計量經濟學의 基本行列 및 投影行列에 관한 硏究

鄭 基 俊*

<目 次>

I. 問題의 提起

표준적인 회귀분석은 하나의 종속변수에 관한 T개의 관측치를 원소로 하는 $T\times 1$ 벡터 y를 K개의 설명변수에 관한 T개의 관측치를 원소로 하는 $T\times K$행렬 X에 회귀시킨다는 형태를 취한다. 기하학적으로 설명하면 이는 T차원벡터 y를 X의 K개의 열에 의해서 생성되는 K차원 부분공간(이를 "X공간"이라 하자)에 투영하는 문제로 볼 수 있다. 즉 이 회귀분석에 의하여 X공간내에 투영된 y의 調整벡터(adjusted vector)를 $\hat{y}$이라 하면, $\hat{y}$은 X공간내의 벡터이므로 X의 K개의 열의 선형결합으로 표현할 수 있다. 즉,

$$\hat{y}=Xb. \tag{1.1}$$

단, $K\times 1$ 벡터 b는 이 선형결합의 가중치$(b_1,\cdots,b_k)$로 이루어지는 벡터인데, 이는 이 회귀분석의 회귀계수라고 하며, 최소자승법에 의하여

$$b=(X'X)^{-1}X'y \tag{1.2}$$

로 됨은 너무나 잘 알려져 있다.

그런데, 한편 $\hat{y}$는 y의 투영벡터라고 볼 수 있으므로, "X공간으로의 투영"이라는 變換을 가능하게 하는 행렬 즉 投影行列(projection matrix)을 P라 하면, 당연히 우리는 $\hat{y}$을

$$\hat{y}=Py \tag{1.3}$$

---

* 本硏究所 硏究員, 서울大學校 經濟學科 敎授

로 나타낼 수 있다. 그리고 식(1.1)과 (1.2)를 결합해 보면, P는

$$P=X(X'X)^{-1}X' \tag{1.4}$$

로 나타낼 수 있고, 따라서 P는 X에 의해서 유일하게 정의될 수 있다. (물론 이 정의가 의미를 가질 수 있도록, $X'X$의 位數(rank)는 K라고 가정한다.)

한편 y와 $\hat{y}$의 差로 정의되는 殘差벡터(residual vector) e는

$$e=y-\hat{y}=My \tag{1.5}$$

로 쓸 수 있는데, 여기서 $T\times T$行列 M은

$$M=I-P=I-X(X'X)^{-1}X' \tag{1.6}$$

로 쓸 수 있다. 그리고 행렬 M은 계량경제학의 理論展開에서 중심적 역할을 하는 중요한 행렬이므로 우리는 이를 계량경제학의 "基本行列"(fundamental matrix)이라고 부른다. 〔Theil (1971, p. 40)〕

기본행렬 M과 투영행렬 P에 관해서는 여러가지 성질들이 알려져 있고, 또 이 성질들은 회귀분석에서 대단히 중요한 역할을 하고 있다. 그러나 필자의 의견으로는 아직 잘 알려져 있지 않는 M과 P의 성질들이 있으며, 이 성질들도 회귀분석에서 그 나름대로의 잠재적 역할이 있다고 생각되며, 본 논문에서는 이 미지의 또는 잘 알려져 있지 않은 성질에 관한 탐구를 시도하고자 한다. 이를 위해서 우리는 우선 제2절에서 이미 잘 알려진 M과 P의 성질들을 정리해 두고자 한다.

II. 基本行列과 投影行列의 잘 알려진 性質들[(1)]

기본행렬 M과 투영행렬 P에 관해서 잘 알려져 있는 성질들은 다음과 같다.

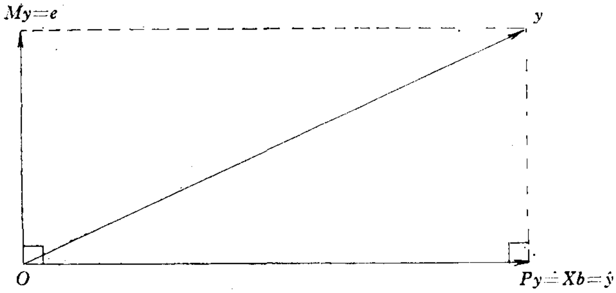
$$\text{대칭성}: P'=P,\quad M'=M \tag{2.1}$$

$$\text{멱등성}: P^2=P,\quad M^2=M \tag{2.2}$$

$$\text{직교성}: PM=0,\quad MP=0 \tag{2.3}$$

대칭성에 관해서는 별로 특기할 것이 없을 듯하다. 멱등성(idempotency)은 대단히 중요한 성질로, 일종의 不變性(invariancy)이다. 즉 行列의 멱(power)이 그 자체와 같다는 것으로, 스칼라로 말하면 이 성질을 만족하는 것은 0과 1이라는 두개의 數가 있을 뿐이다. 그러므로 멱등행렬은 스칼라 0과 1을 "一般化"한 개념이라고 볼 수 있고, 실제로 그러한

(1) 이 절의 내용은 표준적 문헌, 예컨대 Theil(1971, 1983), Johnston(1984), Amemiya(1985) 등에서 발견되는 내용을 체계적으로 정리한 것이다.



〈그림 1〉 y의 X에 대한 回歸

측면의 성질을 가지고 있다. 예컨대 멱등행렬의 특성근은 0과 1뿐임을 쉽게 보일 수 있다. 직교성(orthogonality)은 P에 의해서 생성되는 部分空間과 M에 의해서 생성되는 部分空間이 직교임을 의미한다.

멱등성과 직교성이 함축하는 의미를 보다 직관적으로 이해하기 위하여 y의 X에 대한 回歸를 그림으로 나타내 보자. 〈그림 1〉에서 세 벡터 $y, \hat{y}, e$를 보자. 이 세 벡터는 $y=\hat{y}+e$의 관계를 충족하므로 동일평면상에 있다. 이 세 벡터는 T次元 벡터이지만, $\hat{y}$은 X에 의해서 생성되는 K차원 부분공간의 벡터이며, e는 그 공간과 직교인 $T-K$차원 부분공간의 벡터이다. 멱등성 (2.2)에 의하여 $P^2=P$라는 것은, $P^2y=P\hat{y}$, $Py=\hat{y}$이므로, $P\hat{y}=\hat{y}$ 임을 의미한다. 즉 y를 X에 투영하여 얻은 조정벡터 $\hat{y}$을 다시 X에 투영해도 얻어지는 것은 그 자체인 $\hat{y}$이라는 일종의 不變性을 의미한다. 또 $M^2=M$이라는 것은, $M^2y=Me$, $My=e$이므로, $Me=e$를 의미한다. 이는 e를 X에 회귀시킬 때 얻어지는 잔차벡터는 e 자체라는 不變性을 의미한다. 비슷한 방법으로 직교성(2.3)이 함축하는 의미도 설명할 수 있다. 즉 $PM=0$라는 것은 $Pe=0$를 의미하는데, 이는 e를 X에 회귀시키면, 그 조정벡터는 0임을 의미하고, $MP=0$라는 것은 $M\hat{y}=0$를 의미하는데, 이는 $\hat{y}$을 X에 회귀시킬 때의 잔차벡터는 0임을 의미한다. 그 이유는 또 e가 X와 직교이고, $\hat{y}$은 X공간의 벡터라는 사실에 의하여 직관적으로 설명될 수도 있다.

回歸行列 X를 $T\times K_1$行列 X_1과 $T\times(K-K_1)$행렬 X_2로 다음과 같이 分割하자. 즉,

$$X=[X_1 \vdots X_2]. \tag{2.4}$$

그리고 부분행렬 X에 의해서 생성되는 투영행렬 P_1과 기본행렬 M_1을 P와 M의 정의와 마찬가지로 다음과 같이 정의하자.

$$P_1=X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1' \tag{2.5}$$

$$M_1=I-P_1 \tag{2.6}$$

그러면 P_1y는 y를 X_1에 회귀시킬 때의 조정벡터이고, M_1y는 이때의 잔차벡터이다. P_1과 M_1은 그 자체가 P와 M과 똑같이 투영행렬·기본행렬이므로 P_1, M_1에 관해서도 (2.1)~(2.3)에 제시된 성질에 添字만 붙이면 그대로 성립한다. 그리고 더 나아가서 P, M, P_1, M_1 간에는 다음 성질들이 성립한다. 즉,

$$P_1\text{의 불변성}: P_1P=P_1,\ \ PP_1=P_1 \tag{2.7}$$

$$M\text{의 불변성}: M_1M=M,\ \ MM_1=M \tag{2.8}$$

$$\text{교환성}: PM_1=M_1P\ \ (=P-P_1=M_1-M) \tag{2.9}$$

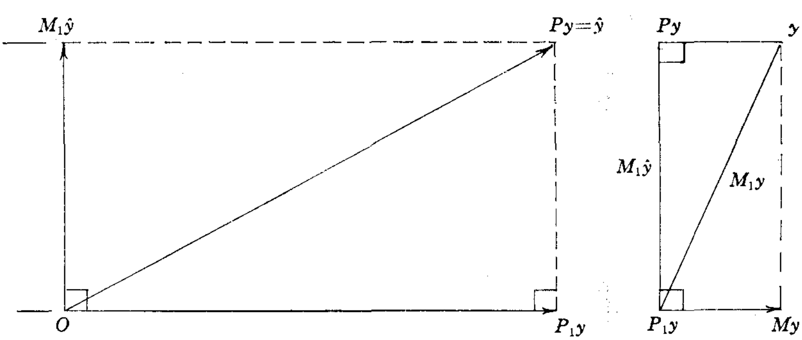
$$\text{직교성}: P_1M=0,\ \ MP_1=0 \tag{2.10}$$

$$(M_1-M)\text{의 멱등성}: (M_1-M)^2=M_1-M \tag{2.11}$$

$$M\text{과 }(M_1-M)\text{의 직교성}: M(M_1-M)=0. \tag{2.12}$$

이 성질들이 가지는 의미를 직관적으로 이해하기 위하여 <그림 2>를 보자. 이 그림은 y를 X 및 X_1에 회귀시킬 때 나타나는 여러가지 벡터와 그 상호관계를 나타내 주고 있다. Py는 <그림 1>에서와 마찬가지로 y를 X에 회귀시킬 때의 조정벡터 $\hat{y}$이다. P_1y는 y를 X_1에 회귀시킬 때의 조정벡터이다. P_1의 불변성에 관한 성질(2.7)에 의하면, $P_1Py=P_1\hat{y}=P_1y$이다. 이는 $\hat{y}$을 X_1에 회귀시킬때의 조정벡터 $P_1\hat{y}$은 y를 X_1에 회귀시킬 때의 조정벡터 P_1y와 일치함을 의미한다. 따라서 <그림 2>에서 보는 것처럼 $\hat{y}$을 X_1에 회귀시킬 때의 잔차벡터 $M_1\hat{y}$과 P_1y는 직교하며, 잔차벡터 $M_1\hat{y}$, M_1y, My간에는 그림의 오른쪽에 그린 것과 같은 관계를 보이게 된다. (2.7)의 두번째 관계 즉 $PP_1=P_1$은 $P(P_1y)=P_1y$ 임을 의미한다. 이는 P_1y를 X에 회귀시킬 때의 조정벡터는 P_1y 자체로서 불변성을 가짐을 의미한다. 이는 <그림 2>에서 보는 것처럼, P_1y가 X_1공간의 점이며 동시에 X공간의 점이라는 사실에 의해서 설명된다.

(2.8)에 제시된 M의 불변성 역시 이 그림으로 설명될 수 있다. 우선 $M_1M=M$이란,



<그림 2> y의 X에 대한 회귀와 X_1에 대한 회귀

$M_1(My)=My$를 의미하는데, 이는 y를 X에 회귀시킬 때의 잔차벡터 My를 X_1에 회귀시킬 때, 그 잔차는 전혀 변화가 없다는 것을 의미한다. X_1은 My를 추가로 설명할 능력이 없기 때문이다. 또 $MM_1=M$이란, $M(M_1y)=(My)$를 의미하는데, 이는 M_1y를 X에 회귀시킬 때, 〈그림 2〉의 오른쪽에서 보는 것처럼, $M_1\hat{y}$ 만큼 추가로 설명되고, My 만큼이 그대로 남는다는 것을 의미한다. 여기서 M_1y를 X에 회귀시킬 때의 조정벡터가 $M_1\hat{y}$과 같다는 것은, (2.9)로 주어지는 교환성 $PM_1=M_1P$로 설명된다. 왜냐하면 이 교환성은 $P(M_1y)=M_1(Py)$ 즉 $P(M_1y)=M_1\hat{y}$로서, M_1y를 X에 회귀시킬 때의 조정벡터 $P(M_1y)$는 $M_1\hat{y}$과 같음을 의미하기 때문이다.

직교성 (2.10)의 첫째 성질 $P_1M=0$는 $P_1(My)=0$를 의미하는데, 이는 잔차벡터 e를 X의 부분행렬 X_1에 회귀시킬 때 X_1은 아무런 설명능력도 갖지 못한다는 것을 뜻하며, 둘째 성질 $MP_1=0$는 $M(P_1y)=0$를 의미하는데, 이는 X_1공간의 벡터 P_1y를 X에 회귀시킬 때, P_1y가 완전히 설명되므로 잔차가 남지 않는다는 것을 뜻한다.

(2.11)로 주어지는 (M_1-M)의 멱등성과 (2.12)로 주어지는 M과 (M_1-M)과의 직교성은 위의 성질들을 결합하여 얻을 수 있는 것으로, 회귀분석의 여러 검정통계량의 구축과 관련하여 중요한 의미를 갖는다.

III. 基本行列과 投影行列의 추가적 성질들

만일 X가 정방행렬이고 또 비특이행렬이라면, P는 단위행렬, M은 0행렬이 될 것이다. 이는 X의 구조와 전혀 관계가 없다는 것이 특징이다. 그러나 X가 $T\times K$이고 위수가 K인 보통의 경우 P와 M은 X의 구조와 관계없이 T와 K에만 의존하는 중요한 성질들을 갖는다. 그리고 이는 대체로 그 대각합(trace)과 관련된다. 그 중 가장 기본이 되는 성질은 다음과 같다. 즉,

$$\operatorname{tr} M=T-K \tag{3.1}$$

$$\operatorname{tr} P=K. \tag{3.2}$$

또 멱등행렬인 M과 P의 특성근은 0 또는 1이고, 일반적으로 특성근의 합은 대각합과 같다는 성질에 의하여, 성질 (3.1)과 (3.2)는 M과 P의 특성근의 구조를 알 수 있게 해 준다. 즉 M의 특성근은 $T-K$개의 1과 K개의 0으로 구성되며, P의 특성근은 K개의 1과 $T-K$개의 0으로 구성된다.

우리는 성질 (2.11)에서 행렬 (M_1-M)이 멱등행렬임을 알고 있다. 그리고 성질 (3.1)

의 유추에 의하여, tr $M_1=T-K_1$임을 알 수 있다. 이로부터 우리는 다음 성질을 얻는다.

$$\mathrm{tr}\ (M_1-M)=K-K_1 \tag{3.3}$$

그리하여 (M_1-M)의 특성근은 $(K-K_1)$개의 1과 $T-(K-K_1)$개의 0으로 구성된다.

멱등행렬을 계수행렬로 하는 정규확률변수의 2次形式이 카이자승(χ^2)분포와 관련됨은 잘 알려진 사실이다. 여기서 표준정규확률벡터 z를

$$z\sim N(0,I) \tag{3.4}$$

라고 정의하자. 그러면 우리는 다음 성질들을 얻는다.

$$z'Mz\sim\chi^2(T-K) \tag{3.5}$$

$$z'Pz\sim\chi^2(K) \tag{3.6}$$

$$z'(M_1-M)z\sim\chi^2(K-K_1) \tag{3.7}$$

또 χ^2분포간의 독립성은 계수행렬의 직교성과 관련된다는 것도 잘 알려진 사실이다. 그리하여 (2.3)에 의한 P와 M의 직교성, 그리고 (2.12)에 의한 M과 (M_1-M)과의 직교성으로부터 다음 성질을 얻는다.

$z'Mz$와 $z'Pz$는 독립이다. (3.8)

$z'Mz$와 $z'(M_1-M)z$는 독립이다. (3.9)

이들은 검정통계량의 구축과 관련하여 매우 중요한 성질들이다.

IV. X공간의 基底變換과 基本行列·投影行列의 불변성

직관적으로 볼 때, y를 X에 회귀시킨 때의 조정벡터 내지 투영벡터 Py와 잔차벡터 My는 X공간의 성질에 의존하는 것이지 X공간을 생성하는 基底에 의존하는 것은 아닐 것으로 생각된다. 그런데 행렬 X의 K개의 列은 바로 X공간을 생성하는 기저이다. 이 X공간의 기저행렬 X를 예컨대 다른 기저행렬 X^*로 바꾸면 Py, My는 어떻게 될까? 아마도 변하지 않아야 할 것이다. 그러면 P, M 자체는 어떻게 될까? 아마도 변하지 않을 것이다. 이를 확인해 보자.

먼저 表記의 편의를 위하여 P와 M이 X의 함수임을 명시하자. 즉

$$P(X)=X(X'X)^{-1}X' \tag{4.1}$$

$$M(X)=I-P(X) \tag{4.2}$$

로 정의하자. 즉 $P(X)$는 X에 의한 투영행렬 P로서, 이것이 X의 함수임을 명시한 것이고 마찬가지로 $M(X)$는 기본행렬 M으로서, 이것이 X의 함수임을 명시한 것이다. 우리는 이

함수들이 X의 기저변환에 영향을 받지 않음을 보이고자 하는 것이다.

행렬 X의 K개의 列벡터에 의해 생성되는 공간, 즉 X공간은 K차원 공간이다. 그리고 X의 K개의 선형독립인 列은 그 공간의 기저를 구성한다. 즉 X는 그 공간의 기저행렬이다. 그런데 어떤 행렬의 기저행렬은 유일하게 존재하는 것이 아니다. 기저행렬 X의 모든 비특이변환 (nonsingular transformation) XA는 역시 X공간을 생성한다. 단 A는 임의의 $K\times K$ 비특이행렬이다. 이는 X공간의 임의의 점 Xa는 $(XA)(A^{-1}a)$로, 즉 XA의 선형결합으로 나타내질 수 있고, 또 그 역도 성립하기 때문이다.

위의 성질은 기저변환 내지 비특이변환에 의한 X공간의 불변성이라고 말할 수 있을 것이다. 다음은 비특이 변환에 의한 기본행렬 및 투영행렬의 불변성을 다음 명제로 표현해 보자. 〔鄭基俊(1976) 참조〕

〔**명제 1**〕: A를 임의의 $K\times K$ 비특이행렬이라 할 때 다음 등식이 성립한다. 즉,

$$M(X)=M(XA) \tag{4.3}$$

$$P(X)=P(XA) \tag{4.4}$$

이 명제는 다음과 같이 직접적인 방법으로 증명할 수 있다. 즉,

$$P(XA)=XA(A'X'XA)^{-1}A'X'=XAA^{-1}(X'X)^{-1}A'^{-1}A'X'=P(X)$$

$$M(XA)=I-P(XA)=I-P(X)=M(X)$$

V. 여러가지 非特異變換

위에서 본 것처럼, 行列 X의 非特異變換은 X공간을 변화시키지 않을 뿐 아니라 기본행렬 M과 투영행렬 P도 변화시키지 않는다. 그러므로 우리는 계량경제학의 분석목적에 따라 X에 대하여 알맞는 비특이변환을 행함으로써, 유용한 결과를 도출할 수 있을 것으로 생각된다. 여기서는 그러한 몇가지 변환에 관해서 논하고자 한다.

1. 直交變換과 直交正規變換[2]

행렬 X는 X공간을 생성한다. 그리고 이 과정에서 X의 각 열은 좌표축을 형성한다고 볼 수 있다. 이 열들이 서로 直交이면, $K\times K$행렬 $X'X$는 대각행렬이 될 것이다. 그러나 일반적으로 $X'X$는 대각행렬이 아닐 것이므로, X에 적절한 비특이변환을 적용하여 이를 대각행렬로 되게 할 수 있다. 이 변환을 직교변환(orthogonal transformation)이라고 부를 수 있다. 이 변환은 행렬 $X'X$의 특성근, 특성벡터에 관한 다음의 항등식으로부터 얻을 수 있

(2) Dubbelman et al. (1978)에서 관련된 논의를 발견할 수 있다.

다. 즉,

$$X'XV=V\Lambda \tag{5.1}$$

이 식에서 Λ는 $X'X$의 K개의 특성근 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$를 대각원소로 하는 대각행렬이고, V는 이 특성근들에 대응하는 직교·정규화된(orthonormal) 특성벡터들로 이루어지는 $K\times K$ 직교 행렬이다. $X'X$은 양정부호행렬(positive definite matrix)이므로, λ들은 모두 양수이고, V는 직교행렬이므로,

$$V'V=VV'=I \tag{5.2}$$

의 관계를 만족한다.

이제 X^0를

$$X^0=XV \tag{5.3}$$

로 정의하자. 여기서 V가 비특이행렬이므로 이 변환은 비특이변환이다. 그리고 식(5.1)을 이용하면 $X^{0\prime}X^0$는 다음과 같이 변형된다. 즉,

$$X^{0\prime}X^0=V'X'XV=V'V\Lambda=\Lambda \tag{5.4}$$

여기서 마지막 등호는 식(5.2)에 의한 것이다. 식(5.4)는 $X^{0\prime}X^0$가 대각행렬임을 나타낸다. 변환(5.3)은 직교변환이다. 즉 X^0의 K개의 열들은 서로 직교하면서 X공간을 생성하고, 또 이 변환은 비특이변환의 일종이므로,

$$M(X^0)=M(X) \tag{5.5}$$

$$P(X^0)=P(X) \tag{5.6}$$

의 관계가 성립한다.

직교변환된 행렬 X^0의 각 列은 X공간의 기저벡터를 이룬다. 그리고 그 기저벡터의 길이는, 식(5.4)에 의하면, 특성근의 평방근과 같다. 그런데 계량경제학의 분석을 위해서는 이 기저벡터의 길이가 모두 1로 正規化(normalize)되는 것이 편리할 때가 있다. 그리하여 우리는 직교변환된 행렬 X^0에 추가적인 변환 즉 정규변환을 가함으로써 이 목적을 달성할 수 있는데 이는

$$X^{0n}=X^0\Lambda^{-1/2}=XV\Lambda^{-1/2} \tag{5.7}$$

에 의해서 가능하다. 왜냐하면 이 직교정규변환의 결과로,

$$X^{0n\prime}X^{0n}=I \tag{5.8}$$

로 되기 때문이다. 단, $\Lambda^{-1/2}$은 대각원소가 특성근의 역수의 평방근인 대각행렬이며, 이는 모두 양수이기 때문에 $\Lambda^{-1/2}$ 역시 비특이행렬이므로 이 변환은 비특이변환의 일종이다. 따라서 X^{0n}의 열들은 X공간을 생성할 뿐 아니라,

$$M(X^{0n})=M(X) \tag{5.9}$$

$$P(X^{0n})=P(X) \tag{5.10}$$

라는 관계도 만족한다.

2. 中心變換과 中心正規變換[3]

회귀분석의 대상이 되는 모형에서의 변수들간의 관계는 변수의 수준들간의 관계를 나타내는 것이 보통이다. 그러나 선형모형에서는 수준들간의 관계를 나타내는 계수는 변화들간의 관계를 나타내는 계수와 같기때문에 변수를 중심으로부터의 편차의 형태로 변환하여 분석을 행하는 경우를 흔히 볼 수 있다. 그리고 이 변환은 흔히 산술평균으로부터의 편차라는 형태를 취하는 것이 보통이다. 이를 中心調整 또는 中心變換이라 부른다.

그런데 비특이변환으로서의 中心變換은 X의 열 중에서 모든 원소가 1인 $T\times 1$벡터 1이 반드시 존재할 때 가능하다. 그리하여 X가

$$X=[1 \vdots X_2] \tag{5.11}$$

로 분할될 수 있다고 보자. (이는 식(2.4)에서 $X_1=1$인 경우에 해당한다.) 이때 중심변환은 X를 다음과 같이 정의되는 X^c로 변환하는 것을 말한다. 즉,

$$X^c=[1 \vdots X_2-1\bar{X}_2] \tag{5.12}$$

단, $\bar{X}_2$는 $\bar{X}_2=\frac{1}{n}1'X_2$로서, $K-1$개의 설명변수의 평균으로 되는 $K-1$차원의 행벡터이다. 이것은 X의 첫째 열은 그대로 두고, 나머지 $K-1$개의 열은 각 변수의 평균으로부터의 편차로 변환하는 것을 말한다. 그리고 이 변환이 비특이변환이 되는 이유는,

$$X^c=XC,\quad C=\begin{bmatrix} 1 & -\bar{X}_2 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

으로서, C가 비특이행렬이기 때문이다. 그러므로 X^c에 의하여 X공간이 생성될 수 있고, 또,

$$M(X^c)=M(X) \tag{5.14}$$

$$P(X^c)=P(X) \tag{5.15}$$

의 관계가 성립한다.

다음은 변환된 행렬 X^c를 써서 $X^{c\prime}X^c$를 만들어 보자. 즉,

$$X^{c\prime}X^c=\begin{bmatrix} T & 0' \\ 0 & (X_2-1\bar{X}_2)'(X_2-1\bar{X}_2) \end{bmatrix}. \tag{5.16}$$

이 행렬은 대각행렬은 아니지만 블록대각 행렬(block diagonal matrix)이다. 그리고 이 行列을 T로 나누면, 아래 오른쪽 블록은 $K-1$개의 설명변수의 분산 및 상호간의 공분산들로

(3) 이와 관련된 논의는 Jeong(1976)과 Jeong(1983)에서 발견할 수 있다.

이루어지는 (표본)분산공분산행렬이 된다.

행렬 X^c의 각 열의 길이는 정규화되어 있지 않다. 이를 정규화하기 위해서는 $X^{c\prime}X^c$의 대각원소의 평방근으로 X^c의 각 열을 나누어주면 될 것이다. 즉 X의 중심직교변환된 행렬을 X^{cn}이라 하면, 이는 다음과 같이 정의된다. 즉,

$$X^{cn}=X^cS^{-1}=XCS^{-1}. \tag{5.17}$$

단, S는 $X^{c\prime}X^c$의 대각원소의 평방근을 S_i라 할 때, 이를 대각원소로하는 대각행렬이다. 그리고 S_i를 평가해보면 다음과 같다.

$$s_1=\sqrt{T}; \quad s_i^2=\sum_{t=1}^{T}(x_{ti}-\bar{x}_i)^2, \quad \bar{x}_i=\frac{1}{T}\Sigma x_{ti}; \ i=2, 3, \cdots, K \tag{5.18}$$

그리고 CS^{-1}가 비특이행렬이므로, 이 변환 역시 비특이변환이며, 따라서

$$M(X^{cn})=M(X) \tag{5.19}$$

$$P(X^{cn})=P(X) \tag{5.20}$$

의 관계가 성립한다.

3. 正規變換

논의의 완결을 위해서 또 하나의 變換을 설명하고자 한다. 앞에서 우리는 다른 변환과 결합하여 正規變換을 논의하였다. 여기서는 정규변환을 단독으로 논의해 보고자 한다. 이는 행렬 X의 열들을 길이가 1이 되도록 변환하는 것만을 포함하는 변환이다.[(4)] 이는 $X'X$의 대각원소의 평방근을 S_{ii}^*라 할 때, 즉

$$S_{ii}^*=\sqrt{x_i'x_i} \quad i=1, 2, \cdots, K \tag{5.21}$$

라 할 때, 이를 대각원소로 하는 대각행렬 S^*를 써서 정의할 수 있다. 즉

$$X^n=XS^{*-1} \tag{5.22}$$

라 하면, $X^{n\prime}X^n$은 그 대각원소가 모두 1이 된다. 그리고 S^{*-1}가 비특이행렬이므로, X^n은 X의 비특이변환이며,

$$M(X^n)=M(X) \tag{5.23}$$

$$P(X^n)=P(X) \tag{5.24}$$

의 관계가 만족된다. 즉 이 변환에 의하여 X공간, 기본행렬, 투영행렬은 모두 불변성을 유지한다.

(4) 이 변환은 稜線回歸와 관련하여 鄭基俊(1987)에서 논의되고 있다.

VI. 非非特異變換과 그 문제점

앞 절에서 우리는 中心變換 X^c를 식(5.12) 및 (5.13)으로 정의하였다. 즉,

$$X^c = XC = [1 \vdots X_2 - 1\bar{X}_2], \quad C = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & -\bar{X}_2 \\ \cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ 0 & \vdots & I \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

그런데 中心變換은 이것보다 간단히 정의할 수 있다고 믿는 사람이 많다. [鄭基俊(1987) 참조]
이제 M_1을

$$M_1 = M(1) = I - \frac{1}{T}11' \tag{6.2}$$

로 정의하면,

$$M_1X = [M_1 1 \vdots M_1X_2] = [0 \vdots X_2 - 1\bar{X}_2] \tag{6.3}$$

로 된다. 즉 X의 앞에 M_1을 곱하여, X를 변환하면 $M_1 1=0$이므로 상수항에 대응하는 열은 0이 되고, 나머지 열은 식(5.12) 또는 식(6.1)에서의 X^c에서와 같아진다. 즉 中心調整이 이루어진 것이다. 그러므로 M_1X 역시 중심변환으로 볼 수 있다는 것이다. 그러나 이 변환이 가지는 약점은 M_1X의 位數는 K가 아니라 $K-1$이라는 것이다. 즉 M_1X로는 X공간이 생성될 수 없고, 따라서 M_1X는 X공간의 기저행렬이 될 수 없다. M_1X가 기저행렬이 될 수 없다는 것은 기본행렬 M과 투영행렬 P의 불변성도 성립할 수 없다는 것을 의미한다. 그러므로 중심변환으로서는 M_1X보다 비특이변환인 X^c를 선호하게 된다.

VII. 直交正規變換을 통해서 본 基本行列·投影行列의 성질

식(5.7)과 (5.8)에 의하면 직교정규변환을 $X^{0n} = XV\Lambda^{-1/2}$로 정의할 때, $X^{0n\prime}X^{0n} = I$로 된다. 그리고 이는 비특이변환이므로 $P = P(X) = P(X^{0n})$이고, $P(X^{0n})$의 정의에 의하면 이는 $X^{0n}X^{0n\prime}$으로 쓸 수 있다. 즉,

$$P = P(X) = X^{0n}X^{0n\prime}. \tag{7.1}$$

이는 X공간의 투영행렬 P가 직교정규벡터들로 이루어진 행렬 X^{0n}과 그 轉置行列의 外積(outer product)에 의해서 표현될 수 있음을 보여준다. 이것이 함축하는 의미를 고찰하기 위하여, X^{0n}을 다음과 같이 분할표현해 보자. 즉

$$X^{0n} = [u_1, \ u_2, \cdots, u_K]$$

$$\text{단, } u_i' = [u_{1i}, \ u_{2i}, \cdots, u_{Ti}]. \tag{7.2}$$

그러면 정의상 다음 관계가 성립한다.

$$u_i'u_i=1 \qquad i=1, 2, \cdots, K \tag{7.3}$$

$$u_i'u_j=0 \qquad i\neq j=1, 2, \cdots, K \tag{7.4}$$

그리고 (7.2)의 관계를 이용하여 P를 표현하면 다음과 같다. 즉,

$$P=u_1u_1'+u_2u_2'+\cdots+u_Ku_K'=\sum_{i=1}^{K}u_iu_i'. \tag{7.5}$$

이처럼 P를 u_i들로써 표현할 때, P라는 행렬이 가지는 특징은, 對角合(trace)의 개념을 일반화한 小對角合(minor trace)의 개념에 의해서 克明하게 표현될 수 있음을 보이는 것이 이 절의 중요한 목적이다.

이를 위한 예비작업으로서 우리는 우선 小對角行列을 다음과 같이 정의한다. 즉, s번째 小對角行列 D_s는, $T\times T$ 행렬로서, 모든 가능한 t에 관해서, 그 행렬의 (t, $t\pm s$) 번째 원소가 모두 $\frac{1}{2}$이고, 나머지 원소는 모두 0인 행렬이다. 그리고 0번째 소대각행렬 D_0는 I_T로 정의한다. 예컨대 D_1과 D_2는 다음과 같은 형태를 취한다.

$$D_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.6}$$

$$D_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & \ddots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

요컨대 D_1은 대각원소 바로 옆의 원소들(제 1 소대각원소들)만 0이 아니고, D_2는 제 2 소대각원소들만 0이 아니다. 이 소대각행렬들은 $s=0, 1, \cdots, T-1$에 관하여 정의할 수 있다.

이 소대각행렬을 이용하여 우리는 小對角合을 다음과 같이 정의할 수 있다. 즉 (대칭)행렬 P의 s번째 소대각합(sth minor trace) tr_sP는 D_sP의 대각합으로 정의된다. 즉,

$$\mathrm{tr}_s P = \mathrm{tr} D_s P. \tag{7.8}$$

그리고 $D_sP = D_s\Sigma u_i u_i' = \Sigma D_s u_i u_i'$으로 쓸 수 있으므로, 식(7.8)은 다음과 같이 변형될 수 있다. 즉,

$$\mathrm{tr}\ D_sP = \sum_{i=1}^{K} \mathrm{tr}\ D_s u_i u_i' = \sum_{i=1}^{K} u_i' D_s u_i. \tag{7.9}$$

여기서 마지막 등호가 성립하는 것은 tr $D_s u_i u_i' = \mathrm{tr}\ u_i' D_s u_i$이고, $u_i' D_s u_i$는 스칼라이기 때문이다. 이상을 종합하면,

$$\mathrm{tr}_s P = \sum_{i=1}^{K} u_i' D_s u_i \qquad s = 0, 1, \cdots, T-1 \tag{7.10}$$

을 얻는다. 그리고 $s=0$일 때는, $D_0 = I$, $u_i'u_i = 1$이라는 사실로 부터, $\mathrm{tr}_0 P = \mathrm{tr} P = K$라는 잘 알려진 결과를 다시 확인할 수 있다. 그리고 基本行列 M에 관해서는 $\mathrm{tr}_s I = 0$, $s = 1, 2, \cdots, T-K$라는 사실로부터,

$$\mathrm{tr}_s M = -\mathrm{tr}_s P \qquad s = 1, 2, \cdots, T-1 \tag{7.11}$$

을 얻는다. 단, $s=0$일 때, $\mathrm{tr}_0 M = \mathrm{tr} M = T-K$라는 것은 이미 잘 알려진 사실이다.

행렬 P 또는 M의 소대각합 중에서 이처럼 $s=0$인 경우는 이미 잘 알려진대로 그 크기가 T와 K에만 의존한다. 우리는 이제 $s=1, 2, \cdots$ 일 때의 소대각합을 평가해보고자 한다.

먼저 우리는 $u_i' D_s u_i$를 전개함으로써 다음 사실을 확인할 수 있다. 즉,

$$u_i' D_s u_i = \sum_{t=1}^{T-s} u_{ti} u_{t+s,i} \qquad i = 1, 2, \cdots, K, \ \ s = 1, 2, \cdots, T-1 \tag{7.13}$$

그리고 슈바르쯔부등식을 적용하면 다음 부등식이 얻어진다. 즉,

$$\frac{\left(\sum_{t=1}^{T-s} u_{ti} u_{t+s,i}\right)^2}{\sum_{t=1}^{T-s} u_{ti}^2 \cdot \sum_{t=1}^{T-s} u_{t+s,i}} \leq 1 \qquad i = 1, 2, \cdots, K, \ \ s = 1, 2, \cdots, T-1 \tag{7.14}$$

그리고 이 식의 좌변은 準自己相關係數[(5)]의 제곱을 정의하는 식으로 볼 수 있고, 또 $u_i'u_i = 1$ 즉,

$$u_i' u_i = \sum_{t=1}^{T} u_{ti}^2 = 1 \tag{7.15}$$

임을 감안하면, 그 식의 분모는 1보다 작거나 같다. 그러므로 그 분자는 1보다 클 수 없다. 즉 식(7.13)을 감안하면,

$$(u_i' D_s u_i)^2 \leq 1 \tag{7.16}$$

(5) "準"이란 u_i가 中心調整이 이루어지지 않았음을 나타낸다. 이 개념에 관해서는 鄭基俊(1987)을 참조하기 바란다.

라는 중요한 부등식이 도출된다. 그리고 이로부터,

$$-1 \leq u_i' D_s u_i \leq 1 \tag{7.17}$$

$$-1 \leq \frac{\sum_{1=i}^{K} u_i' D_s u_i}{K} \leq 1 \tag{7.18}$$

$$-K \leq \mathrm{tr}_s P \leq K \tag{7.19}$$

또는

$$-1 \leq \frac{\mathrm{tr}_s P}{K} \leq 1 \tag{7.20}$$

의 관계를 도출할 수 있다. 또 식(7.14) 및 그 이후의 논의에 비추어 볼 때, $u_i' D_s u_i$는 u_i의 s계 준자기상관계수라고 불러도 괜찮을 것으로 생각되며, 따라서 식(7.20)의 $\mathrm{tr}_s P/K$는 모든 u_i들의 s계 준자기상관계수의 산술평균으로 볼 수 있다.

우리가 여기서 사용하는 s계 준자기상관계수는 u_i에 관한 것이다. 그러면 이것은 行列 X와는 어떤 관련이 있는 것일까? 이를 알아보기 위하여 X의 t번째 행을 x^t라 하자. 즉,

$$x^t = [x_{t1}\ x_{t2} \cdots x_{tK}]. \tag{7.21}$$

그리고 행벡터 u^t를 다음과 같이 정의하자. 즉,

$$u^t = [u_{t1}\ u_{t2} \cdots u_{tK}]. \tag{7.22}$$

그러면 식(7.2)에 의한 u_i의 정의와 식(5.7), (5.8)에 의한 X^{0n}의 정의로부터 우리는 다음 관계를 얻는다. 즉,

$$u^t = x^t V \Lambda^{-1/2}. \tag{7.23}$$

여기서 V와 Λ는 $X'X$의 특성벡터와 특성근으로 이루어지는 행렬이다. 그리고 X를 시계열자료라고 볼 때, X의 각 행 X^t는 시계열적 특성을 간직하고 있으나, $X'X$는(따라서 V와 Λ도) 그 특성을 완전히 상실하고 있다. 따라서 식(7.23)에 의할 때, u^t가 가지는 시계열적 특성은 x^t가 가지는 것에 의해서, 그리고 그것만에 의해서 결정된다. 그러므로 $\mathrm{tr}_s P/K$에 포함된 u_i들의 준자기상관적 특성은 X의 시계열적 특성을 그대로 반영하는 것으로 볼 수 있다. 바꾸어 말하면 식(7.20)의 $\mathrm{tr}_s P/K$는 X의 시계열적 특성을 나타내주는 중요한 축약표현이라고 볼 수 있는 것이다.

VIII. 中心正規變換을 통해서 본 基本行列·投影行列의 性質[6]

中心正規變換은 식(5.17)에 의한 변환 즉,

(6) 이에 관한 原初的인 논의는 Jeong(1976)에서 이루어졌고, Jeong(1983)에서 계열상관분석에 이용되었다. 그리고 中心正規變換자체는 鄭基俊(1987)에서 稜線回歸模型의 正規化에 이용되었다.

$$X^{cn}=XCS^{-1} \tag{8.1}$$

를 말한다. 이 변환은 첫째 설명변수가 상수항을 나타내는 경우 즉, $X_1=1$인 경우에 한해서 적용된다. 그리고 제 5 절의 논의에 의하면

$$C=\begin{bmatrix} 1 & -\bar{X}_2 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{8.2}$$

$$S=\begin{bmatrix} \sqrt{T} & 0' \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{T} & & 0 \\ & s_2 & \\ 0 & & \ddots s_K \end{bmatrix} \tag{8.3}$$

$$s_i=\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(x_{ti}-\bar{x}_i)^2} \qquad i=2, 3, \cdots, K \tag{8.4}$$

이다. 이를 이용하여 XC와 X^{cn}을 평가해보자. 먼저 $X^c=XC$를 평가해 보면,

$$X^c=XC=[1 \,\vdots\, X_2]C=[1 \,\vdots\, X_2-1\bar{X}_2]=[1 \,\vdots\, M_1X_2] \tag{8.5}$$

이다. 단, $M_1=I-P_1$, $P_1=1(1'1)^{-1}1'=\frac{1}{T}11'$로서, P_1은 1에 대한 투영행렬이고, M_1은 그에 대응하는 기본행렬이다. M_1X_2는 X_2속의 $K-1$개의 列을 평균으로부터의 편차로 변환시킨다. 그리고 $1'M_1=0$이기 때문에, $1'X^c=[T \,\vdots\, 0]$로 된다. 이를 이용하여 $X^{c\prime}X^c$를 계산하면,

$$X^{c\prime}X^c=\left[\begin{array}{c:c} T & 0' \\ \hdashline 0 & X_2'M_1X_2 \end{array}\right] \tag{8.6}$$

을 얻는다. 그리고 위에서 정의한 S는 $X^{c\prime}X^c$의 대각원소의 평방근들을 그대로 대각원소로 한 대각행렬임을 알 수 있다. 왜냐하면

$$S_2{}^i=X_i'M_1X_i \qquad i=2, 3, \cdots, K \tag{8.7}$$

이기 때문이다.

中心正規變換으로 얻어지는 X^{cn}은 X^c의 뒤에 S^{-1}를 곱하여 얻어진다. 즉,

$$X^{cn}=X^cS^{-1}=\left[1\cdot\frac{1}{\sqrt{T}} \,\vdots\, M_1X_2S_2^{-1}\right] \tag{8.8}$$

이를 이용하여 $X^{cn\prime}X^{cn}$을 계산해 보면 다음과 같다. 즉,

$$X^{cn\prime}X^{cn}=S^{-1}X^{c\prime}X^cS^{-1}=\left[\begin{array}{c:c} 1 & 0' \\ \hdashline 0 & S_2^{-1}X_2'M_1X_2S_2^{-1} \end{array}\right] \tag{8.9}$$

이 행렬의 (i, j)번째 원소를 r_{ij}라 하면,

$$r_{ij}=\frac{X_i'M_1X_j}{s_is_j}=\sum_{t=1}^{T}(X_{ti}-\bar{X}_i)(X_{tj}-\bar{X}_j)/s_is_j, \quad i, j=2, 3, \cdots, K \tag{8.10}$$

로 되어 이는 $K-1$개의 변수 X_i와 X_j간의 상관계수로 해석할 수 있고 그 대각원소 r_{ii}는 모

두 1이다. 그러므로,

$$R=S_2^{-1}X_2'M_1X_2S_2^{-1}=\begin{bmatrix}1 & r_{23} & r_{24}\cdots r_{2K}\\ r_{32} & 1 & r_{34}\cdots r_{3K}\\ \vdots & & \\ r_{K2} & r_{K3} & r_{K4}\cdots 1\end{bmatrix} \tag{8.11}$$

로 정의하면,

$$X^{cn\prime}X^{cn}=\begin{bmatrix}1 & 0'\\ 0 & R\end{bmatrix} \tag{8.12}$$

로 되어, R은 상수항을 제외한 $K-1$개의 설명변수간의 상관계수로 해석할 수 있고, $X^{cn\prime}X^{cn}$은 상수항을 포함한 모든 설명변수들간의 "넓은 의미의" 상관계수행렬로 볼 수 있다. 앞으로는 이를 간단히 X의 상관계수행렬이라고 부르기로 한다.

앞 절에서 投影行列 P와 기본행렬 M의 특징을 준자기상관계수의 개념으로 나타낼 수 있었던 것은, 직교정규변환에서 $X^{0n\prime}X^{0n}=I$라는 성질을 가지기 때문이었다. 여기서 다루는 중심정규변환에서도 $X^{cn\prime}X^{cn}=I$라고 놓을 수 있으면, 앞절에서와 유사한 분석이 가능할 것이다. 그런데 (8.12)에 의하면, 이것은 $R=I$일때 가능하다. 그리고 이는 모든 설명변수가 서로 無相關일때 가능하다. 우리는 먼저 $R=I$라는 가정하에서 중심정규변환을 이용하여 투영행렬과 기본행렬의 성질을 구명해 보고자 한다.

1. $R=I$일 때의 투영행렬·기본행렬의 성질

가정에 의하여 $R=I$이면, $X^{cn\prime}X^{cn}=I$이며, 따라서 식(5.20)에 의하여

$$P=P(X^{cn})=X^{cn}X^{cn\prime} \tag{8.13}$$

$$M=I-X^{cn}X^{cn\prime} \tag{8.14}$$

이다. 이 경우에도 $\mathrm{tr}P=K$, $\mathrm{tr}M=T-K$라는 사실은 자명하다. 우리는 여기서 앞 절에서와 마찬가지로 小對角合 tr_sP, tr_sM을 통하여, 행렬 P와 M의 성질을 구명해 보고자 한다. 小對角合의 정의로부터

$$\mathrm{tr}_sP=\mathrm{tr}D_sX^{cn}X^{cn\prime}=\mathrm{tr}X^{cn\prime}D_sX^{cn},\ \ s=1, 2, \cdots, T-1, \tag{8.15}$$

을 얻는다. 이를 식(8.8)을 이용하여 평가해 보자. 즉,

$$\mathrm{tr}X^{cn\prime}D_sX^{cn}=tr\begin{bmatrix}1'\dfrac{1}{\sqrt{T}}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ S_2^{-1}X_2'M_1\end{bmatrix}D_s\left[1\frac{1}{\sqrt{T}}:M_1X_2S_2^{-1}\right]$$

$$=\frac{1}{T}1'D_s1+\sum_{i=2}^{K}\{X_i'M_1D_sM_1X_i/S_i^2\} \tag{8.16}$$

이를 더 자세히 평가해 보면, $1'D_s1=T-S$이다. 그리고 큰 괄호 속의 것은,

$$X_i' M_1 D_s M_1 X_i / s_i^2 = \sum_{t=1}^{T-s} (x_{ti} - \bar{x}_i)(x_{t+s,i} - \bar{x}_i) / s_i^2 \tag{8.17}$$

으로 나타낼 수 있으므로, i번째 설명변수의 자기상관계수로 해석할 수 있다. 그리고 그 크기는 슈바르쯔부등식에 의한 (7.17)의 유도과정과 마찬가지 과정을 거쳐서, -1과 $+1$ 사이에 있다.

이상을 종합하면 다음과 같다. 즉,

$$\mathrm{tr}_s P - (T-s)/T = \sum_{i=2}^{K} \{X_i' M_1 D_s M_1 X_i / s_i^2\}, \tag{8.18}$$

$$-(K-1) \leq \mathrm{tr}_s P - (T-s)/T \leq K-1 \tag{8.19}$$

$$-1 \leq \frac{\mathrm{tr}_s P - (T-s)/T}{K-1} \leq 1 \tag{8.20}$$

이 식들은 X공간의 특성에 따라서, $\mathrm{tr}_s P$가 취할 수 있는 범위를 보여주며, 또 이는 설명변수의 자기상관계수라고 불러도 좋을 것이다. 또 이 식들의 의의는, X공간의 특징을 직접 X변수의 자기상관계수로(그것도 준자기상관계수가 아닌) 나타내 주는 데 있다.

2. $R \neq I$일 때의 투영행렬·기본행렬의 성질

설명변수들간의 관계가 무상관이 아닐 때, X^{cn}을 이용한 P, M의 성질의 구명은 그리 간단하지 않다. Jeong(1976, 1983)에서는 이에 관한 논의가 다른 문제와의 관련에서 약간 시도되고 있다. 그리고 그 시도에서 발견된 고무적인 사실은, $R \neq I$일 경우에도, "전형적"인 경제시계열자료의 경우에는 P가 근사적으로 $X^{cn}X^{cn\prime}$과 같고, 따라서 $R=I$인 경우의 논의가 근사적으로는 타당하다는 것이다.

IX. 中心直交正規變換

앞 절에서 본 바와 같이 中心正規變換 X^{cn}을 이용하면 P의 소대각합을 X의 자기상관계수와 관련시킬 수 있다는 장점이 있으나, $X^{cn\prime}X^{cn}=I$가 항상 성립하지 않기 때문에 그 관련은 근사적일 수 밖에 없다는 것이 단점이다. 제 7 절에서의 直交正規變換 X^{0n}은 $X^{0n\prime}X^{0n}=I$가 모든 경우에 자동적으로 성립하게 되지만, 이를 이용하면 P의 소대각합의 변화범위를 확정할 수 있지만, X자체가 아니라 변형된 관측치 벡터 u_i들로 설명된다는 것이 하나의 단점이고, 또 자기상관계수가 아니라 준자기상관계수로 나타낼 수 있을 뿐이라는 것이 또 하나의 단점이다. 이 가운데 앞의 단점에 관해서 말하자면, u_i를 사용할지라도 u_i들이 철저하게 X의 시계열적 특성을 반영한다는 성질때문에, 그 단점은 어느 정도 보상을 받는다고 볼 수 있

다. 그리고 뒤의 단점은 일반적으로는 해소할 수 없지만, 우리가 흔히 접하게 되는 상수항을 포함하는 회귀모형의 경우에는 제 8 절에서의 중심변환을 직교정규변환에 선행시킴으로써 해소할 수 있다. 이것이 여기서 설명하고자 하는 중심직교정규변환이다.

식(8.6)에 의하면 중심변환된 行列 X^c의 積率行列 $X^{c\prime}X^c$는 다음과 같다. 즉,

$$X^{c\prime}X^c=\left[\begin{array}{c:c} T & 0' \\ \hdashline 0 & X_2'M_1X_2 \end{array}\right]. \tag{9.1}$$

그러므로 X^c를 직교정규화하여 중심직교정규변환을 해주려면, 제 5 절 및 제 7 절에서 설명한 X의 직교정규변환방법을 M_1X_2에 적용하면 된다. 즉 $X_2'M_1X_2$의 특성벡터들로 이루어지는 직교행렬을 V_2라 하고 그에 대응하는 특성근들로 이루어지는 대각행렬을 Λ_2라 하면,

$$V_2'X_2M_1X_2V_2=\Lambda_2 \tag{9.2}$$

로 되므로, X^{c0n}을 정의하기를

$$X^{c0n}=[1 : M_1X_2]\begin{bmatrix} 1 & 0' \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T & 0' \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix}^{-1/2} \tag{9.3}$$

로 하면, $X^{c0n\prime}X^{c0n}=I$로 된다. 그리고 X^{c0n}은 X의 비특이변환이므로,

$$P=P(X^{c0n})=X^{c0n}X^{c0n\prime} \tag{9.4}$$

$$M=M(X^{c0n})=I-X^{c0n}X^{c0n\prime} \tag{9.5}$$

으로 된다.

이제 P와 M의 소대각합을 평가하기 위하여, 우선 (9.3)의 X^{c0n}을 다시 써보자. 즉,

$$X^{c0n}=\left[\frac{1}{\sqrt{T}}1 : M_1X_2V_2\Lambda_2^{-1/2}\right]=\left[\frac{1}{\sqrt{T}}1 : X_2^*\right] \tag{9.6}$$

단,

$$X_2^*\equiv M_1X_2V_2\Lambda_2^{-1/2} \tag{9.7}$$

로 정의된다. 즉 X_2^*는 X_2의 중심직교정규변환으로 얻어지는 $T\times(K-1)$ 행렬이다. 이제 P의 소대각합을 평가해보자. 즉,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_sP&=\mathrm{tr}\ D_sX^{c0n}X^{c0n\prime}=\mathrm{tr}\ X^{c0n\prime}D_sX^{c0n}\\ &=\frac{1}{T}1'D_s1+\sum_{i=2}^{K}X_i^{*\prime}D_sX_i^*=\frac{T-s}{T}+\sum_{i=2}^{K}x_{ti}^*x_{t+s,i}^*\quad s=1,2,\cdots,T-1\end{aligned} \tag{9.8}$$

이 변환 과정은 식(8.16) 이하의 과정과 유사하다. 그리고 직교정규변환된 u_i에 관하여 식(7.13)에서 $u_i'D_su_i$를 준자기상관계수로 해석할 수 있었음에 대하여, 여기서처럼 중심직교정규변환된 X_i^*에 관하여 식(9.8)에 나타나는 $X_i^{*\prime}D_sX_i^*$는 X_i^*의 자기상관계수로 해석할 수 있다. 그리고 그 변화범위는 슈바르쯔부등식을 이용하여

$$-1 \leq x_i^{*\prime} D_s x_i^* \leq 1 \tag{9.9}$$

로 된다. 따라서

$$-1 \leq \frac{\sum_{i=2}^{K} x_i^{*\prime} D_s x_i^*}{K-1} \leq 1 \tag{9.10}$$

이라는 부등식이 얻어지고, 또

$$-1 \leq \frac{\mathrm{tr}_s P-(T-s)/T}{K-1} \leq 1 \tag{9.11}$$

이 얻어진다. 부등식(9.11)은 (8.20)과 유사하다. 그런데 (8.20)은 설명변수들이 직교라는 가정하에서 얻어진 것이였다. 그러나 (9.11)은 그러한 가정이 없이 상수항이 들어있는 모든 경우에 성립하는 식이므로, (8.20)보다 일반적인 결과를 얻은 셈이다. 다만 이를 도출하는 과정에서 사용한 자기상관계수는 x_i 자체의 그것이 아니라 변환된 변수 x_i^*의 그것이라는 점이 문제일 뿐이다. 그러나 x_i^*가 원래의 설명변수행렬 x의 시계열적 특성을 그대로 간직하고 있음을, 직교정규변환에서 설명한 것과 같은 방법으로 보일 수 있다. 그러므로 x_i^*들의 자기상관계수적 특징을 종합한 것으로 볼 수 있는 $\mathrm{tr}_s P$는 X의 자기상관계수적 특징을 축약하여 나타낸다고 보아도 좋을 것이다.

X. 結　言

基本行列 M과 投影行列 P는 제 2 절과 제 3 절에 소개된 이미 잘 알려져 있는 성질만으로서도 계량경제적 연구에서 대단히 중요한 위치를 차지하고 있다. 그러나 제 4 절에서 본 바와 같은 X의 비특이변환에 의한 X공간의 基底變換에 대해서, M과 P가 불변성을 가진다는 성질이 함축하는 바에 대해서는 지금까지 거의 논의가 이루어진 것이 없는 것 같다. 제 5 절에서 본 바와 같이 우리는 여러가지 유용한 비특이변환을 생각할 수 있으며, 제 7 절과 제 8 절에서 본 바와 같이 直交正規變換과 中心正規變換은 M과 P의 숨겨진 성질을 알아보는 데 극히 유용한 변환이다.

직교정규변환은 P와 M의 소대각합을 변환된 변수의 준자기상관계수의 개념과 연결함으로써, 일반적으로 소대각합이 취할 수 있는 범위를 규정해준다. 그러나 준자기상관계수는 흔히 사용하지 않는 개념이라는 것이 X행렬의 특징을 나타내는 개념으로서는 약점이라고 볼 수 있다.

중심정규변환은 설명변수가 직교이고 상수항을 포함할 때, M과 P의 소대각합을 설명변수

들의 자기상관계수로 나타낼 수 있다는 것을 보여 준다는 점에서 극히 매력적이다. 그리고 이 성질은, Jeong(1976) 및 Jeong(1983)에서 보는 바와 같이, 교란항의 계열상관과 관련하여 중요한 의미를 갖는다. 그러나 이 성질은 설명변수의 직교성을 가정할 수 없는 일반적인 경우에 관해서는 엄밀한 논의가 불가능하다는 약점을 가진다.

제 9 절 중심정규변환과 직교정규변환을 결합한 중심직교정규변환을 시도하였다. 즉 상수항이 있는 회귀모형에 우선 비특이변환으로서의 중심변환을 하고 나서, 여기에 직교정규변환을 가하는 것이다. 이 변환에 의하면, 상수항이 있는 모든 경우에, 변환된 변수의 자기상관계수의 개념으로 P와 M의 소대각합을 나타낼 수 있고, 따라서 그 변화범위를 엄밀하게 규정할 수 있다. 그러므로 이 개념은 X행렬에 관한 보다 적은 제약하에서 보다 일반적인 논의를 가능하게 하는 실마리를 제공해 줄 것으로 기대할 수 있다. 특히 교란항의 계열상관과 관련되는 문제의 논의에서 유용하게 사용될 수 있을 것이다.

參 考 文 獻

鄭基俊, 「稜線回歸模型에서의 變數의 正規化」, 『經濟論集』, 第26卷 第1號, 1987년 3월,

Amemiya, T., *Advanced Econometrics*, Cambridge Mass: Harvard University Press, 1985.

Dubbelman, C., Louter, A.S. and Abrahamse, A.P.J., "On Typical Characteristics of Economic Time Series and the Relative Qualities of Five Autocorrelation Tests," *Journal of Econometrics*, Vol. 8, 1978.

Jeong, Ki-Jun, "The Bias of the Least Squares Estimator of Variance, the Autocorrelation of the Regressor Matrix, and the Autocorrelation of Disturbances," *Journal of the Korean Statistical Society*, Vol. 12, No. 2, 1983.

Jeong, Ki-Jun, "The Distribution of the Least Squares Variance Estimator under Serial Correlation," *The Korean Economic Journal* Vol. 15, No. 3, Sep. 1976.

Johnston, J., *Econometric Methods*, 3rd ed., New York: McGraw-Hill, 1984.

Theil, H., "Linear Algebra and Matrix Methods in Econometrics," Ch. 1 of Z. Griliches and M.D. Intriligator (eds.), *Handbook of Econometrics*, Vol. 1, New York: North-Holland, 1983.

Theil, H., *Principles of Econometrics*, New York: Wiley, 1971.