CES生產函數의 바람직한 形態

鄭 基 俊*

<目 次>

I. 序 論

경제학의 분석에 CES생산함수가 등장한 것은 1961년 에로우·체네리·민하스·솔로우(ACMS, 1961)에 의한다. 이 함수가 등장한 이래 이 함수는 경제학계의 환영을 받았고, 이를 이용한 이론적·실증적 분석을 크게 고취하였다. 이 함수가 환영을 받은 데는 여러 가지 이유가 있겠으나, 그중의 하나는 이 함수가 기존의 여러 가지 생산함수들을 그 특수한 경우로 포함하는 「일반성」을 가지는 함수라는 것이다. 즉 CES함수는 파라미터의 값에 따라 선형함수, 콥·더글라스함수, 레온티에프함수 등을 그 특수한 경우로 포함한다는 것이다. 그러나 이 논문에서는 이 명제가 「표준적」인 CES함수에 관해서 일반적인 타당성을 가지는 것이 아님을 보이고, 이 명제가 일반적인 타당성을 가지려면 CES함수는 기존의 표준적인 형태와는 다른, 특수한 형태로 표현되어야 함을 밝히면서, CES함수의 「바람직한」 형태를 제안하고자 한다.

II. 旣存의 經濟文獻에서 발견되는 CES函數의 여러 가지 形態

기존의 각종 경제문헌에서 발견되는 CES함수의 형태는 크게 다음과 같이 세 가지 형태로 묶을 수 있다. 즉,

$$y=A\{\delta x_1^{-\rho}+(1-\delta)x_2^{-\rho}\}^{-1/\rho} \tag{1}$$

$$y=\{a_1x_1^{-\rho}+a_2x_2^{-\rho}\}^{-1/\rho} \tag{2}$$

* 本硏究所 硏究員, 서울大學校 經濟學科 敎授

$$y=\{(A_1x_1)^{-\rho}+(A_2x_2)^{-\rho}\}^{-1/\rho} \tag{3}$$

여기서 A들과 a들은 양의 상수이며, δ는 0과 1사이의 수이며, ρ는 -1보다 큰 수이다.

그런데, ρ가 유한할 때 (즉 무한소도 아니고 무한대도 아닐 때), 위의 세 형태는, 파라미터 조합 (A, δ), (a_1, a_2) 및 (A_1, A_2) 각각이 유일하게 서로 대응한다는 의미에서, 동치이다. 즉 각 형태의 파라미터조합을 다른 형태의 파라미터조합으로 나타내면 다음과 같다.

$$A=(a_1+a_2)^{-1/\rho}=(A_1^{-\rho}+A_2^{-\rho})^{-1/\rho} \tag{4.1}$$

$$\delta=\frac{a_1}{a_1+a_2}=\frac{A_1^{-\rho}}{A_1^{-\rho}+A_2^{-\rho}} \tag{4.2}$$

$$a_1=\delta A^{-\rho}=A_1^{-\rho} \tag{5.1}$$

$$a_2=(1-\delta)A^{-\rho}=A_2^{-\rho} \tag{5.2}$$

$$A_1=a_1^{-1/\rho}=A\delta^{-1/\rho} \tag{6.1}$$

$$A_2=a_2^{-1/\rho}=A(1-\delta)^{-1/\rho} \tag{6.2}$$

이처럼 CES함수의 세 형태 (1), (2), (3)은 유한한 ρ에 관하여 동치이므로 이 세 형태중 어느 것을 선택할 것이냐 하는 문제는 논리적으로는 제기될 수 없다. 다만 각자의 기호에 따라 선택하면 그만이다. 그러나 ACMS(1961) 이래로 형태 (1)이 가장 널리 애용된다.

III. 既存 函數形態들의 短點

위에 제시된 세 개의 기존 함수형태들은 몇 가지 단점들을 가지고 있다. 먼저 이점을 밝혀보자.

1. 파라미터의 불변성의 결여

첫째로 지적될 점은 ρ를 제외한 모든 파라미터들이 투입과 산출을 측정하는 단위를 바꾸는데 따라서 변한다는 것이다. ACMS(1961)이래로 형태 (1)의 파라미터들에는 이름이 붙여지는데, A는 「효율파라미터」, δ는 「분배파라미터」, ρ는 「대체파라미터」라고 불리운다. 유일하게 불변성(invariance)을 가지는 대체파라미터 ρ는 CES함수의 기본특징인 일정한 대체탄력성 σ를

$$\sigma=1/(1+\rho) \tag{7}$$

라는 관계에 의해서 결정해주기 때문에 그 이름이 타당성을 갖는다. 그런데 δ는 분배와 관계는 있지만 분배상태를 유일하게 나타내주지 못할 뿐 아니라 불변성도 가지지 못하기 때문에 「분배파라미터」라는 용어가 적절하지 못한 감이 있다. 함수의 형태 (2)와 (3)이 나온 것은 이러한 이유가 작용했다고 볼 수 있을 것이다.

2. 파라미터 ρ가 0에 수렴할 때의 함수의 극한

CES함수의 ρ에 0을 대입하면 부정형이 된다. 이는 세 가지 함수형태에서 모두 같다. 그러나 ρ가 0에 수렴할 때의 극한은 존재하며, 그것은 바로 유명한 콥·더글라스(Cobb-Douglas, CD)함수인 것으로 알려져 있다. 실제로 형태 (1)의 극한을 취해보면

$$\lim_{\rho\to 0} y = A x_1^{\delta} x_2^{1-\delta} \tag{8}$$

로되어, 진정한 의미에서 CD함수로 된다. (그리고 δ는 경쟁조건하에서 요소소득의 분배분을 나타낸다는 의미에서 분배파라미터라는 이름이 어울린다.) 형태 (2)의 극한을 취해보면 그것은 $a_1+a_2=1$일 때만

$$\lim_{\rho\to 0} y = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \tag{9}$$

라는 극한을 가지며, 그렇지 않을 때는 극한이 존재하지 않는다. 그리고 특수한 경우에만 존재하는 극한 (9) 조차도 진정한 일반적 CD함수라고 할 수 없다. 형태 (3)의 극한을 취해보면 우리는 그 극한이 존재하지 않음을 확인할 수 있다.

이처럼 ρ가 0에 수렴할 경우의 극한이라는 관점에서 보면 CES함수의 세 가지 형태는 동치가 아니다. 그리고 이 함수의 장점을 대체탄력성이 일정한 모든 경우를 포괄하는 점에서 찾는다면 대체탄력성이 1인 CD함수를 그의 특수한 경우로서 포함하는 형태 (1)이 다른 두 형태보다 바람직한 형태라고 말할 수 있을 것이다.

3. 파라미터 ρ가 무한대에 수렴할 때의 함수의 극한

대체파라미터 ρ가 무한대에 수렴할 때 CES함수의 극한은 레온티에프함수로 되는 것으로 보통 알려져 있다. 레온티에프함수의 경우 대체탄력성은 0이기 때문이다. 이제 ρ가 무한대로 수렴할 때 함수형태 (1), (2), (3)의 극한을 차례로 구해보면 다음과 같다.

$$\lim_{\rho\to\infty} y = \min\{Ax_1, Ax_2\} \tag{10}$$

$$\lim_{\rho\to\infty} y = \min\{x_1, x_2\} \tag{11}$$

$$\lim_{\rho\to\infty} y = \min\{A_1x_1, A_2x_2\} \tag{12}$$

이 세개의 극한은 모두 레온티에프함수이다. 그러나 진정한 일반성을 가지는 레온티에프함수는 세번째 극한 (12) 뿐이다. 첫째와 둘째의 극한은 극히 특이한 경우를 나타낼 뿐이다. 그러므로 그 극한으로서 일반적 레온티에프함수를 가지는 CES함수는 세 개의 형태 (1), (2), (3) 중 (3)뿐이다. 이런 점에서는 형태 (3)이 가장 바람직하다.

서두에서 밝힌 바와 같이, CES함수가 환영을 받는 여러 가지 이유중의 하나는 이 함수가 기존의 여러 가지 생산함수들을 그 특수한 경우로 포함하는 「일반성」을 가진다는 확인되지

않은 사실이다. 즉 CES함수는 파라미터의 값에 따라 선형함수, 콥•더글라스함수, 레온티에프함수 등을 그 특수한 경우로 포함한다는 것이다. ρ가 -1에 수렴할 때, 이 함수의 세 형태는 모두 일반적 선형함수로 된다. 그러나 위에서 본 바와 같이 위의 세 형태중 어느것도, CD함수와 레온티에프함수를 동시에 그 극한으로 가지는 것은 없다. 그러므로 흔히 생각되는 바와는 달리 기존의 문헌에서 발견되는 CES함수의 형태들은「모두」일반적인 형태로서는 결함을 가지고 있다고 보아야 한다.

두 가지 극한변환을 둘다 동시에 논의한 문헌으로 배리안(1984)을 들어 보자. 배리안은 형태 (2)로부터 출발하여, $a_1+a_2=1$이라는 가정하에서, CD함수의 도출이 항상 가능하다고, 또 $a_1=a_2=1$이라는 가정하에서 레온티에프함수의 도출이 항상 가능하다고 주장한다. 그런데 $a_1+a_2=1$이라는 가정은 투입과 산출의 측정단위를 적절히 선택함으로써 언제나 가능하고, 이는 형태 (1)에서 $A=1$, $\delta=a_1$, $(1-\delta)=a_2$로 놓는 것과 같다. 그러므로 이 부분에 관한 한 배리안의 주장은 옳다. 그런데 $a_1=a_2=1$이라는 가정은, ρ가 무한대에 수렴하는 상황에서는 적절한 측정단위의 선택이라는 절차에 의해서 합리화될 수 없다. (만일 측정단위를 적절히 선택하여 $a_1=a_2$로 놓는 절차가 옳다면, ρ가 0에 수렴할 때도 이 절차를 쓸 수 있어야 하며, 그렇게 되면 측정단위를 적절히 선택함으로써 두 생산요소에 대한 소득분배분을 같게 해줄 수도 있다는 결론을 얻게 된다. 그러나 이것은 분명히 있을 수 없는 일이다.) 오쿠노•스즈무라(1985)도 배리안과 비슷한 주장을 하고 있다.

IV. CES函數의 바람직한 形態

CES함수의 바람직한 형태는 대체탄력성이 일정한 모든 함수를 그 특수한 경우로서 포함하는 것일 것이다. 그리고 함수의 특성을 나타내는 파라미터가 측정단위에 관해서 불변성을 가질 수 있다면 그것은 더욱 바람직할 것이다. 그런데 기존의 함수형태들이 이런 점에서 결함을 가지고 있는 이유를 따져보면「단위의 차원」에 관하여 충분한 고려를 하지 않은채 함수형태를 정한 것에 있지 않은가 한다. 예컨대 형태 (1)을 보면 ρ는 식 (8)에 의해서 대체탄력성과 관계되는 무명수(pure number)임이 분명하다. 그리고 δ를 0과 1 사이의 수이고 이를 분배파라미터라고 명명할 때에는 이것 역시 무명수이기를 암묵적으로 기대했다고 생각된다. 그러나 앞에서 밝힌대로 이는「측정단위에 대한 불변성」을 가지지 못하기 때문에 무명수가 될 수 없다. 사실 형태 (1)의 우변의 큰괄호 부분, 즉

$$\delta x_1^{-\rho}+(1-\delta)x_2^{-\rho} \tag{13}$$

를 보면 두 항이 더해지고 있는데, 이는 그 두 항이 「단위에 있어서 동질적」이란 의미에서 같은 차원의 수량임을 의미한다. 그런데 ρ가 무명수이므로 δ조차도 무명수라면 두 요소의 투입량 x_1과 x_2의 측정단위는 같아야 한다. 그러나 그 측정단위는 일반적으로 실물단위이기 때문에 반드시 같다고는 말할 수 없다. x_1과 x_2의 측정단위가 다를 때, 위의 두 항을 같은 차원의 수량으로 만들어주는 일은 δ가 맡을 수 밖에 없다. δ가 「측정단위에 대한 불변성」을 가지지 못하는 것은 바로 이 때문이다.

이 측정문제를 해결하기 위한 파라미터를 새로 도입하여 형태 (1)을 다음과 같이 변형해 보자.

$$y=A\{\delta(\alpha_1x_1)^{-\rho}+(1-\delta)(\alpha_2x_2)^{-\rho}\}^{-1/\rho} \tag{14}$$

그러면 이 표현에서는 단위조정역할을 α_1, α_2가 맡음으로써, α_1x_1과 α_2x_2는 같은 차원의 수량이 되며 δ는 무명수로서 측정단위에 관한 불변성을 갖는다. 그리고 ρ의 값이 유한할 때 이 형태를 변형하여 형태 (1), (2), (3)과 동치가 되게할 수 있음은 자명하다. 또, ρ를 0에 수렴시키면 그 극한이

$$\lim_{\rho\to0} y=(A\alpha_1^{\delta}\alpha_2^{1-\delta})x_1^{\delta}x_2^{1-\delta} \tag{15}$$

로 되어 일반적인 CD함수의 형태를 나타냄을 확인할 수 있고, ρ를 무한대로 수렴시키면 그 극한은

$$\lim_{\rho\to\infty} y=A\min\{\alpha_1x_1, \alpha_2x_2\} \tag{16}$$

로 되어 일반적인 레온티에프함수의 형태를 나타냄을 확인할 수 있다.

형태 (14)는 이처럼 여러 가지 의미에서 장점들을 가지고 있다. 그런데 이 형태에서 파라미터 δ는 불변성을 가지므로 우리는 이 파라미터에 어떤 고유의 의미를 부여할 수 있도록 해보는 것이 더욱 바람직할 것이다. 적당한 경쟁성의 가정하에서 x_1과 x_2의 요소소득의 상대적 분배분이 다음과 같은 비로 나타내질 수 있음은 잘 알려져 있다. 즉,

$$\frac{\delta(\alpha_1x_1)^{-\rho}}{(1-\delta)(\alpha_2x_2)^{-\rho}}=\frac{\delta}{(1-\delta)}\left[\frac{\alpha_2x_2}{\alpha_1x_1}\right]^{\rho} \tag{17}$$

함수 형태가 CD형인 경우, 즉 ρ가 0에 수렴하는 경우, 이 비율이 δ에 의해서만 결정되는 것은 분명하며, 그런 의미에서 이는 「분배파라미터」이다. 그리고 $(\alpha_2x_2/\alpha_1x_1)$는 무명수이다. 왜냐하면 분모와 분자의 단위차원이 같기 때문이다. 그리하여 이 비율이 1일 때는 ρ가 어떤 값일지라도 소득의 상대적 분배분은 δ만에 의하여 결정된다. 이처럼 이 비율이 1로 되는 경우가 의미있는 경우로 되도록 하기 위하여 α_1과 α_2를 각각

$$\alpha_1=1/\bar{x}_1,\quad \alpha_2=1/\bar{x}_2 \tag{18}$$

로 정의하자. 단 $\bar{x}_1$와 $\bar{x}_2$는 각각 x_1과 x_2의 「평균」이다. 그리하여 CES함수의 형태를

$$y=A\{\delta(x_1/\bar{x}_1)^{-\rho}+(1-\delta)(x_2/\bar{x}_2)^{-\rho}\}^{-1/\rho} \tag{19}$$

로 정의하면, $x_1=\bar{x}_1$, $x_2=\bar{x}_2$일 때 δ는 소득의 상대적 분배분을 나타낸다는 의미에서 「분배파라미터」라고 부를 수 있고, 같은 때 A는 y와 같아져서 산출량을 나타낸다는 의미에서 「효율파라미터」라고 부를 수 있다. 따라서 형태 (19)는 여러 가지 의미에서 가장 바람직한 CES함수의 형태라고 말할 수 있을 것이다.

參 考 文 獻

鄭基俊, 「CES生產函數와 國際貿易理論」, 『經濟論集』, 第6卷 第1號, 서울大學校 經濟研究所, 1967.

奧野正寬・鈴村興太郎, 『ミクロ經濟學 I』, 東京: 岩波書店, 1985.

Arrow, K.J., Chenery, H.B., Minhas, B.S., and Solow R.M., "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency," *Review of Economics and Statistics*, 1961: 225-50.

Varian, H.K., *Microeconomic Analysis* (2nd ed.), N.Y.: Norton, 1984.