X_0(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}u]$$
$$=\mathcal{E}[X_0(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}uu'\Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X_0']$$
$$=[X_0(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\mathcal{E}(uu')\Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X_0']$$
$$=[X_0(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\Omega\Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X_0']$$
$$=X_0(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X_0' \tag{3-132}$$

그런데 $\mathrm{Var}\, y_0=\Sigma\otimes I_m$으로 가정하였으므로 예측오차의 分散은 다음과 같다.

$$\mathrm{Var}(\hat{y}_0-y_0)=X_0[X'(\Sigma^{-1}\otimes I)X]^{-1}X_0'+\Sigma\otimes I_m \tag{3-133}$$

참고로 각 방정식의 설명변수가 동일한 경우$(X_1=X_2=\cdots=X_p=\bar{X})$에는 다음이 성립한다.

$$X=I\otimes\bar{X} \tag{3-124}$$

$$\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}}=[I\otimes(\bar{X}'\bar{X})^{-1}\bar{X}']y \tag{3-135}$$

따라서 이와 같은 특수한 結合線形模型의 경우에는 예측오차의 分散역시 다음과 같이 단순화된다.

$$\mathrm{Var}(\hat{y}_0-y_0)=\Sigma\otimes[I_m+X_0(X'X)^{-1}X_0'] \tag{3-136}$$

IV. 結合線形模型의 檢證과 線形制約下의 推定

推定된 結合線形模型에 대하여는 일련의 線形制約式의 受諾與否를 檢定하든가 아니면 이를 制約條件으로 받아들여 制約條件下의 模型推定을 시도하게 된다. 이때 線形制約式을 보통 다음과 같이 표현한다:

$$r=R\beta \tag{4-1}$$

단, r은 $(q\times1)$벡타이고 R은 $q\times(k_1+\cdots+k_p)$ 旣知의 行列이다.

R은 結合線形模型을 통하여 檢定하고자 하는 假說에 따라 또는 經濟理論에서 도출된 理論的인 制約條件에 따라 그 구조를 달리하게 된다.

1. 結合線形模型에서의 假說檢定

結合線形模型이 추정되었을 때 그 추정량에 대한 가설검정에 대한 논의는 크게 두 가지로 나누어 볼 수 있다. 가장 일반적인 형태의 가설검정은 타일 등에서 논의된 대로 (4-1)식을

歸無假說로 보고 一般最小自乘法에서 사용한 F검정통계량을 사용하는 것이다. 두번째로 생각할 수 있는 것은 각 방정식의 설명변수가 同一한 경우로 이 역시 F통계량을 사용하게 되나 그 도출과정에서 위스하트 分布(Wishart distribution)를 사용하는 것이다. 前者의 경우는 대개 교과서에 소개되어 있으므로 타일을 인용·정리하는 데 그치고 本稿에서는 後者의 경우를 보다 상세히 논의하기로 한다.

(1) 一般模型의 假說檢定

우리는 K개의 설명변수를 갖는 一般線形模型에서 귀무가설 $H_0: r=R\beta$(단, 이 경우 R은 $q\times K$ 旣知行列)을 검정하기 위한 검정통계량으로 다음의 통계량을 사용하였다.

$$\frac{(r-R\hat{\beta})'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(r-R\hat{\beta})/q}{e'e/np-K}\sim F(q, np-K) \tag{4-2}$$

(단, $\hat{\beta}$은 β의 최소자승추정량)

이 통계량은 교란항이 정규분포를 이룬다는 가정밑에서 尤度比檢定(likelihood ratio test)으로 부터 도출된다(타일 pp. 141-144 참조).

結合線形模型도 엄밀한 의미에서는 一般線形模型의 延長이므로 (4-2)식을 변형한 F통계량이 가설검정에 사용될 수 있다.

먼저 Σ를 알고 있는 경우 즉 $\hat{\beta}_{GLS}$가 β의 추정량이 되는 경우에는 (4-2)식의 分子가 다음과 같이 변형된다.

$$(r-R\hat{\beta}_{GLS})'\{R[X'(\Sigma^{-1}\otimes I)X]^{-1}R'\}^{-1}(r-R\hat{\beta}_{GLS})/q\sim\chi^2(q) \tag{4-3}$$

또한 分母 역시 다음과 같이 고쳐쓴다.

$$(y-X\hat{\beta}_{GLS})'(\Sigma^{-1}\otimes I)(y-X\hat{\beta}_{GLS})/(np-\sum_{j=1}^{p}k_j)\sim\chi^2(np-\sum_{j=1}^{p}k_j) \tag{4-4}$$

그리고 위의 두 χ^2변량은 서로 獨立的인 것을 보여 줄 수 있으므로 두 변량의 비율은 다음과 같은 F분포를 이룬다(타일 pp. 315-316 참조).

$$\frac{(r-R\hat{\beta}_{GLS})'\{R[X'(\Sigma^{-1}\otimes I)X]^{-1}R'\}^{-1}(r-R\hat{\beta}_{GLS})/q}{(y-X\hat{\beta}_{GLS})'(\Sigma^{-1}\otimes I)(y-X\hat{\beta}_{GLS})/(np-\sum_{j=1}^{p}k_j)}\sim F(q, np-\sum_{j=1}^{p}k_j) \tag{4-5}$$

다음에는 Σ를 모르는 보다 일반적인 경우를 생각해 보자. 타일(pp. 402-403)에서 논의된 대로 이때 우리는 (4-5)식에서 Σ를 $\hat{\Sigma}$으로 그리고 $\hat{\beta}_{GLS}$를 $\hat{\beta}_{EGLS}$로 대체한다. 그 결과 $\hat{\Sigma}$과 $\hat{\beta}_{EGLS}$는 각각 Σ와 β의 一致推定量이고 또한 (4-5)식의 二次形式分子는 Σ에 대해 연속함수이므로 다음 식의 분포는 (4-3)식의 분포인 $\chi^2(q)$에 점근하게 된다.

$$(r-R\hat{\beta}_{EGLS})'\{R[X'(\hat{\Sigma}^{-1}\otimes I)X]^{-1}R'\}^{-1}(r-R\hat{\beta}_{EGLS})/q\sim\chi^2(q) \tag{4-6}$$

또한 (4-4)식을 자유도 $(np-\sum_{j=1}^{p}k_j)$로 나눈 값 역시 χ^2분포를 이룬다.

$$\frac{(y-X\hat{\beta}_{GLS})'(\Sigma^{-1}\otimes I)(y-X\hat{\beta}_{GLS})}{np-\sum_{j=1}^{p}k_j}\sim\frac{1}{np-\sum_{j=1}^{p}k_j}\cdot\chi^2(np-\sum_{j=1}^{p}k_j) \tag{4-7}$$

χ^2변량의 平均은 自由度이고 分散은 自由度의 2倍이므로 위식에 정의된 변량의 平均은 $(np-\sum_{j=1}^{p}k_j)/(np-\sum_{j=1}^{p}k_j)=1$이고 分散은 $2(np-\sum_{j=1}^{p}k_j)/(np-\sum_{j=1}^{p}k_j)^2=2/(np-\sum_{j=1}^{p}k_j)$이다. 그런데 (4-4)식 역시 Σ의 연속함수이므로 다음이 성립한다.

$$\text{plim}\frac{(y-X\hat{\beta}_{EGLS})'(\hat{\Sigma}^{-1}\otimes I)(y-X\hat{\beta}_{EGLS})}{np-\sum_{j=1}^{p}k_j}=1 \tag{4-8}$$

따라서 이상의 결과를 종합하면 (4-5)식은 $\hat{\beta}_{EGLS}$와 $\hat{\Sigma}$을 사용하는 경우에 다음과 같이 변형될 수 있다.

$$\frac{(r-R\hat{\beta}_{EGLS})'\{R[X'(\hat{\Sigma}^{-1}\otimes I)X]^{-1}R'\}^{-1}(r-R\hat{\beta}_{EGLS})/q}{(y-X\hat{\beta}_{EGLS})'(\hat{\Sigma}^{-1}\otimes I)(y-X\hat{\beta}_{EGLS})/(np-\sum_{j=1}^{p}k_j)}\sim F(q,np-\sum_{j=1}^{p}k_j) \tag{4-9}$$

또는 $\sim\left(\frac{1}{q}\right)\chi^2(q)$

물론 이 검정통계량은 교란항이 정규분포를 이루고 귀무가설 $H_0: r=R\beta$이 진실인 경우를 전제로 하여 도출된 것이다. $F(q,np-\sum_{j=1}^{p}k_j)$는 $(np-\sum_{j=1}^{p}k_j)\to\infty$일때 $(1/q)\chi^2(q)$에 접근하므로 大標本의 경우 $F(q,np-\sum_{j=1}^{p}k_j)$와 $\frac{1}{q}\chi^2(q)$중 어느 것을 사용하는가는 문제가 되지 않는다. 타일은 小標本의 경우 가설검정을 보다 보수적으로 단행하기 위해 F-통계량을 사용할 것을 제안하고 있다.

결론적으로 이야기하면 (4-9)식에 표현된 검정통계량을 이용하여 一般的인 結合線形模型의 선형가설을 검정할 수 있다.

(2) 同一說明變數模型의 假說檢定

經濟學에서 다루게 되는 結合線形模型에서는 說明變數가 同一한 경우가 많이 있다. 대표적인 예로는 스톤의 線形支出模型과 초월로그함수를 원용한 수요함수 및 생산함수추정 등이다. 이와 같이 p개의 방정식에 나타나는 설명변수가 동일할 경우에는 $\hat{\beta}_{OLS}$와 $\hat{\beta}_{GLS}$의 效率性이 동일하다는 것은 旣述한 바와 같다.

(3-3)식으로 표현된 結合線形模型에서 $X_1=X_2=\cdots=X_p=\bar{X}$이라고 하면 $\hat{\beta}_{GLS}$는 다음과 같은 표현으로 단순화 되고 $\hat{\beta}_{OLS}$가 된다.

$$\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}}=[X'(\Sigma^{-1}\otimes I)X]^{-1}X'(\Sigma^{-1}\otimes I)y$$
$$=[(I\otimes\bar{X}')(\Sigma^{-1}\otimes I)(I\otimes\bar{X})^{-1}](I\otimes\bar{X}')(\Sigma^{-1}\otimes I)y$$
$$=[\Sigma\otimes(\bar{X}'\bar{X})^{-1}](I\otimes\bar{X}')(\Sigma^{-1}\otimes I)y$$
$$=[I\otimes(\bar{X}'\bar{X})^{-1}\bar{X}']y$$
$$=\begin{bmatrix}(\bar{X}'\bar{X})^{-1}X' & 0 & \cdots & 0\\ 0 & (\bar{X}'\bar{X})^{-1}\bar{X}' & \cdots & 0\\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & (\bar{X}'\bar{X})^{-1}\bar{X}'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_p\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\hat{\beta}_{1,\mathrm{OLS}}\\ \hat{\beta}_{2,\mathrm{OLS}}\\ \vdots\\ \hat{\beta}_{p,\mathrm{OLS}}\end{bmatrix}=\hat{\beta}_{\mathrm{OLS}} \tag{4-10}$$

이제 $\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}}=\hat{\beta}_{\mathrm{OLS}}=\hat{\beta}$으로 표기하면 이때 $\hat{\beta}$의 共分散 역시 다음과 같이 단순화 된다.

$$\mathrm{Cov}\,\hat{\beta}=[X'(\Sigma^{-1}\otimes I)X]^{-1}$$
$$=[(I\otimes\bar{X}')(\Sigma^{-1}\otimes I)(I\otimes\bar{X}')]^{-1}$$
$$=\Sigma\otimes(\bar{X}'\bar{X})^{-1} \tag{4-11}$$

또한 이와 같이 설명변수가 동일한 경우의 $\hat{\beta}_{\mathrm{MLE}}$ 역시 $\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}}=\hat{\beta}_{\mathrm{OLS}}$와 같으며 정보행렬식과 크래머-라오부등식행렬도 각각 다음과 같이 수정된다.

$$R(\theta)=\begin{bmatrix}\Sigma^{-1}\otimes\bar{X}'\bar{X} & 0\\ 0 & \frac{n}{2}(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})\end{bmatrix} \tag{4-12}$$

$$R(\theta)^{-1}=\begin{bmatrix}\Sigma\otimes(\bar{X}'\bar{X})^{-1} & 0\\ 0 & \frac{2}{n}(\Sigma\otimes\Sigma)\end{bmatrix} \tag{4-13}$$

이제 설명변수가 동일한 경우 설명변수($\bar{X}$)의 位數가 k라고 가정하고 검정통계량을 유도해보자. 먼저 교란항이 정규분포를 이룬다는 가정하에서 $\hat{\beta}_{\mathrm{OLS}}=\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}}=\hat{\beta}$의 분포를 생각하자. 그런데

$$\hat{\beta}=[I\otimes(\bar{X}'\bar{X})^{-1}\bar{X}']y$$
$$=\beta+[I\otimes(\bar{X}'\bar{X})^{-1}X']u \tag{4-14}$$

이므로 $\hat{\beta}$은 다음과 같은 다변수정규분포를 이룬다.

$$\hat{\beta}\sim N[\beta,\Sigma\otimes(\bar{X}'\bar{X})^{-1}] \tag{4-15}$$

이제 結合線形模型과 그 추정식을 (3-2)식과 같은 벡타 표시 대신 다음과 같은 $n\times p$행렬로 표현하자.

$$\underset{(n\times p)}{Y}=\underset{(n\times K)(K\times p)}{\bar{X}B}+\underset{(n\times p)}{\bar{U}} \quad (\text{단, } K=\sum_{i=1}^{p}k=pk) \tag{3-2$'$}$$

그리고 $K\times p$행렬 B의 最小自乘推定量을 $\hat{B}$로 표기하면 $n\times p$잔차항행렬 E가 정의된다.

$$E=Y-\bar{X}\hat{B}=[I-\bar{X}(\bar{X}'\bar{X})^{-1}\bar{X}']\bar{\bar{U}}=M\bar{\bar{U}} \tag{4-16}$$

따라서 각 방정식의 殘差項의 제곱과 교차제곱항으로 구성되는 다음과 같은 $p\times p$행렬을 정의할 수 있다.

$$E'E=\bar{\bar{U}}'M\bar{\bar{U}} \tag{4-17}$$

그런데 $E'E$는 바로 $e'e$을 행렬로 一般化시킨 것으로 $e'e$가 χ^2분포를 이루었듯이 $E'E$는 χ^2 분포의 일반화분포인 위스하트分布, $W(\Sigma, n-k)$를 이룬다.[18] 그 이유를 설명하면 다음과 같다.

먼저 (4-16)식에서 정의된 M은 位數가 $n-k$인 對稱冪等行列이므로 다음과 같은 $n\times n$ 直交行列(orthogonal matrix) F가 존재한다:

$$FMF'=\begin{bmatrix} I_{n-k} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4-18}$$

이를 (4-17)식에 대입하면

$$E'E=\bar{\bar{U}}'F'FMF'F\bar{\bar{U}} \tag{4-19}$$

가 성립한다.

또한 $n\times p$행렬

$$N=F\bar{\bar{U}} \tag{4-20}$$

를 정의하고 N을 分割하자.

$$N=\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \tag{4-21}$$

단 N_{11}은 $(n-k)\times(n-k)$이고 N_{12}는 $(p-n+k)\times(n-k)$이다.

이를 (4-19)식에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E'E&=N'FMF'N \\ &=N'\begin{bmatrix} I_{n-k} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}N \\ &=\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix}'\begin{bmatrix} I_{n-k} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

---

(18) Z를 $(p\times n)$확률변수행렬이라고 하고 $Z_{\cdot j}$는 Z의 j번째 列이라고 하자. 만일 $Z_{\cdot j}\sim N(0,\Sigma)$ $(j=1, 2,\cdots,n)$이면 $S=ZZ'$의 多變數確率分布函數는 다음과 같다.

$$f(S)=\frac{|S|^{\frac{1}{2}}(n-p-1)\,|\Sigma^{-1}|^{\frac{1}{2}n}\exp\left[-\frac{1}{2}tr(\Sigma^{-1}S)\right]}{2^{\frac{1}{2}n}\cdot P\pi^{(p(p-1)/4)}\underset{\Pi}{p}\,\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+1-i)\right]}$$

이를 위스하트(Wishart) 分布라고 부르고

$S\sim W(\Sigma, P, n)$ 또는 $W(\Sigma, n)$

이라고 표기한다. 단 위 식에서 $\Gamma(\cdot)$는 감마함수 $\Gamma(s)=\int_0^\infty u^{s-1}\exp(-u)du$를 뜻한다. 앤더슨 (Ch. 7) 및 드라임즈(pp. 31~34) 참조.

$$=[N_{11}\ N_{12}]'[N_{11}\ N_{12}] \tag{4-22}$$

(4-22)식의 마지막 표현으로 부터 우리는 $E'E$가 共分散이 Σ이고 자유도가 $n-k$인 $W(\Sigma, n-k)$분포임을 쉽게 알 수 있다.

(1) B의 列線形結合에 대한 假設檢定

이제 동일한 설명변수를 갖는 結合線形模型의 係數行列 B에 대한 가설검증을 시도하기 위해 $\hat{B}$의 열들의 선형함수가 어떠한 분포를 갖는가를 생각해 보자. 우리는 그러한 함수를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} a'\hat{B} &= a'[\hat{B}_1\hat{B}_2, \cdots, \hat{B}_p] \\ &= [a'\hat{B}_1, a'\hat{B}_2, \cdots, a'\hat{B}_p] \end{aligned} \tag{4-23}$$

그런데 이 벡타는 물론 정규분포를 이루며 그 기대값은 다음과 같다.

$$\mathcal{E}(a'\hat{B}) = a'B \tag{4-24}$$

그리고 $a'\hat{B}$의 共分散行列은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathrm{Cov}(a'\hat{B}_i, a'\hat{B}_j) = \sigma_{ij}a'(\bar{X}'\bar{X})^{-1}a \tag{4-25}$$

$$(i, j=1, 2, \cdots, p)$$

또는

$$\mathrm{Cov}(a'\hat{B}) = a'(\bar{X}'\bar{X})^{-1}a\Sigma \tag{4-26}$$

따라서 $a'\hat{B}$의 분포는 다음과 같다.

$$a'\hat{B} \sim N(a'B,\ a'(\bar{X}'\bar{X})^{-1}a\Sigma) \tag{4-27}$$

이제 統計的 推論을 단행하기 위해 우리는 자유도가 p인 다음과 같은 χ^2-변량을 정의할 수 있다.

$$V = a'(\hat{B}-B)[a'(\bar{X}'\bar{X})^{-1}a\Sigma]^{-1}(\hat{B}-B)'a \tag{4-28}$$

만일 Σ가 旣知의 行列이라면 V를 $a'\hat{B}$에 대한 신뢰구간의 설정이나 가설검정의 통계량으로 사용할 수 있을 것이다.

이제 정규분포변량인 $a'\hat{B}$의 표준정규분포화(standardization)의 과정을 생각해 보자. 먼저 $a'(\hat{B}-B)$를 (4-26)식의 平方根으로 나누어 표준정규분포를 이루는 벡타 Z를 정의하면 다음과 같다:

$$Z' = a'(\hat{B}-B)[a'(\bar{X}'\bar{X})^{-1}a]^{-\frac{1}{2}}D' \tag{4-29}$$

단, Z는 표준정규분포벡타 $N(0, I)$이고 $D'D=\Sigma$이다.

마지막으로 Z의 제곱값을 합하면 다음을 얻는다.

$$V = Z'Z$$

$$=a'(\hat{B}-B)[a'(\bar{X}'\bar{X})^{-1}a]^{-\frac{1}{2}}D'D[a'(\bar{X}'\bar{X})^{-1}a] \quad (4\text{-}30)$$

그런데 만일 Σ가 未知의 상태라면 이러한 표준성규분포화의 결과 도출되는 통계량은 未知의 B와 未知의 Σ를 전부 포함하게 된다. 따라서 오직 B에만 의존하는 통계량을 얻기 위해서는 Σ를 不偏推定量 $S=E'E/(n-k)$로 대체할 필요가 있다. 이것은 $a'\hat{B}$의 分布를 t-分布化(studentization)하는 것을 의미하는 것이다. 이와 같은 t-分布化의 결과 얻게 되는 통계량이 다음과 같은 호텔링의 T^2(Hotelling's T^2)-분포 또는 일반 T^2-분포(generalized T^2-Distribution)라고 불리우는 分布의 變量이다.

$$T^2=a'(\hat{B}-B)[a'(\bar{X}'\bar{X})^{-1}aS]^{-1}(\hat{B}-B)'a \quad (4\text{-}31)$$

(4-31)식이 왜 호텔링의 T^2-분포를 이루는지를 설명해 보기로 하자. 먼저 $E'E$는 $W(\Sigma, n-k)$분포를 이루고 $\hat{B}$으로 부터 독립인 점에 유의하여야 한다. 다음에는 $(a'(\bar{X}'\bar{X})^{-1}a)^{-\frac{1}{2}}$ $a'(\hat{B}-B)\sim N(0,\Sigma)$이므로

$$T^2=(n-k)[a'(\bar{X}'\bar{X})^{-1}a)^{-\frac{1}{2}}a'(\hat{B}-B)(E'E)^{-1}(\hat{B}-B)'a[a'(\bar{X}'\bar{X})^{-1}a]^{-\frac{1}{2}}$$
$$=a'(\hat{B}-B)[a'(\bar{X}'\bar{X})^{-1}aS]^{-1}(\hat{B}-B)'a \quad (4\text{-}32)$$

는 호텔링의 T^2-분포를 갖게 된다.

다음에는 T^2-분포를 갖는 변량은 상호독립적인 두개의 χ^2-변량의 比率로 變換시킬수 있어 결국 F분포로 變換될 수 있음을 설명해 보자.

먼저 각각 p개의 요소를 갖는 n확률변수벡타$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$가 다음과 같은 서로 독립적이고 동일한 정규분포를 이룬다고 가정하자.

$$X\sim N(0,\Sigma) \quad (4\text{-}33)$$

그리고 Q가 $(p\times p)$확률행렬로서 X에 독립인 $W(\Sigma, n)$분포를 이룬다면

$$T^2=nX'Q^{-1}X \quad (4\text{-}34)$$

는 T^2-분포를 갖는다.

이제 Σ가 陽定符號行列임에 착안하면 우리는 다음과 같은 非特異行列 D가 존재한다는 것을 알고 있다.

$$D\Sigma D'=I \quad (4\text{-}35)$$

$$D'D=\Sigma^{-1} \quad (4\text{-}36)$$

또한 확률벡타 Z와 확률행렬 P를 다음과 같이 정의하자.

$$Z=DX \quad (4\text{-}37)$$

$$P=DQD' \quad (4\text{-}38)$$

즉 Z는 X를 直交變換한 것이고 P는 Q를 二次形式으로 變換한 것이다. 그런데 T^2의 정

의식인 (4-34)식에다 (4-37)식과 (4-38)식을 대입하면 다음식이 성립한다.

$$T^2 = nX'Q^{-1}X$$
$$= nX'D'(DQD')^{-1}DX$$
$$= nZ'P^{-1}Z \qquad (4\text{-}39)$$

이 식에서 $Z \sim N(0, I)$이고 $P \sim W(I, n)$이며

$$P = \sum_{i=1}^{n} DX_iX_i'D' = \sum_{i=1}^{n} Z_iZ_i' \qquad (4\text{-}40)$$

그리고 P-요소의 벡타들인 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$은 각각 평균이 0이고 공분산이 I인 독립적 정규분포를 갖는다. 또한 Z와 P는 서로 독립이다.

이제 다음과 같은 直交行列 C를 선택한다.

$$C'C = CC' = I \qquad (4\text{-}41)$$

그리고 C의 첫번째 行을 Z'에 비례하도록 다음과 같이 만들고

$$C_{1\cdot} = (Z'Z)^{-\frac{1}{2}}Z' \qquad (4\text{-}42)$$

그 나머지 行들은 C가 直交行列이 되도록 조정한다.

여기에서 유의할 점은 Z가 확률벡타이므로 C역시 확률행렬이라는 사실이다.

이제 Z와 P를 다음과 같이 變換시키자.

$$y = CZ \qquad (4\text{-}43)$$

$$R = CPC' \qquad (4\text{-}44)$$

그러면 T^2를 y와 R로 표현할 수 있다.

$$T = nZ'P^{-1}Z$$
$$= nZ'C'CP^{-1}C'CZ$$
$$= nZ'C'(CPC')^{-1}CZ$$
$$= ny'R^{-1}y \qquad (4\text{-}45)$$

또한 y의 첫번째 요소(y_1)는 (4-42)식에 의해 다음과 같이 확률변수가 된다.

$$y_1 = (Z'Z)^{-\frac{1}{2}}Z'Z = (Z'Z)^{\frac{1}{2}} \qquad (4\text{-}46)$$

그런데 C의 나머지 行들은 전부 Z에 대해 直交關係에 있게 되므로 y의 나머지 요소들은 전부 0이 된다. 따라서 우리는 T^2를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$T^2 = ny'R^{-1}y = n(Z'Z)r^{11} \qquad (4\text{-}47)$$

단 $\qquad R^{-1} = (r^{ij})$

그런데 Z는 p-요소 벡타로 $N(0, I)$의 분포를 갖고 있으므로 $Z'Z$는 $\chi^2(p)$분포를 갖는다. 그리고 C가 주어졌을때의 R의 조건부분포는 $W(I, n)$이고 이것은 C에 의존하지 않고 있다.

따라서 R과 C는 독립이며 그 결과 $Z'Z$와 r'' 역시 분포면에서 독립을 이룬다.

이제 남은 일은 $(r'')^{-1}$이 χ^2-분포를 이룬다는 것을 보여 주는 것이다. 이를 위해 다음과 같은 行列恒等關係를 이용하도록 하자.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{bmatrix} \tag{4-48}$$

단, $(A^{11})^{-1}=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$

$A^{12}=A^{11}A_{12}A_{22}^{-1}$

먼저 이 항등관계를 R行列에 적용해 보자.

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \tag{4-49}$$

$$(r^{11})^{-1}=r_{11}-r_{12}R_{22}^{-1}r_{21}$$

단, r_{11}은 하나의 숫자(scalar)이고 r_{12}와 r_{21}은 $(p-1)$요소 벡타이며 R_{22}는 $(p-1)\times(p-1)$ 행렬이다.

또한 우리는 R을 p-요소를 갖는 $y_1, y_2, \cdots, y_n$으로 표현할 수 있다.

$$R=\sum_{i=1}^{n} CZ_iZ_i'C'=\sum_{i=1}^{n} y_iy_i' \tag{4-50}$$

그런데 C가 주어질때 이들 벡타는 독립적 정규분포 $N(0, I)$를 이룬다. 그리고 이 분포는 C로 부터 독립이므로 非條件附分布라고 볼 수 있다.

이제 $(n\times p)$행렬 Y를 정의하고

$$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_n) \tag{4-51}$$

R을 다음과 같이 고쳐 쓰자.

$$R=YY'=W'W \tag{4-52}$$

단, W는 $(p\times n)$행렬로 Y'이다:

$$W=(w_1, w_2, \cdots, w_p)=Y' \tag{4-53}$$

n-요소 확률벡타 $w_1, w_2, \cdots, w_p$는 $N(0, I)$로 독립적 정규분포를 이룬다. 이제 W를 다음과 같이 분할하면

$$W=[w_1 : W_1] \tag{4-54}$$

단, w_1은 W의 첫번째 列이고 W_1은 $(p-1)\times n$행렬로 그 列은 n-요소 확률벡타$(w_2, w_3, \cdots, w_p)$로 구성되는 행렬이다.

이제 우리는 R을 W로 표현할 수 있음에 유의할 필요가 있다.

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & R_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} w_1'w_1 & w_1'W_1 \\ W_1'w_1 & W_1'W_1 \end{bmatrix} \tag{4-55}$$

또한 그 결과 다음이 성립한다.

$$(r^{11})^{-1}=w_1'w_1-w_1'W_1(W_1'W_1)^{-1}W_1'w_1 \qquad (4\text{-}56)$$

마지막으로 W_1에 의존하는 $(r^{11})^{-1}$의 분포를 생각해 보자. 그런데

$$I_n-W_1(W_1'W_1)^{-1}W_1' \qquad (4\text{-}57)$$

은 $(n-p+1)$을 位數로 하는 冪等行列(idempotent matrix)이고 $W_1 \sim N(0,I)$이므로 $(r^{11})^{-1}$의 조건부분포는 $\chi^2(n-p+1)$이다. 그런데 이 분포는 W_1으로부터 독립이므로 이것 역시 $(r^{11})^{-1}$의 非條件附分布이다. 또한 마지막으로 $(r^{11})^{-1}$은 $Z'Z$로 부터 독립이므로 T^2/n은 각각 p와 $n-p+1$을 자유도로하는 상호독립적인 χ^2변량임을 알게 된다. 따라서

$$(T^2/n)(n-p+1/p)=F(p,n-p+1) \qquad (4\text{-}58)$$

은 分子와 分母의 자유도가 각각 p와 $n-p+1$인 F분포를 이룬다.

이제 (4-58)식을 (4-32)식에 적용하면

$$[T^2/(n-k)][(n-k-p+1)/p]=\frac{a'(\hat{B}-B)[a'(\bar{X}'\bar{X})^{-1}aS]^{-1}(\hat{B}-B)'a}{n-k}\cdot$$

$$\frac{n-k-p+1}{p}\sim F(p,n-k-p+1) \qquad (4\text{-}59)$$

(4-59)식의 의미를 부각시키기 위해 $p=1$인 경우를 생각해 보자. $p=1$이면 T^2는 t^2가 되고 S는 행렬이 아니라 하나의 스칼라(scalar) s^2가 된다. 따라서 (4-59)식은 다음과 같이 변형된다.

$$t^2=\frac{a'(\beta-\beta)[a'(\bar{X}'\bar{X})^{-1}a]^{-1}(\beta-\beta)'a}{s^2}\sim F(1,n-k) \qquad (4\text{-}60)$$

(단, β과 β는 $k\times1$벡타)

이 식은 一般線形模型에서 t^2와 F의 잘 알려진 관계식이다.

이상의 논의를 요약하면 $a'B$에 관한 가설검정이나 신뢰구간설정 등 통계적 추론은 (4-59)식의 F분포를 이용할 수 있다는 것이다.

(2) B의 行線形結合에 대한 假設檢定

다음에는 B의 처음 r列에서의 行線形結合에 대한 통계적 추론을 위해 그 분포에 대해 생각하자. 이와 같은 선형결합은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$a'[\hat{B}_1\hat{B}_2\cdots\hat{B}_r]=[a'\hat{B}_1\ a'\hat{B}_2\cdots a'\hat{B}_r]=a'\hat{B}_r \qquad (4\text{-}61)$$

단 위 식에서 $\hat{B}_r$은 $\hat{B}$의 처음 r列을 뜻한다. $\hat{B}$의 列은 어떠한 순서로도 배열할 수 있으므로 임의로 처음 r列을 선택할 수 있을 것이다.

그러면 $a'\hat{B}_r$은 다음 분포를 이룬다.

$$a'\hat{B}_r\sim N[a'B,a'(\bar{X}'\bar{X})^{-1}a\Sigma_{rr}] \qquad (4\text{-}62)$$

단, Σ_{rr}은 Σ의 처음 r行과 r列을 취한 部分行列이다.

따라서 다음과 같은 二次形式은 $\chi^2(r)$분포를 갖는다.

$$[a'(\hat{B}_r-B_r)][a'(\bar{\bar{X}}'\bar{\bar{X}})^{-1}a\Sigma_{rr}]^{-1}[a'(\hat{B}_r-B_r)]'\sim\chi^2(r) \quad (4\text{-}63)$$

즉 Σ를 알고 있다면 이 통계량을 사용하여 $a'\hat{B}_r$에 대한 統計的 推論을 단행할 수 있을 것이다.

다음에는 $(n-k)S_{rr}$이 $W(\Sigma_{rr}, n-k)$분포를 이루는 데 유의할 필요가 있다.

$$(n-k)S_{rr}=(Y_r-\bar{\bar{X}}\hat{B}_r)'(Y_r-\bar{\bar{X}}\hat{B}_r) \quad (4\text{-}64)$$

그런데 다음의 벡타는 $N(0, \Sigma_{rr})$분포를 이루고 $(n-k)S_{rr}$로 부터 독립이다.

$$[a'(\bar{\bar{X}}'\bar{\bar{X}})^{-1}a]^{-\frac{1}{2}}[a'(\hat{B}_r-B_r)]\sim N(0,\Sigma_{rr}) \quad (4\text{-}65)$$

따라서 아래 통계량은 호텔링의 T^2-분포를 갖는다.

$$T^2=[a'(\bar{\bar{X}}'\bar{\bar{X}})^{-1}a]^{-1}[a'(\hat{B}_r-B_r)]S_{rr}^{-1}[a'(\hat{B}_r-B_r]' \quad (4\text{-}66)$$

그리고 前述한대로 T^2는 다음의 F분포로 전환된다.

$$[T^2/(n-k)][(n-k-r+1)/r]=F(r, n-k-r+1) \quad (4\text{-}67)$$

이 경우에도 $r=1$이면 $T^2=F(1, n-k)$가 성립됨은 쉽게 알 수 있다. 결론적으로 $a'\hat{B}_r$에 대한 통계적 추론은 (4-67)식을 이용할 수 있다. 이 결과는 특히 結合線形模型의 推定式을 이용하여 豫測値를 算出하고 또 그 豫測値에 대한 통계적 추론을 단행하는 데 유용하게 이용될 수 있다.

(3) B의 一般的 列線形結合에 대한 假設檢定

우리는 지금까지 B의 列 또는 行으로 이루어지는 線形結合의 統計量에 관해 논의하였다. 이와 같은 논의는 B행렬의 어떠한 非特異變換(non-singular transformation)에 대해서도 적용할 수 있다. 예컨대 P를 非特異變換行列이라고 가정하자. 그러면 (3-2′)식으로 표현된 結合線形模型은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$YP=\bar{\bar{X}}BP+\bar{\bar{U}}P \quad (4\text{-}68)$$

그 결과 BP는 최소자승법에 의해 다음과 같이 추정될 수 있다.

$$\hat{B}P=(\bar{\bar{X}}'\bar{\bar{X}})^{-1}\bar{\bar{X}}'YP \quad (4\text{-}69)$$

그런데 이 추정량은 不偏推定量이고,

$$\mathcal{E}(\hat{B}P)=\mathcal{E}(\hat{B})P=BP \quad (4\text{-}70)$$

또한 다음이 성립한다.

$$\mathcal{E}(P'U'UP)=P'\Sigma P \quad (4\text{-}71)$$

따라서 어떠한 $a'=(a_1a_2\cdots a_k)$에 대해서 $a'\hat{B}P$의 분포는 다음과 같다.

$$a'\hat{B}P \sim N[a'BP, a'(\overline{X}'\overline{X})^{-1}aP'\Sigma P] \tag{4-72}$$

이 결과를 이용하여 다음과 같은 통계량들의 도출이 가능하다. 첫째, 다음의 二次形式은 $\chi^2(p)$ 분포를 갖는다.

$$[a'(\hat{B}-B)P][a'(\overline{X}'\overline{X})^{-1}aP'\Sigma P]^{-1}[a'(\hat{B}-B)P]' \sim \chi^2(p) \tag{4-73}$$

둘째, 다음행렬은 W-분포를 갖고 :

$$(n-k)P'SP = (YP-\overline{X}\hat{B}P)'(YP-\overline{X}\hat{B}P) \sim W(P'\Sigma P, n-k) \tag{4-74}$$

또한, 다음 二次形式은 $(n-k)s$로 부터 독립인 정규분포를 갖는다.

$$[a'(\overline{X}'\overline{X})^{-1}a]^{-\frac{1}{2}}[a'(\hat{B}-B)P] \sim N(0, P'\Sigma P) \tag{4-75}$$

(4-74)식과 (4-75)식으로 부터 다음이 성립한다.

$$T^2 = [a'(\overline{X}'\overline{X})^{-1}a)^{-1}[a'(\hat{B}-B)P][P'SP]^{-1}[a'(\hat{B}-B)P]' \tag{4-76}$$

T^2는 또한 前述한대로 F-통계량으로 다음과 같이 變換된다.

$$[T^2/(n-k)][(n-k-p+1)/p]$$
$$= \frac{[a'(\overline{X}'\overline{X}=)^{-1}a]^{-1}[a'(\hat{B}-B)P][P'SP]^{-1}[a'(\hat{B}-B)P]'}{n-k}$$
$$\cdot \frac{n-k-p+1}{p} \sim F(p, n-k-p+1) \tag{4-77}$$

결론적으로 이야기하면 $\hat{B}$를 非特異行列로 전환시킨 $\hat{B}P$에 대해서도 (4-77)식과 같은 통계량을 유도할 수 있다. (4-77)식에 $P=I_p$를 대입하면 (4-59)식이 유도되므로 (4-59)식은 (4-77)식의 특수경우로 취급될 수 있다.

(4) B의 行線形結合을 이용한 豫測

結合線形模型의 從屬變數全體 또는 一部에 대한 豫測量을 算出하고 이에 대해 통계적 추론을 단행하는 경우에는 B의 行線形結合이 유용한 분석의 틀을 제공한다.

설명변수의 未來値를 $X_0' = (X_{10}, X_{20}, \cdots, X_{q0})$으로 가정하면 최소자승예측량은 다음과 같다.

$$\hat{y}_0' = x_0'\hat{B} \tag{4-78}$$

또한 예측오차$(\hat{y}_0' - y_0')$의 共分散行列은 다음과 같다.

$$\mathrm{Cov}(x_0'\cdot B + u_0 - x_0'B) = \mathrm{Var}(u_0) + x_0'(\overline{X}'\overline{X})^{-1}x_0\Sigma = \Sigma + x_0'(\overline{X}'\overline{X})^{-1}x_0\Sigma$$
$$= (1 + x_0'(\overline{X}'\overline{X})^{-1}x_0)\Sigma \tag{4-79}$$

따라서 호텔링의 T^2변량이 정의된다.

$$T^2 = (1 + x_0'(\overline{X}'\overline{X})^{-1}x_0)^{-1}(\hat{y}_0 - y_0)'S^{-1}(\hat{y}_0 - y_0) \tag{4-80}$$

또한, T^2를 전환시켜 다음의 F통계량을 도출할 수 있다.

$$[T^2/(n-k)][(n-k-p+1)/p]$$

$$=\frac{(1+x_0'(\bar{X}'\bar{X})^{-1}x_0)^{-1}(\hat{y}_0-y_0)'S^{-1}(\hat{y}_0-y_0)}{n-k}\cdot\frac{n-k-p+1}{p}$$

$$\sim F(p, n-k-p+1) \tag{4-81}$$

또한 가령 r개의 종속변수의 예측에만 관심이 있다면 r개의 변수를 처음부터 먼저 배열시킨 후 다음과 같이 예측량을 산출한다.

$$\hat{y}_{0r}'=x_0'\hat{B}_r \tag{4-82}$$

그리고 이 경우 예측오차 $(y_{0r}'-x_0'\hat{B}_r)$의 共分散行列을 유도하면 다음과 같다.

$$\mathrm{Cov}(\hat{y}_{0r}'-y_{0r}')=[1+x_0'(\bar{X}'X)^{-1}x_0]\Sigma_{rr} \tag{4-83}$$

따라서 호텔링의 T^2변량이 정의되고:

$$T^2=[1+x_0'(\bar{X}'\bar{X})^{-1}x_0]^{-1}(\hat{y}_{0r}-y_{0r})'S_{rr}^{-1}(\hat{y}_{0r}-y_{0r}) \tag{4-84}$$

이를 진환하여 F통계량도 도출된다:

$$[T^2/(n-k)][(n-k-r+1)/r]$$

$$=\frac{[1+x_0'(X'X)^{-1}x_0]^{-1}(\hat{y}_{0r}-y_{0r})'S_r^{-1}(\hat{y}_{0r}-y_{0r})}{n-k}$$

$$\cdot\frac{n-k-r+1}{r}\sim F(r, n-k-r+1) \tag{4-85}$$

이를 요약하면 結合線形模型의 豫測量에 대한 통계적 추론에는 (4-81)식이나 (4-85)식의 F통계량을 사용할 수 있다. p개의 從屬變數 全體의 豫測을 위해서는 (4-81)식을, 또한 r개의 從屬變數의 豫測을 위해서는 (4-85)식이 사용된다.

2. 線形制約下의 推定

結合線形模型에서 (4-1)식과 같은 線形制約式이 있을 때는 制約條件下의 推定(constrained estimation)을 단행할 수 있다. 經濟學에서 다루는 結合線形模型에는 흔히 이와 같은 線形條件이 등장하는데 그 대표적인 예로 需要模型體系에서의 슬러츠키조건(Slutsky conditions)이나 各商品에 대한 支出比率의 合이 1이 되어야 한다는 조건으로부터 유래되는 계수간의 선형제약관계 등이다.

制約條件下의 推定을 논의하기 위해 結合線形模型式과 制約條件式을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$y=X\beta+u,\quad u\sim(0,\Sigma\otimes I_n) \tag{3-2}$$

$$r=R\beta \tag{4-1}$$

타일(pp. 282-288 및 pp. 312-317)은 結合線形模型의 制約條件下의 推定問題도 다음과 같은 一般線形模型의 一般最小自乘法的 接近方法의 延長으로 다루고 있다. 즉 線形制約式을

本模型의 一部로 취급하면 制約式은 攪亂項이 없으므로 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{y}=\tilde{x}\beta+\tilde{u}$$

또는

$$\begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X \\ R \end{bmatrix}\beta+\begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4-86}$$

단 y와 u는 $np\times 1$벡타, r은 $q\times 1$벡타, X와 R은 각각 $np\times K$, $q\times K$행렬이고, β는 $K\times 1$벡타이다($K=\sum_{i=1}^{p}k_i$). 이렇게 표현된 모형의 교란항의 共分散行列은 다음과 같이 표시된다.

$$\varepsilon(\tilde{u}\tilde{u}')=V=\begin{bmatrix} [\Sigma\otimes I_n] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

또는

$$=\begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4-87}$$

만일 제약식을 감안하지 않고 모형을 추정하면 다음과 같은 一般最小自乘推定量을 얻게 됨은 旣述한 바와 같다:

$$\hat{\beta}=(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y$$

$$=[X'(\Sigma^{-1}\otimes I_n)X]^{-1}X'(\Sigma^{-1}\otimes I_n)y$$

그런데 제약식을 감안하고 추정하는 문제는 곧 교란항공분산이 特異行列을 이룰 때 GLS를 적용하는 문제로 귀착된다. 이러한 特異行列下의 GLS문제[19]는 本稿 Ⅱ.3에서 다룬 特異正規分布의 理論으로 취급할 수 있다. 즉 V를 對角化하는 다음과 같은 直交轉換을 고려하여야 한다.

(4-86)식에 정의된 모형을 特異結合線形模型이라고 부르면 (4-87)식에 정의된 교란항의 共分散行列 V는 $(np+q)\times(np+q)$의 陽半定符號對稱行列(symmetric positive semi-definite matrix)을 이룬다. 이제 V의 部分行列 Ω는 陽定符號對稱行列이므로 np개의 特性根 $\lambda_i(i=1, 2, \cdots, np)$가 존재한다($\lambda_i>0$). 그런데 V는 陽半定符號行列이므로 그 特性根은 이들 np개의 $\lambda_i(\lambda_i>0)$와 나머지 q개의 0으로 구성된다. 따라서 註 (8)에서 설명한 대로 다음과 같은 對角化過程을 전개할 수 있다.

---

(19) 교란항의 共分散行列이 特異行列을 이루는 경우는 여기에서 지적된 (1) 事前的 制約條件(prior constraints)이 있는 경우 이외에도, (2) 需要函數에서 各 商品의 支出比率의 合이 1이 되는 경우나 線形確率模型에서 確率의 合이 1이 되는 경우 등과 같이 方程式間에 線形從屬性이 나타나는 경우, (3) 一部方程式이 사실상 定義式이거나 恒等式이어서 교란항이 없는 경우 등이다. 타일(p. 281)이 지적하고 있는 바와 같이 (2)의 경우에는 從屬關係에 있는 방정식(들)을 제거한 나머지 방정식으로 이루어지는 부분체계(subsystem)에 GLS 추정법을 적용할 수 있을 것이다. 그러나 (1)이나 (3)의 경우에는 從屬關係를 일으키는 방정식들이 사실상 係數間의 制約條件이 되므로 放棄되어서는 안된다(G.G. Judge et al. 前揭書 pp. 280-281 참조).

먼저 $\lambda_i(\lambda_i>0)$에 대응하는 特性벡타를 列로 하는 $(np+q)\times np$행렬 F를 정의하고 $\lambda_i(\lambda_i>0)$를 대각요소로 하는 $np\times np$ 대각행렬 Λ_{np}를 정의하자. 그 결과 다음의 관계식이 성립한다.

$$F'VF=\Lambda_{np} \tag{4-88}$$

$$VF=F\Lambda_{np} \tag{4-89}$$

그리고 $\lambda_i=0$에 상응하는 특성벡타를 列로 하는 $np\times q$행렬 G를 정의하면 다음 식도 성립한다.

$$VG=0 \tag{4-90}$$

이렇게 정의된 두 행렬 F와 G는 전부 V의 特性벡타로 구성되는 直交行列이므로 그 直交性 때문에 다음이 성립한다.

$$F'F=I \quad G'G=I \quad F'G=0 \tag{4-91}$$

$$FF'+GG'=I_{np} \tag{4-92}$$

따라서 V와 그 一般逆行列(Generalized Inverse) V^+는 다음과 같이 표현된다.

$$V=F\Lambda_{np}F' \quad V^+=F\Lambda_{np}^{-1}F' \tag{4-93}$$

이제 (4-86)식으로 표현된 制約條件下의 結合線形模型의 直交變換을 생각하자. V가 非特異行列일 때 直交變換을 위한 행렬 P를 $P'P=V^{-1}$으로 부터 도출하는 것과 마찬가지로 V가 特異行列인 경우 直交變換을 위한 행렬을 P^*라고 한다면 $np\times(np+q)$행렬 P^*는 다음 식을 만족하여야 한다.

$$P^{*\prime}P^*=V^+=F\Lambda_{np}^{-1}F' \tag{4-94}$$

따라서 變換行列 P^*는 다음과 같다.

$$P^*=\sqrt{\Lambda_{np}}^{-1}F' \tag{4-95}$$

이 P^*를 이용하여 (4-86)식의 관측치 및 제약조건행렬$[\tilde{y},\tilde{x}]$과 교란항 $\tilde{u}$를 전환하면 다음을 얻게 된다.

$$\tilde{y}^*=\tilde{x}^*\beta+\tilde{u}^*$$

또는

$$\sqrt{\Lambda_{np}}^{-1}F'\tilde{y}=(\sqrt{\Lambda_{np}}^{-1}F'\tilde{x})\beta+\sqrt{\Lambda_{np}}^{-1}F'\tilde{u} \tag{4-96}$$

그런데 새로운 교란항 $\tilde{u}^*$의 共分散行列은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\sqrt{\Lambda_{np}}^{-1}F'\tilde{u}\tilde{u}'F\sqrt{\Lambda_{np}}^{-1})&=\sqrt{\Lambda_{np}}^{-1}F'VF\sqrt{\Lambda_{np}}^{-1}\\&=\sqrt{\Lambda_{np}}^{-1}F'F\Lambda_{np}F'F\sqrt{\Lambda_{np}}^{-1}\\&=I_{np}\end{aligned} \tag{4-97}$$

즉 $\tilde{u}^*$는 표준선형모형의 교란항과 같은 특성을 갖게 되므로 (4-96)식에 최소자승법을 적

용시킬 수 있다. 그 결과 얻게 되는 최소자승추정량은 다음과 같다.

$$\hat{\beta}^{*}=[(\sqrt{\Lambda_{np}}^{-1}F'\tilde{x})'\sqrt{\Lambda_{np}}^{-1}F'\tilde{x}]^{+}(\sqrt{\Lambda_{np}}^{-1}F'\tilde{x})'\tilde{y}$$

$$=[\tilde{x}'F\sqrt{\Lambda_{np}}^{-1}\sqrt{\Lambda_{np}}^{-1}F'\tilde{x}]^{+}(\sqrt{\Lambda_{np}}^{-1}F'\tilde{x})'\tilde{y}$$

$$=(\tilde{x}'V^{+}\tilde{x})^{+}\tilde{x}'V^{+}y \tag{4-98}$$

위 식의 마지막 等式은 다음과 같은 一般逆行列公式을 이용한 것이다.

$$A^{+}=(A'A)^{-1}A' \tag{4-99}$$

단, 여기에서 A는 $A=\tilde{x}^{*}=\sqrt{\Lambda_{np}}^{-1}F'\tilde{x}$를 의미한다.

만일 制約條件이 없다면 $(q=0)\tilde{x}=x$가 되어 $\hat{\beta}^{*}$는 一般 GLS推定量 $\hat{\beta}$와 동일해진다.

$$\hat{\beta}^{*}=\hat{\beta}=(X'\Omega^{+}X)^{+}X'\Omega^{+}y \tag{4-100}$$

그러나 制約條件이 있는 경우에는 $\hat{\beta}^{*}$과 $\hat{\beta}$간에 다음 등식이 성립한다.

$$\hat{\beta}^{*}=\hat{\beta}+(X'\Omega^{+}X)^{-1}R'[R(X'\Omega^{+}X)^{-1}R']^{-1}(r-R\hat{\beta}) \tag{4-101}$$

또한 이 식을 이용하여 $\hat{\beta}^{*}$의 分散行列을 도출하면 다음과 같다.

$$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}^{*})=\{(X'\Omega^{+}X)^{-1}$$
$$-(X'\Omega^{+}X)^{-1}R'[R(X'\Omega^{+}X)^{-1}R']^{-1}R(X'\Omega^{+}X)^{-1}\} \tag{4-102}$$

그리고 β^{*}의 分散이 線形不偏推定量中 最小分散을 갖는 制約條件下의 推定量임을 증명할 수 있다(타일 pp. 286-287).

그런데 結合線形模型은 $\Omega:\Sigma\otimes I_n$이므로 위의 두식들은 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{\beta}^{*}=\hat{\beta}+[X'(\Sigma^{-1}\otimes I_n)X]^{-1}R'\{R[X'(\Sigma^{-1}\otimes I_n)X]^{-1}R'\}^{-1}(r-R\hat{\beta}) \tag{4-103}$$

$$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}^{*})=\{[X'(\Sigma^{-1}\otimes I_n)X]^{-1}-[X'(\Sigma^{-1}\otimes I_n)X]^{-1}R'$$
$$\{R[X'(\Sigma^{-1}\otimes I_n)X]^{-1}R'\}^{-1}R[X'(\Sigma^{-1}\otimes I_n)X]^{-1}\} \tag{4-104}$$

또한 Σ를 모르는 경우 一致推定量 $\hat{\Sigma}$을 대입하면 $\hat{\beta}^{*}$는 效率的 一致推定量임을 보일 수 있다.

위와 같은 타일類의 制約下의 推定量誘導過程 대신 다음과 같은 誘導方法도 特記할 만하다.[20] 먼저 結合線形模型을 (3-2′)식으로 표현하고 Vec(·) 代數를 사용하여 다음 식을 도출하자.

$$Y=XB+U \tag{3-2′}$$

$$y=(I_p\otimes X)\beta+u \tag{3-2″}$$

단 y와 u는 $np\times 1$벡타이고 X는 $n\times K$행렬이며 β는 $K\times 1$벡타이다.

또한 동일한 線形制約式을 고려하자:

(20) 이 방법은 하난-테렐(E.J. Hannan and R.D. Terrell)의 時系列分析理論(Time Series Analysis)에서 취한 접근방법이다.

$$\underset{(q\times 1)}{r}=\underset{(q\times K)}{R}\underset{(K\times 1)}{\beta} \tag{4-1}$$

이제 다음과 같은 $K\times K$행렬 W와 L을 定義하자.

$$W=R'(RR')^{-1}R \tag{4-105}$$

$$\begin{aligned} L&=I_K-W \\ &=I_K-R'(RR')^{-1}R \end{aligned} \tag{4-106}$$

그러면 L은 $L'=L$이고 $L'L=L$이 冪等行列임을 쉽게 알 수 있다. 이제 (3-2″)식을 다음과 같이 고쳐쓰자.

$$y-(I\otimes X)R'(RR')^{-1}r=(I_p\otimes X)[\beta-R'(RR')^{-1}r]+u \tag{4-107}$$

그리고 다음 등식이 성립하는 것에 유의하기로 한다.

$$\begin{aligned} &R(\beta-R'(RR')^{-1}r) \\ &=R\beta-RR'(RR')^{-1}r \\ &=R\beta-r \\ &=0 \end{aligned} \tag{4-108}$$

즉 이제 $y-(I\otimes X)R'(RR')^{-1}r$를 y_*로 표기하고 $\beta-R'(RR')^{-1}r$를 β_*로 표기한다고 생각하면 $R\beta_*=0$이 성립하므로 우리가 추정하고자 하는 모형은 다음 식으로 고쳐쓸 수 있다:

$$y_*=(I_p\otimes X)\beta_*+u \tag{3-2‴}$$

$$R\beta_*=0 \tag{4-1′}$$

즉 非同次線形制約式($R\beta=r$)을 同次線形制約式($R\beta_*=0$)으로 轉換시킨 모형이 되었음에 유의하여야 한다. 또한 다음 식들이 성립한다.

$$RW=RR'(RR)^{-1}R=R \tag{4-109}$$

$$\begin{aligned} L\beta_*&=[I_{pq}-R'(RR')^{-1}R]\beta_* \\ &=\beta_* \end{aligned} \tag{4-110}$$

(4-110)식을 이용하여 (3-2‴)식을 고쳐쓰면 다음과 같다.

$$y_*=(I_p\otimes X)L\beta_*+u \tag{4-111}$$

이 식의 양변에 $L(\Sigma^{-1}\otimes X')$를 곱하면 다음 식을 얻게 된다.

$$L(\Sigma^{-1}\otimes X')y_*=L(\Sigma^{-1}\otimes X'X)L\beta_*+L(\Sigma^{-1}\otimes X')u \tag{4-112}$$

따라서 β의 최소자승 추정량은 다음과 같다.

$$\tilde{\beta}_*=\{L(\Sigma^{-1}\otimes X'X)L\}^+(\Sigma^{-1}\otimes X')y_* \tag{4-113}$$

또한 $\tilde{\beta}$의 분포에 대해서는 다음의 定理가 成立된다.

定理 17 : $u \sim N(0, \Sigma \otimes I_n)$이면 $\tilde{\beta}_* \sim N(\beta, \{L(\Sigma^{-1} \otimes X'X)L\}^+)$이다.

證明 : 먼저 $\mathcal{E}\tilde{\beta}_* = \beta$임을 증명하자.

(4-113)식에 (3-2‴)식을 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\tilde{\beta}_* = \{L(\Sigma^{-1} \otimes X'X)L\}^+(\Sigma^{-1} \otimes X'X)\beta_*$$
$$+\{L(\Sigma^{-1} \otimes X'X)L\}^+(\Sigma^{-1} \otimes X')u \tag{4-113'}$$

그런데 위 식의 두번째항은 Σ, L 및 X가 전부 비확률행렬이므로 그 기대값이 0이 된다. 따라서 첫번째항이 β_*가 된다는 것만을 증명하면 된다.

이제 L의 位數를 고려하면 $\rho(R)=q$이므로 $\rho(L)=K-q$이다. 이제 位數가 $K-q$인 대칭행렬 A를 정의하면 다음 식이 성립된다.

$$(LAL)^+AL = L \tag{4-114}$$

그 이유는 L이 冪等行列이므로 $K-q$行을 갖는 $(K-q)\times K$行列 P가 존재한다.

$$L = PP' \tag{4-115}$$

$$P'P = I_{K-q} \tag{4-116}$$

그 결과

$$\begin{aligned}(LAL)^+ &= (PP'APP')^+ \\ &= (P')^+(P'AP)^+P^+ \\ &= P(P'AP)^{-1}P^+\end{aligned} \tag{4-117}$$

가 성립한다. 그 이유는 $P^+=P'$이고 $(P')^+=P$이며 $P'AP$는 非特異行列이 되기 때문이다. 따라서 (4-114)식이 성립한다:

$$\begin{aligned}(LAL)^+AL &= P(P'AP)^{-1}P^+APP' \\ &= PP' \\ &= L\end{aligned}$$

이제 (4-114)식에서

$$A = \Sigma^{-1} \otimes X'X \tag{4-118}$$

로 해석하면 다음이 성립됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}&\{L(\Sigma^{-1} \otimes X'X)L\}^+(\Sigma^{-1} \otimes X'X)L\beta_* \\ &= L\beta_* \\ &= \beta_*\end{aligned} \tag{4-119}$$

이상의 논의로 우리는 $\tilde{\beta}$의 不偏性을 증명하였다.

$$\varepsilon\tilde{\beta}_* = \beta_* \tag{4-120}$$

이제 (4-113)식으로 부터 $\tilde{\beta}_*$의 共分散行列을 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}[(\tilde{\beta}_*-\beta_*)(\tilde{\beta}_*-\beta_*)']\\&\quad=\mathcal{E}[L(\Sigma^{-1}\otimes X'X)L]^+(\Sigma^{-1}\otimes X')uu'(\Sigma^{-1}\otimes X)[L(\Sigma^{-1}\otimes X'X)L]^+\\&\quad=[L(\Sigma^{-1}\otimes X'X)L]^+(\Sigma^{-1}\otimes X'X)[L(\Sigma^{-1}\otimes X'X)L]^+\end{aligned} \tag{4-121}$$

그런데 위식의 마지막 표현은 다음과 같이 단순화시킬 수 있다.

$$(LAL)^+A(LAL)^+=(LAL)^+ \tag{4-122}$$

(단, $A=\Sigma^{-1}\otimes X'X$)

(4-122)식이 성립하는 이유는 (4-115)식에서 정의된 P행렬을 대입하면 쉽게 알 수 있다.

$$\begin{aligned}(LAL)^+A(LAL)^+&=P(P'AP)^{-1}P^+AP(P'AP)^{-1}P^{-1}\\&=P(P'AP)^{-1}P^+\\&=(LAL)^+\end{aligned}$$

따라서 (4-121)식을 고쳐쓰면 다음과 같다.

$$\mathcal{E}(\tilde{\beta}_*-\beta_*)(\tilde{\beta}_*-\beta_*)'=[L(\Sigma^{-1}\otimes X'X)L]^+ \tag{4-123}$$

한가지 유의할 점은 $D^+DD^+=D^+$이기 때문에 (4-113)식은 아래 식과 동일한 식이라는 것이다.

$$\tilde{\beta}_*=\{L(\Sigma^{-1}\otimes X'X)L\}^+L(\Sigma^{-1}\otimes X')y \tag{4-113'}$$

따라서 (4-113')식에서의 세번째 L행렬은 불필요하다.

또한 보통 Σ가 未知의 行列이므로

$$\Sigma=\frac{1}{n}(Y'Y-Y'X(X'X)^{-1}X'Y) \tag{4-124}$$

로 대치하여 다음과 같은 2단계 추정량을 추정하게 된다.

$$\tilde{\beta}_{*\mathrm{EGLS}}=[L(\hat{\Sigma}^{-1}\otimes X'X)L]^+(\hat{\Sigma}^{-1}\otimes X')y \tag{4-125}$$

또한 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{X'X}{n}=M$이 존재하면 $\sqrt{n}(\tilde{\beta}_{*\mathrm{EGLS}}-\beta_*)$는 $\sqrt{n}(\tilde{\beta}_*-\beta_*)$과 같이 다음과 같은 近似分布를 갖는 것을 증명할 수 있다.

$$\sqrt{n}(\tilde{\beta}_{*\mathrm{EGLS}}-\beta_*)\sim N(0,\{L(\Sigma^{-1}\otimes M)^+L\}) \tag{4-126}$$

지금까지 우리는 結合線形模型에 $R\beta=r$이라는 제약조건이 주어질 때 이를 假說檢定하기 위한 檢定統計量의 導出과 이러한 제약조건하의 추정방법에 관해 논의하였다. 다음에는 이상의 논의가 실제 經濟模型에 어떻게 적용될 수 있는지를 살펴보기로 한다.

V. 經濟理論에의 應用

結合線形模型이 經濟理論에 적용된 대표적인 경우로 消費者需要理論 및 生産理論을 들 수 있다. 가장 널리 알려진 事例中의 하나는 스톤의 線形支出體系였다. 그 후 바텐(A.P. Barten)에 의한 로테르담模型, Addilog Demand System 및 超越로그需要模型 등이 消費者需要理論에 結合線形模型이 적용될 수 있었던 모형들이다. 생산이론에서는 雙對性理論(Duality Theory)에 입각하여 費用函數를 推定함으로써 生産係數를 推定하는 경우에 結合線形模型이 많이 사용된다. 그 대표적인 예로는 一般레온티에프費用函數(Generalized Leontief Cost Function)와 超越로그費用函數에 의한 生産要素需要模型을 들 수 있다. 또한 生産變換函數(Production Transformation Function)과 雙對關係에 있는 變動利潤函數(Variable Profit Function)로 부터 호텔링定理(Hotelling's Lemma)를 이용하여 도출되는 供給體系에 대한 推定에도 結合線形模型이 적용될 수 있다.[21]

需要 및 生産理論 이외에도 序頭에 언급한 대로 그룬펠드의 微視的 投資函數推定 및 線形確率模型이나 混合模型의 推定에도 結合線形模型的 推定方法을 원용할 수 있다.

本稿에서는 스톤의 線形支出體系에 대한 結合線形模型의 적용을 논의하기로 한다. 그 이유는 로테르담模型은 타일에서, Addilog Demand System과 超越로그模型은 존스톤에서, 또한 生産理論에의 適用事例는 디워트等에서 詳論되고 있는 데 반해 가장 古典的인 線形支出模型이 일반 계량경제학교과서에 생략되어 있기 때문이다.

1. 線形로그需要體系의 特性

스톤에 의해 제시된 線形로그需要體系(Linear Logarithmic Demand System)를 推定하기 위해 結合線形模型을 적용할 수 있는가를 검토하기 위해 먼저 소비자이론을 정리하기로 하자.

m개의 재화를 소비함으로써 效用을 얻는 임의의 消費者의 直接效用函數와 예산제약식은 다음과 같이 정의된다.

$$u=u(q_1, q_2, \cdots, q_m) \tag{5-1}$$

$$y=\sum_{j=1}^{m} p_j q_j \tag{5-2}$$

단, q_j는 j번째 상품의 수량이고 p_j와 y는 각각 소비자에게 외생적으로 주어지는 j번째 상

(21) 디워트(W.E. Diewert) 참조.

품의 가격과 총지출액이다. 效用極大化의 一階條件은 다음과 같다.

$$u_j=\lambda p_j \tag{5-3}$$

단, u_j는 j번째 상품의 限界效用$(\partial u/\partial q_j)$을 의미한다.

여기에서 λ는 라그랑지乘數로 支出의 限界效用을 의미한다. 또한 이와 같은 m개의 方程式으로 구성되는 一階條件과 예산제약식 (5-2)를 이용하여 그 解를 구하면 다음과 같은 m개의 슬러츠키需要函數들이 도출된다.

$$q_j{}^*=q_j{}^*(y, p_1, \cdots, p_m) \tag{5-4}$$

이들 m개의 方程式을 效用函數 (5-1)식에 대입하면 효용함수는 m개의 價格과 총지출액의 함수로 정의된다. 이를 우리는 間接效用函數라고 부른다.

$$\begin{aligned} V&=u(q_1{}^*, q_2{}^*, \cdots, q_m{}^*) \\ &=u(q_1{}^*(y, p_1, \cdots, p_m), q_2{}^*(y, p_1, \cdots, p_m), \cdots, q_m{}^*(y, p_1, \cdots, p_m)) \\ &=V(y, p_1, \cdots, p_m) \end{aligned} \tag{5-5}$$

그런데 간접효용(V)은 총지출액(y)에 대해 증가함수이므로 y를 V와 p_j의 함수로 나타낼 수 있다.

$$y=y(V, p_1, \cdots, p_m) \tag{5-6}$$

이 方程式을 슬러츠키需要函數 (5-4)식에 대입하면 다음과 같은 마샬需要函數가 도출된다.

$$\begin{aligned} Q_j&=q_j(y, p_1, \cdots, p_m) \\ &=q_j(y(V, p_1, \cdots, p_m), p_1, \cdots, p_m) \\ &=Q_j(V, p_1, \cdots, p_m) \end{aligned} \tag{5-7}$$

단, 슬러츠키수요함수(q_j)와 대비하기 위해 대문자로 표기하기로 한다.

지금까지 우리는 直接效用函數로부터 출발하여 슬러츠키와 마샬需要函數가 도출되는 것을 설명하였다. 다음에는 支出函數로 부터 출발하여 이들 函數를 유도해 보자. 먼저 소비자의 效用을 一定한 수준(u^0)에서 유지하면 다음이 성립한다.

$$du^0=\Sigma u_j dq_j=0 \tag{5-8}$$

단, 지금부터 $\sum_{j=1}^{m}$는 Σ로 略記하도록 한다.

또한 上記 一階條件, (5-3)식을 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\Sigma u_j dq_j=\lambda\Sigma p_j dq_j=0 \tag{5-9}$$

그런데 $\lambda\neq0$이므로 다음이 성립한다.

$$\Sigma p_j dq_j=0 \tag{5-10}$$

또한 支出函數는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y(V, p_1, \cdots, p_m) = \Sigma p_j q_j (y, p_1, \cdots, p_m) \tag{5-11}$$

이를 p_j에 대해 미분하면 다음 식을 얻는다.

$$\frac{\partial y}{\partial p_j} = Q_j(V, p_1, \cdots, p_m) + \Sigma p_k \frac{\partial Q_k}{\partial p_j}(V, p_1, \cdots, p_m) \tag{5-12}$$

그러나 效用이 一定할 때는 다음 식이 성립하므로

$$\Sigma p_k \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} = \Sigma p_k \frac{dq_k}{dp_j} = 0 \tag{5-13}$$

다음과 같은 마샬需要函數가 도출된다.

$$\frac{\partial y}{\partial p_j} = Q_j(V, p_1, \cdots, p_m)\,(j=1, 2, \cdots, m) \tag{5-14}$$

또한 間接效用函數로 부터 슬러츠키需要函數를 유도할 수 있다. 먼저 支出函數를 效用에 대해 미분하면

$$\frac{\partial y}{\partial V} = \Sigma p_j \frac{\partial Q_j}{\partial V} \tag{5-15}$$

이므로 다음 식이 성립한다.

$$\frac{\partial V}{\partial p_j} = -\frac{Q_j + \Sigma p_k \frac{\partial Q_k}{\partial p_j}}{\Sigma p_k \frac{\partial Q_k}{\partial V}} \tag{5-16}$$

그런데

$$\Sigma p_k \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} = 0 \tag{5-17}$$

이므로 다음 식이 성립한다.

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{\Sigma p_j \frac{\partial Q_j}{\partial V}} \tag{5-18}$$

다음에는 總支出을 고정시키고 效用(V)과 p_j만을 변경시키면 다음 식을 얻게 된다.

$$0 = Q_j dp_j + \Sigma p_k \frac{\partial Q_k}{\partial p_j} dp_j + \Sigma p_k \frac{\partial Q_k}{\partial V} dV$$

이를 변형시키면 다음과 같이 마샬需要函數가 도출된다.

$$Q_j = -\frac{\frac{\partial V}{\partial p_j}(y, p_1, \cdots, p_m)}{\frac{\partial V}{\partial y}(y, p_1, \cdots, p_m)}$$

$$= q_j(y, p_1, \cdots, p_m) \tag{5-19}$$

이 마지막 식을 우리는 로이의 恒等式(Roy's Identity)이라고 부르며 배리안(H.R. Varian) 등의 高級微視教科書에 그 一般的 證明이 수록되어 있다.

스톤은 다음과 같은 線形로그需要體系를 제시하였다.

$$q_k=\alpha_k y^{\beta_{k0}}\prod_{j=1}^{m} p_j^{-w_j\beta_{k0}+\beta_{kj}}$$

$$=\alpha_k\left(\frac{y}{\Pi p_j^{w_j}}\right)^{\beta_{k0}}\Pi p_j^{\beta_{kj}}$$

$$=\alpha_k V^{\beta_{k0}}\Pi p_j^{\beta_{kj}}\ (k=1,\cdots,m) \tag{5-20}$$

단, 위 식에서 V는 실질소득지수이다:

$$V=\frac{y}{\Pi p_j^{w_j}} \tag{5-21}$$

支出函數 $y(V,p_1,\cdots,y_m)$을 미분하면 다음과 같다:

$$\frac{\partial y}{\partial p_k}=q_k$$

$$=\alpha_k V^{\beta_{k0}}\Pi p_j^{\beta_{kj}}\ (k=1,\cdots,m) \tag{5-22}$$

이를 다시 미분하면 다음 식을 얻는다.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial p_k\partial p_l}=\frac{\alpha_k\beta_{kl}V^{\beta_{k0}}\Pi p_j^{\beta_{kj}}}{p_l}\ (k,l=1,\cdots,m) \tag{5-23}$$

그런데 對稱性에 의해 다음이 성립한다.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial p_k\partial p_l}=\frac{\alpha_k\beta_{kl}V^{\beta_{k0}}\Pi p_j^{\beta_{kj}}}{p_l}$$

$$=\frac{\alpha_l\beta_{lk}V^{\beta_{l0}}\Pi p_j^{\beta_{lj}}}{p_k}$$

$$=\frac{\partial^2 y}{\partial p_l\partial p_k}\ (k,l=1,\cdots,m) \tag{5-24}$$

즉 다음과 같은 네가지 조건이 도출된다.

$$\beta_{k0}=\beta_{l0}=\beta_0\ \ (k,l=1,\cdots,m)$$

$$\beta_{kj}=\beta_{lj}=\beta_j\ \ (k\neq l\neq j;\ k=l=j=1,\cdots,m)$$

$$\beta_{kl}-1=\beta_{ll}$$

$$\beta_{kk}=\beta_{lk}-1\ \ (k\neq l;\ k,l=1,\cdots,m) \tag{5-25}$$

이제 (5-25)식을 대입하여 k번째 상품의 需要函數를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$q_k=\frac{\alpha_k V^{\beta_0}\Pi p_j^{\beta_j}}{p_k} \tag{5-26}$$

따라서 支出函數와 豫算比率(w_k)은 각각 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y=\Sigma p_k q_k$$
$$=\Sigma \alpha_k V^{\beta_0} \Pi p_j^{\beta_j} \tag{5-27}$$

$$w_k=\frac{p_k q_k}{y}=\frac{\alpha_k}{\Sigma \alpha_j} \tag{5-28}$$

즉 w_k는 常數이다.

이제 $\Sigma \alpha_j=1$ 즉 $w_k=\alpha_k$가 되도록 하면 수요함수는 아래와 같이 표시될 수 있다.

$$q_k=\alpha_k \frac{y}{p_k} \tag{5-29}$$

즉

$$\beta_0=1$$
$$\beta_{kj}=\beta_j=\alpha_j \ (j \neq k;\ j=1, \cdots, m) \tag{5-30}$$

이다.

마지막으로 q_k를 다음과 같이 쓴다.

$$q_k=\frac{\alpha_k V \Pi p_j^{\alpha_j}}{p_k} \tag{5-31}$$

支出函數는

$$y=\Sigma p_k q_k=V \Pi p_j^{\alpha_j} \tag{5-32}$$

이므로, 이를 바꾸어 쓰면 다음과 같다.

$$V=\frac{y}{\Pi p_j^{\alpha_j}} \tag{5-33}$$

(5-33)식과 로이의 恒等式을 이용하면 (5-29)식과 동일한 수요함수가 도출되는 것을 확인할 수 있다.

$$q_k=-\frac{\frac{\partial V}{\partial p_k}}{\frac{\partial V}{\partial y}}$$
$$=\alpha_k \frac{y}{p_k} (k=1, \cdots, m) \tag{5-34}$$

效用極大化의 一階條件은

$$u_k=\lambda p_k \ (k=1, \cdots, m) \tag{5-3'}$$

이고, 效用을 고정시킨 채 전미분하면 다음 식을 얻게 되는 것은 이미 설명한 바 있다.

$$du=\Sigma u_k dq_k=\lambda \Sigma p_k dq_k=0 \tag{5-9'}$$

따라서

$$\Sigma p_k dq_k = \Sigma \frac{p_k q_k}{y} \frac{dq_k}{q_k}$$
$$= \Sigma \alpha_k \frac{dq_k}{q_k}$$
$$= 0 \qquad (5\text{-}10')$$

이 성립된다.

이제 위식을 적분하면 다음 식들을 얻게 된다.

$$\Sigma \alpha_k \log q_k = \log u \qquad (5\text{-}35)$$

$$u = \Pi q_k^{\alpha_k} \qquad (5\text{-}36)$$

지금까지 논의한 線形로그需要體系의 特性을 要約하면 다음과 같다.

첫째, 支出比率(w_k)은 가격과 支出의 함수이다.

$$w_k = \frac{p_k q_k}{y} = \alpha_k y^{\beta_{k0}-1} \Pi p_j^{-w_j \beta_{k0} + \beta_{kj}} p_k \qquad (5\text{-}37)$$

$$(k = 1, \cdots, m)$$

둘째, 소득탄력성은 1이다.

$$\beta_{k0} = 1 \qquad (5\text{-}38)$$

셋째, 수요함수의 零次同次性이 만족된다.

$$\Sigma \beta_{kj} = 0 \quad (k = 1, \cdots, m) \qquad (5\text{-}39)$$

네째, 支出比率은 一定하다.

$$\beta_{kj} = \alpha_k \quad (j \neq k, k = 1, \cdots, m) \qquad (5\text{-}40)$$

$$\beta_{kk} = \alpha_k^{-1} \quad (k = 1, \cdots, m) \qquad (5\text{-}41)$$

2. 結合線形模型의 適用

線形로그需要體系의 이와 같은 特性을 假說의 형태로 요약하면 다음과 같다.

(1) $\Sigma(-w_j \beta_{k0} + \beta_{kj} + 1) = 0$ (가격탄력성의 합)

(2) $\beta_{k0} - 1 = 0$ (소득탄력성)

(3) $-w_j \beta_{k0} + \beta_{kj} = 0$ (개별가격탄력성)

이제 線形로그需要體系를 다음과 같이 표시하자.

$$\log w_i = \log \alpha_i + (\beta_{i0} - 1) \log y + \Sigma(-w_j \beta_{i0} + \beta_{ij}) \log p_j + \log p_i \qquad (5\text{-}42)$$

이를 벡타표시 結合線形模型으로 해석하면 다음과 같다.

$$y = X\beta + u \qquad (5\text{-}43)$$

$$y=\begin{pmatrix}\log w_{11}\\ \vdots\\ \log w_{1n}\\ \vdots\\ \log w_{mn}\end{pmatrix}\quad X=\begin{pmatrix}(\log y,\ \log p_1,\ \log p_1) & & \\ & \ddots & \\ & & (\log y,\ \log p_j,\ \log p_m)\end{pmatrix}$$

$$\beta=\begin{pmatrix}\log\alpha_1\\ \beta_{10}^{-1}\\ -w_1\beta_{10}+\beta_{11}+1\\ -w_2\beta_{10}+\beta_{12}\\ \vdots\\ -w_m\beta_{10}+\beta_{1m}\end{pmatrix}\quad u=\begin{pmatrix}u_{11}\\ \vdots\\ \vdots\\ u_{mn}\end{pmatrix}$$

또한 結合線形模型의 추정계수를 다음과 같이 행렬로 표시해 보자.

$$B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{21}\cdots b_{m1}\\ b_{12} & b_{22}\cdots b_{m2}\\ \vdots & \\ b_{1q} & b_{2q}\cdots b_{mq}\end{bmatrix} \tag{5-44}$$

단, 여기에서는 $p=m$, $q=m+2$이다.

따라서 線形假說은 다음의 형태를 취한다.

$$a'B=[a_1a_2\cdots a_q]\begin{bmatrix}\beta_{11}\cdots\beta_{p1}\\ \beta_{12}\cdots\beta_{p2}\\ \vdots\quad\ \vdots\\ \beta_{1q}\cdots\beta_{pq}\end{bmatrix}$$

$$=[\Sigma a_k\beta_{1k}\Sigma a_k\beta_{2k}\cdots\Sigma a_k\beta_{pk}] \tag{5-45}$$

이 결과 前記한 線形로그需要體系의 세 假說은 다음과 같이 표시될 수 있다.

(1) $\Sigma\beta_{kj}=0$

$$a'=[0\ 0\ 1\ 1\cdots1]$$

$$a'B=[0\ 0\ 1\ 1\cdots1]B$$

$$=[\Sigma(-w_j\beta_{10}+\beta_{1j}+1)\Sigma(-w_j\beta_{20}+\beta_{2j}+1)\cdots]$$

$$=[0\ 0\cdots0] \tag{5-46}$$

(2) $\beta_{10}=\beta_{20}=\cdots=\beta_{p0}=1$

$$a'=[0\ 1\ 0\cdots0]$$

$$a'B=[0\ 1\ 0\cdots0]B$$

$$=[\beta_{10}^{-1}\beta_{20}^{-1}\cdots\beta_{p0}^{-1}]$$

$$=[0\ 0\cdots0] \tag{5-47}$$

(3) $-w_j\beta_{i0}+\beta_{ij}=0$

따라서 가령 $j=1$에 대해서는

$$a'=[0\ 0\ 1\ 0\cdots0]$$

$$a'B = [0\ 0\ 1\ 0 \cdots 0]B$$
$$= [\beta_{13}\ \beta_{23} \cdots \beta_{p3}]$$
$$= [1\ 0 \cdots 0] \tag{5-48}$$

위에서 假說(3)이 모든 j에 대해 만족될 때는 假說(1) 역시 모든 j에 대해 만족되는 것에 유의할 필요가 있다.

이상의 결과를 요약하면 結合線形模型의 觀點에서 線形로그需要體系의 諸假說은 다음과 같은 線形假說로 압축된다고 볼 수 있다.

(1) $a'B = [0\ 0\ 1\ 1 \cdots 1]B = [\sum_{j=3}^{q} b_{1j} \Sigma b_{2j} \cdots \Sigma b_{pj}]$ (5-49)

(2) $a'B = [0\ 1\ 0 \cdots 0]B = [b_{12}\ b_{22} \cdots b_{p2}]$ (5-50)

(3) $a'B = [0\ 0\ 1\ 0 \cdots 0]B = [b_{13}\ b_{23} \cdots b_{p3}]$ (5-51)

이와 같은 가설을 검정하기 위해서는 다음과 같은 條件附假說檢定方法이 채택될 수 있다.

(i) Ω : 線形로그模型

(ii) $\Omega \cap \omega_1 : \Sigma(-w_j \beta_{i0} + \beta_{ij} + 1) = 0$ (모든 i에 대하여)

(iii) $\Omega \cap \omega_1 \cap \omega_2 : \beta_{i0} = 0$ 및 $\Sigma(-w_j \beta_{i0} + \beta_{ij} + 1) = 0$ (모든 i에 대하여)

그런데 이들 가설들은 각각 앞의 가설이 사실인 경우 그 가설로 부터 독립이다. 물론 세번째 가설부터는 同時假說檢定方法을 채택해야 되는데 다음과 같은 봉페로니不等式(Bonferroni Inequality)을 사용할 수 있다. 첫째 다음 부등식에 유의하자.

$$P[A \cup B] \leq P(A) + P(B) \tag{5-52}$$

다음에는 α_i를 가설 (i)가 진실인데도 기각되는 확률로 또한 α를 모든 가설들이 진실인데도 적어도 한 가설 (i)가 기각되는 확률로 정의하면 다음이 성립한다.

$$\alpha \leqq \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r \tag{5-53}$$

따라서 우리가 전체적으로 r개의 가설에 α-오류의 확률을 配分하면 우리는 검정대상이 되는 모든 가설에 대해 보수적인 有意水準을 갖게 된다. 그런데 우리가 논의하고 있는 線形로그模型의 경우 $r = m-1$개의 가설이 검정되어야 한다. 따라서 대체로 다음과 같은 有意水準의 配分을 생각할 수 있다.

$$\omega_1 : \frac{\alpha}{3}$$

$$\omega_2 : \frac{\alpha}{3}$$

$$\omega_3 \cdots w_{m+2} : \frac{\alpha}{3} ; \ \alpha_1 = \frac{\alpha}{3m-1} \cdots \alpha_{m-1} = \frac{\alpha}{3(m-1)}$$

이와같은 條件附假說檢定의 方法에 의해 前述한 (4-59)식이나 (4-67)식에 정의된 F-통계량으로 세가지 가설에 대해 검정을 행할 수 있을 것이다.

VI. 結　語

本稿에서는 結合線形模型의 推定과 推定된 모형에 대한 統計的 推論方法을 중심으로 지금까지 제시된 여러 理論들을 살펴 보았다. 本稿에서 取扱되지 않았으나 최근 활발히 다루어지고 있는 관련연구들로는 교란항구조가 자기상관관계를 갖는 경우(22) 및 標本의 크기가 다른 경우(23)의 結合線形模型의 推定에 관한 문제 등이 있다(24). 또한 結合線形模型에 대한 時系列分析的 接近方法도 새로운 시도라고 볼 수 있다. 마지막으로 스톤의 線形로그需要體系의 特性을 再檢討함으로써 同模型의 經濟理論에의 適用事例를 논의하였다.

結合線形模型이 갖고 있는 多樣한 側面과 넓은 응용가능성을 생각할 때 이 模型에 대한 理論的·實證的 硏究가 더 많이 진행되어야 할 것으로 본다. 筆者는 우리나라의 統計資料를 가지고 前述한 線形로그需要體系와 超越로그需要體系에 적용한 計量分析을 시도하고 있는데 이는 다른 기회에 발표하기로 한다.

參 考 文 獻

〔1〕 Anderson, T.W. (1958), *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis,* New York: John Wiley and Sons, Inc.

〔2〕 Boot, J.C.G., and G.M. de Witt, "Investment Demand: An Empirical Contribution to the Aggregation Problem," *International Economic Review*, 1, 1960, 3-30.

〔3〕 Christensen L.R., D.W. Jorgenson, and L.J. Lau, "Transcendental Logarithmic Utility Functions," *The American Economic Review*, June 1975, 367-383.

〔4〕 Christensen L.R., D.W. Jorgenson, and L.J. Lau, "Transcendental Logarithmic Production Frontiers," *Review of Economics and Statistics*, February 55, 1973, 28-45.

(22) 팍스(R.W. Parks) 참조.
(23) 스미트(1977) 참조.
(24) 이들 관련문제의 종합된 논의는 스리바스타바-드위베디(V.K. Srivastava and T.D. Dwivedi) 및 G.G. Judge et al. 前揭書 참조.

〔5〕 Diewert W.E., "Applications of Duality Theory," in *Frontiers of Quantitative Economics*, ed. by M.D. Intriligator and D.A. Kendrick Vol. 2, 1974, 106-206.

〔6〕 Dhrymes, P.J., *Econometrics: Statistical Foundations and Applications*, 2nd ed., 1974, New York: Springer-Verlag.

〔7〕 Dhrymes, P.J., "Equivalence of Iterative Aitken and Maximum Likelihood Estimators for a System of Regression Equations," *Australian Economic Papers*, 10, 1971, 20-24.

〔8〕 Dwivedi, T.D., and V.K. Srivastava, "Optimality of Least Squares in the Seemingly Unrelated Regression Equations Model," *Journal of Econometrics*, 7, 1978, 391-395.

〔9〕 Gnedenko, B.V., *Theory of Probability*, Chelsea, New York, 1962.

〔10〕 Hannan E.J. and R.D. Terrell, "Time Series Regression with Linear Constraints," *International Economic Review*, Vol. 13, No. 2, June 1972, 189-200.

〔11〕 Hausman J.A., "Specification and Estimation of Simultaneous Equation Models," in Z. Griliches and M.D. Intriligator eds., *Handbook of Econometrics*, Vol. 1, 1983, North Holland.

〔12〕 Intriligator, M.D., *Econometric Models, Techniques, and Applications*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall Inc, 1978.

〔13〕 Johnston, J., *Econometric Methods*, 3rd Edition, McGraw-Hill, New York, 1984.

〔14〕 Jorgenson, D.W., *Lecture Notes* (mimeograph).

〔15〕 Judge, G.G., W.E. Griffiths, R.C. Hill and T. Lee, *The Theory and Practice of Econometrics*, John Wiley & Sons, New York, 1980.

〔16〕 Kakwani, N.C., "A Note on the Efficiency of the Zellner's Seemingly Unrelated Regressions Estimator," *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 26, 1974, 361-362.

〔17〕 Kendall M.G. and A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*, New York, Hafner Publishing Co., 1958.

〔18〕 Kmenta, J., and R.F. Gilbert, "Estimation of Seemingly Unrelated Regressions with Autoregressive Disturbances," *Journal of the American Statistical Association*, 65, 1970, 186-196.

〔19〕 Kmenta, J., and R.F. Gilbert, "Small Sample Properties of Alternative Estimators of Seemingly Unrelated Regressions," *Journal of the American Statistical Association,* 1968, 63, 1180-1200.

〔20〕 Loève, M., *Probability Theory*, Princeton, NJ., D. Von Nostrand, 1955.

〔21〕 Magnus, J.R., "Maximum Likelihood Estimations of the GLS Model with Unknown Parameters in the Disturbance Covariance Matrix," *Journal of Econometrics*, 1978, 281-312.

〔22〕 Marsaglia, G., "Conditional Means and Variances of Normal Variables with Singular Covariance Matrix," *Journal of the American Statistical Association*, 59, 1964, 1203-1204.

〔23〕 Neudecker, H., "Some Theorems on Matrix Differentiation with Special Reference to Kronecker Matrix Products," *Journal of the American Statistical Association* 64, 1969, 953-963.

〔24〕 Oberhofer, W., and J. Kmenta, "A General Procedure for Obtaining Maximum Likelihood Estimates in Generalized Regression Models," *Econometrica*, 42, 1974, 579-590.

〔25〕 Parks, R.W., "Efficient Estimation of a System of Regression Equations When Disturbances Are Both Serially and Contemporaneously Correlated," *Journal of the American Statistical Association*, 62, 1967, 500-509.

〔26〕 Rao, C.R., *Linear Statistical Inference and Its Applications*, 2nd ed. New York, Wiley, 1973.

〔27〕 Revankar, N.S., "Some Finite Sample Results in the Context of Two Seemingly Unrelated Regression Equations," *Journal of the American Statistical Association,* 69, 1974, 187-190.

〔28〕 Schmidt, P., "Estimation of Seemingly Unrelated Regressions with Unequal Numbers of Observations," *Journal of Econometrics*, 5, 1977, 365-377.

〔29〕 Schmidt, P., *Econometrics*, New York: Dekker, 1976.

〔30〕 Srivastava, V.K., and T.D. Dwivedi, "Estimation of Seemingly Unrelated Regression Equations: A Brief Survey," *Journal of Econometrics*, 10, 1979, 15-32.

〔31〕 Stone, R., "Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: An Application to the Pattern of British Demand," *The Economic Journal*, 64, 1954, 511-527.

〔32〕 Telser, L.G., "Iterative Estimation of a Set of Linear Regression Equations," *Journal of the American Statistical Association*, 59, 1964, 842-62.

〔33〕 Theil, H., *Principles of Econometrics*, New York: Wiley, 1971

〔34〕 Theil, H. "The Information Approach to Demand Analysis," *Econometrica*, 33, 1965, 67-87.

〔35〕 Varga, R.S. *Matrix Iterative Analysis*, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc, 1962.

〔36〕 Varian, H.R., *Microeconomic Analysis*, W.W. Norton & Co. Inc. New York; 1978.

〔37〕 Vickers, M.K., "Optimal Asymptotic Properties for Parameters of Some Econometric Models," Technical Report (Cornell University), 1977.

〔38〕 Wilks, S.S., *Mathematical Statistics*, New York, Wiley, 1943.

〔39〕 Zellner, A., "Estimators for Seemingly Unrelated Regression Equations: Some Exact Finite Sample Results," *Journal of the American Statistical Association*, 58, 1963, 977-992. "Corrigenda," 67, 1972, 255.

〔40〕 Zellner, A., "An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests of Aggregation Bias," *Journal of the American Statistical Association*, 57, 1962, 348-368.

〔41〕 Zellner, A., and D.S. Huang, "Further Properties of Efficient Estimators for Seemingly Unrelated Regression Equations," *International Economic Review*, 3, 1962, 300-313.