不確實性下에서의 選擇理論—顯示選好理論的 接近

金 泰 成[(1)]

不確實性에 직면한 意思決定者가 확실한 賞들에 대한 效用函數를 가지고 여러 행위(혹은 복권)들중 期待效用이 가장 높은 행위(혹은 복권)를 선택할 경우, 그 선택행위를 期待效用極大化行爲라 부른다. 이 논문에서는 기대효용극대화에 합치되는 의사결정자의 선택행위를 顯示選好理論的으로 규정해보고자 한다. 이 논문에서 밝혀진 期待效用極大化行爲의 필요충분조건은 다음과 같다. 선택된 福券들에 대하여 임의의 가중치를 주어 複合福券을 만들고 선택되지 않은 복권들에 대하여 위와 같은 가중치를 주어 복합복권을 만들었을 때, 어떠한 加重値를 선택하였더라도 두 複合福券의 確率分布가 동일해져서는 안된다는 것이 期待效用極大化의 필요충분조건이다.

1. 序

지금까지 不確實性이 존재하는 경우의 選擇行爲에 대한 경제학적 분석은 대부분 期待效用假說에 기반을 두어 왔다. 이 가설에 의하면, 선택주체는 賞(prize)들에 대한 效用函數를 가지고 있으며 여러 행위중에 기대효용이 가장 높은 행위를 선택한다는 것이다. 그러나 최근에 이르러 이러한 期待效用假說에 대해 여러 가지 비판이 제기되고 있다. 그 예로서 알레의 逆說(Allais' paradox)이나 共通比率效果(common ratio effect) 등으로 알려진 일련의 실험들에서는 선택주체들이 기대효용가설에 위배되는 선택을 행함이 보여지고 있으며, 따라서 기대효용가설의 理論的 說明力이 의문시되고 있다. 그러나 기대효용가설과 합치되는 선택행위에 대한 완전한 이론적 이해는 아직 이루어지지 못하고 있다. 예를 들어, 위에 열거된 일련의 實驗들에서 기대효용가설의 違背現象은 선택주체의 순간적인 실수로써 선택주체가 자신의 非合理性을 이해하는 즉시 그러한 현상은 사라질 것이라고 기대효용가설을 옹호할 수 있다. 이러한 문제에 답을 내리기 위해 이 논문에서는 消費者需要分析에서 시작된 顯示選好理論을 기대효용가설로 확장해보고자 한다. 반면, Border(1989), Green and Srivastava(1986), Varian(1983) 등 소수의 논문을 제외하고는 期待效用極大化假說에 대한 행위적 분석이 이루어지지 못해 왔다. 따라서, 이 논문에서는 기대효용극대화와 합치되는 選擇行爲를 顯示選好理論的으로 규정해보고자 한다. 그리고 이 논문에서는 期待效用을 극

(1) 本硏究는 1990년도 修岩奬學文化財團의 지원 아래 이루어졌다. 이 자리를 빌어 감사를 표한다.

대화하는 選擇行爲와 그렇지 못한 행위를 구별해주는 조건을 제시하고자 한다.

그러나 이 논문에서 논의되는 不確實性을 가지는 商品(commodity) 혹은 福券(lottery)은 선택주체와 외부 관찰자가 모두 그 복권의 實際確率分布를 알고 있는 경우에 국한되어 있다. 다시 말하자면, 福券의 確率分布가 객관적인 상황을 다루고 있다. 반면, 不確實性을 가지는 상품 혹은 복권의 객관적 확률분포가 알려져 있지 않는 상황, 즉 確率分布가 주관적인 상황하에서의 기대효용극대화행위에 대한 연구도 이루어져 왔다 [Kim(1990), Richter (1975), Shapiro(1979) 참조]. 그러나 본논문에서는 복권의 客觀的 確率分布가 알려진 경우의 기대효용극대화행위를 중심으로 분석하고자 한다.

본논문에서 취하고 있는 접근방법은 期待效用理論의 公理的 接近이라는 이름으로 잘 알려진 다른 접근 방법과는 상당한 차이가 있다. 공리적 접근은 選擇主體의 選好體系가 분석의 출발점이며, 따라서 이 접근법에서는 복권들의 집합 위에 完全的(complete), 移行的 (transitive) 관계를 일반적으로 가정하고 있다. 그러나 현실에서는 지극히 일부분의 자료만이 관찰되며, 따라서 福券들의 集合 위에는 완전적 관계가 아닌 단지 部分的 關係(partial relation)만이 자료로부터 정의될 수 있다. 이러한 점을 감안하여 본논문에서는 期待效用極大化行爲를 선호체계에 대한 公理가 아니라 선택행위에 대한 공리로써 규정해보고자 한다.

본논문의 주요 결과를 간단히 요약하면 다음과 같다. 選擇主體가 n번의 복권선택을 했으며 i번째에는 B_i로 표시된 福券들의 집합에서 c_i라는 복권을 선택하였다고 하자. 그리고 i번째 選擇行爲에서 선택되지 않은 임의의 복권을 r_i로 표시하자. 이제 $c_1, c_2, \cdots, c_n$의 선택된 복권들로부터 複合福券(compound lottery)을 만들고 $r_1, r_2, \cdots, r_n$의 선택되지 않은 복권들로부터 위와 같은 가중치를 주어 복합복권을 만들어 보자. 어떠한 加重値로 복합복권을 만들더라도 두 복합복권의 確率分布가 같아져서는 안된다는 것이 위의 n번의 선택행위가 期待效用極大化行爲가 되기 위한 必要充分條件이다. 달리 표현해서 선택주체가 기대효용극대화를 하지 않으면 외부 관찰자로서 적당한 가중치를 가지고 複合福券을 만들었을 때 선택된 복권으로부터 만든 복합복권이나 선택되지 못한 복권으로부터 만든 복합복권이나 동일한 복권이 된다는 것이다. 추후의 節에서 밝혀지듯이, 이와 같은 새로운 결과는 賞들의 집합이 緊密(compact)집합이기만 하면 되며, 또한 선택주체가 1회에 여러 복권을 선택하는 경우도 허용되는 매우 일반적인 결과이다.

앞에서 잠깐 언급했듯이 본논문과 연관이 있으면서 기대효용극대화이론에 대해 명시적으로 顯示選好理論的 接近을 취한 논문들을 몇 편 들 수 있겠다. 첫째, Green and Srivastava (1986)와 Varian(1983)의 논문들은 관찰된 가격과 그 가격에 선택된 상품의 수량들의 자료

로부터 관찰된 행위가 기대효용극대화와 합치되기 위한 필요충분조건을 제시하고, 이 조건과 顯示選好條件들과의 관계를 연구하고 있다. 그러나 그들이 제시한 조건들은 관찰자료로부터 도출된 線形不等式體系의 實數解가 존재해야 한다는 조건으로 顯示選好理論的 색채가 약하고, 따라서 행위적으로 해석하기가 매우 어렵다는 단점을 지니고 있다. 이 논문에서는 期待效用極大化行爲로서의 직관을 보여주는 조건들을 찾고자 하는 것이다. 그러한 조건들의 대표적 예가 소비자수요분석에 있어서 '顯示選好의 强公理'라 할 수 있다.

아마도 이 논문과 가장 밀접하게 연관된 논문은 보더의 1989년 논문이라 볼 수 있다. 그는 약한 개념의 合理性을 사용하여 기대효용극대화행위를 달리 規定하고 있다(第 2 節 참조). 이러한 약한 개념의 合理性하에서는 確率的으로 支配되지 않는(stochastically undominated) 어떠한 선택행위도 기대효용극대화행위로 합리화될 수 있음을 그의 논문이 보여주고 있다. 그러나 본논문에서는 福券의 賞이 반드시 貨幣는 아니므로 복권들이 確率的 支配(stochastic dominance)관계로 비교될 수 없고, 따라서 보더의 결과가 적용될 수 없다.

이 논문은 다음과 같이 구성된다. 第 2 節에서는 一般的인 模型이 논의되고 第 3 節에서는 본논문의 주요 결과들을 제시하고 증명한다. 그리고 第 4 節에서는 第 3 節의 주요정리를 幾何學的으로 해석하고, 第 5 節에서는 예들을 소개한다. 또 第 3 節에서 제시된 주요정리들을 도출하는 데 사용된 補助定理들과 그 증명은 附錄에 소개하고자 한다.

2. 基本模型

賞(prize)들 혹은 결과(outcome)들의 집합을 X로 표시하자. 그러면 임의의 福券은 X 위에 정의된 하나의 確率測度(probability measure), 즉 X 위에 정의된 完全加法的 正規 보렐測度(countably additive regular Borel measure)로 표시될 수 있다. 따라서, 福券의 집합들은 X 위의 확률측도들의 공간이 되며, 이 空間을 $M_1^+(X)$로 표시하자. 그리고, sup norm이 주어지면서 X 위에 정의된 有界連續實變數函數(bounded continuous real-valued function)들의 집합을 $C(X)$로 표시하자.

이제 임의의 添字集合(index set)을 T로 나타내면 집합 T의 원소개수는 선택행위의 관찰회수로 해석될 수 있다. 意思決定問題(decision problem) B는 $\{B_t : t \in T\}$로 표시된 예산들의 添字族(indexed family)이며, 이를 T에서 $M_1(X)$로의 相應(correspondence), 즉 豫算相應(budget correspondence)으로 볼 수 있다. 選擇相應(choice correspondence) $c : T \twoheadrightarrow M_1^+(X)$는 T에 속하는 각 t마다 c_t가 B_t의 부분집합인 그러한 상응이다. 만약 모든 t에

대해서 c_t가 한 원소로 이루어진 집합이면 c를 選擇函數(choice function)라 부른다. c(혹은 B)의 t에서의 값을 c_t(혹은 B_t)로 표시하자.

定義1 : $M_1^+(X)\times M_1^+(X)$의 부분집합 S를 다음과 같이 정의하자. 만약 $\mu\in c_t$이며 $\nu\in B_t-c_t$인 그러한 t가 集合 T 속에 존재하면 (μ,ν)는 집합 S의 元素이다. 단, 여기서 B_t-c_t는 c_t의 B_t에 대한 餘集合이다. 따라서,

$$S=\bigcup_{t\in T}\{c_t\times(B_t-c_t)\}.$$

(μ,ν)가 S에 속하면 복권 μ와 ν가 모두 선택가능할 때 복권 μ를 선택한 것으로 해석될 수 있다. $(\mu,\nu)\in S$일 때 $\mu S\nu$로 쓰기도 한다.

$M_1^+(X)\times M_1^+(X)$의 部分集合 I를 다음과 같이 정의하자. 만약 $\mu,\nu\in c_t$인 t가 集合 T 속에 존재하면 (μ,ν)는 集合 I의 元素이다. 따라서,

$$I=\bigcup_{t\in T}\{c_t\times c_t\}.$$

$(\mu,\nu)\in I$일 때 $\mu I\nu$로 쓰기도 한다.

그리고 집합 T와 B_t가 有限集合들이면, 집합 S와 I도 역시 유한집합들이 됨을 유의하자.

賞들의 집합 X 위에 정의된 可測效用函數(measurable utility function) u가 주어졌을 때, 복권 μ의 期待效用은 $\int_X u(x)\,d\mu(x)$로 정의되며, $u(\mu)$로 표시하기도 한다. 期待效用假說이란 선택주체가 어떤 可測效用函數 u를 가지고 가장 높은 期待效用을 주는 福券들을 선택한다는 가설이다.

定義2 : 만약 어떤 可測函數 $u:X\rightarrow R$가 존재하여 모든 $t\in T$에 대하여 $c_t=\{\mu\in B_t$: 모든 $\nu\in B_t$에 대하여 $u(\mu)\geq u(\nu)$이다$\}$이면, 選擇相應 c는 기대효용가설을 충족시킨다고 정의하자. 그리고, 이 때 c를 期待效用合理的(expected-utility-rational)이라 부르자.

몇몇 경제학자들은 그들의 논문에서 定義2에서 정의된 것보다 약한 개념의 合理性(rationality)을 사용하고 있다. 그들의 合理性 槪念은 단지 모든 $t\in T$에 대하여

(2.1) $\qquad c_t\subset\{\mu\in B_t$: 모든 $\nu\in B_t$에 대하여 $u(\mu)\geq u(\nu)$이다$\}$

만을 요구하고 있다〔Border(1989), Green and Srivastava(1986), Varian(1983) 참조〕. 이러한 槪念의 短點은 選好體系와 選擇相應間의 약한 연결관계에 있다. 이러한 개념하에서는 어떤 선택상응도 期待效用合理的이 된다. 왜냐 하면 u를 常數函數로 선택하면 (2.1)式이 항상 만족되기 때문이다. 반면, 선택된 복권들이 마찬가지로 선택하고 싶었던 많은 복권들

중의 部分集合일 수도 있다. 이 경우에는 약한 개념의 合理性이 더 적합할 수도 있다.

복권들의 집합이 주어져 있을 때, 複合福券은 주어진 복권들의 어떤 확률측도에 대한 積分 혹은 볼록結合으로 자연히 정의된다. 예를 들어, $\{\mu_1, \cdots, \mu_n\}$의 복권집합이 주어져 있을 때, 確率測度 $\lambda=(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$은

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i$$

라는 복합복권을 유도한다.

3. 主要定理들

이제 본논문의 주요정리들을 기술하면 다음과 같다.

定理1 : 다음의 가정 (1)～(3)이 만족된다고 하자.

(1) X는 緊密集合이다.

(2) T는 有限集合(finite set)이다

(3) 각 $t \in T$에 대하여, B_t는 有限集合이다.

그러면 선택상응 $c : X \rightarrow\rightarrow R$이 期待效用合理的이기 위한 필요충분조건은 다음과 같다. $S=\{(\mu_1, \nu_1), \cdots, (\mu_m, \nu_m)\}$이고, $I=\{(\mu_{m+1}, \nu_{m+1}), \cdots, (\mu_n, \nu_n)\}$일 때,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nu_i$$

이며, 적어도 하나의 $i=1, \cdots, m$에 대하여 $\lambda_i > 0$를 만족시키는 확률측도 $\lambda=(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$가 존재하지 않아야 한다.

證明 : 먼저 선택상응 c가 期待效用合理的이라고 가정하자. 그러면 어떤 可測函數 $u : X \rightarrow R$이 존재하여 모든 $t \in T$에 대하여 다음의 (3.1)과 (3.2)式이 성립한다. 만약 $\mu \in c_t$이고 $\nu \in B_t - c_t$이면,

$$\int_X u(x)\, d\mu(x) > \int_X u(x)\, d\nu(x). \tag{3.1}$$

만약 $\mu, \nu \in c_t$이면,

$$\int_X u(x)\, d\mu(x) = \int_X u(x)\, d\nu(x). \tag{3.2}$$

모순법으로 증명하기 위해서,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nu_i$$

이며 적어도 하나의 $i=1,\cdots,m$에 대하여 $\lambda_i>0$를 만족시키는 確率測度 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$가 존재한다고 하자. 단, 여기서 $S=\{(\mu_1,\nu_1),\cdots,\ (\mu_m,\nu_m)\}$이고, $I=\{(\mu_{m+1},\nu_{m+1}),\cdots,(\mu_n,\nu_n)\}$이다. 그러면 (3.1)과 (3.2)式에 의해서 다음이 성립한다. 모든 $i=1,\cdots,m$에 대하여,

$$\int_X u(x)\,d\mu_i(x)>\int_X u(x)\,d\nu_i(x).$$

모든 $i=m+1,\cdots,n$에 대하여,

$$\int_X u(x)\,d\mu_i(x)=\int_X u(x)\,d\nu_i(x).$$

그런데 적어도 하나의 $i=1,\cdots,m$에 대하여 $\lambda_i>0$이므로,

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i\int_X u(x)\,d\mu_i(x)>\sum_{i=1}^n\lambda_i\int_X u(x)\,d\nu_i(x)$$

이다. 이제 $\mu=\sum_{i=1}^n\lambda_i\mu_i$, $\nu=\sum_{i=1}^n\lambda_i\nu_i$로 정의하자. 그러면

$$\int_X u(x)\,d\mu(x)>\int_X u(x)\,d\nu(x)$$

이며, 이것은 $\mu=\nu$라는 사실에 모순이다.

역을 증명하기 위해서,

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i\mu_i=\sum_{i=1}^n\lambda_i\nu_i$$

이며, 적어도 하나의 $i=1,\cdots,m$에 대하여 $\lambda_i>0$를 만족시키는 확률측도 $\lambda=(\lambda_1\cdots,\lambda_n)$은 존재하지 않는다고 가정하자. 단, 여기서 $S=\{\mu_1,\nu_1),\cdots,(\mu_m,\nu_m)\}$이고, $I=\{(\mu_{m+1},\nu_{m+1}),\cdots,(\mu_n,\nu_n)\}$이다. 그리고 각 $i=1,\cdots,n$에 대해서 $\theta_i=\mu_i-\nu_i$로 정의하자. 附錄의 補助定理A.4에 의하면, 모든 $i=1,\cdots,m$에 대하여,

$$\int_X u(x)\,d\theta_i(x)>0$$

이며, 모든 $i=m+1,\cdots,n$에 대하여,

$$\int_X u(x)\,d\theta_i(x)=0$$

인 可測函數 $u:X\to R$이 존재한다. 즉, 모든 $i=1,\cdots,m$에 대하여,

$$\int_X u(x)\,d\mu_i(x)>\int_X u(x)\,d\nu_i(x)$$

이며, 모든 $i=m+1,\cdots,n$에 대하여,

$$\int_X u(x)\,d\mu_i(x)=\int_X u(x)\,d\nu_i(x)$$

인 가측함수 $u: X \to R$이 存在한다. 다시 말하면, 모든 $(\mu, \nu) \in S$에 대하여,

$$\int_X u(x)\,d\mu(x) > \int_X u(x)\,d\nu(x)$$

이며, 모든 $(\mu, \nu) \in I$에 대하여,

$$\int_X u(x)\,d\mu(x) = \int_X u(x)\,d\nu(x)$$

인 가측함수 $u: X \to R$이 存在한다. 이 사실은 선택상응 c가 期待效用合理的임을 의미한다. ▨

만약 c가 선택함수라면, 選擇行爲는 다음의 따름定理 2와 같이 훨씬 간단하게 특징지워질 수 있다.

따름定理2 : 다음의 가정 (1)～(4)가 만족된다고 하자.

(1) X는 緊密集合이다.

(2) T는 有限集合이다.

(3) 選擇相應 c는 選擇函數이다.

(4) 각 $t \in T$에 대하여, B_t는 c_t, r_t의 두 元素로 이루어진다. 즉, $B_t = \{c_t, r_t\}$. 그러면

$$\sum_{t \in T} \lambda_t c_t = \sum_{t \in T} \lambda_t r_t$$

를 만족시키는 確率測度 $\lambda = (\lambda_t)_{t \in T}$가 존재하지 않는다는 것이 선택함수 c가 期待效用合理的이기 위한 必要充分條件이다.

證明 : 각 $t \in T$에 대하여 집합 c_t와 집합 $B_t - c_t \equiv r_t$가 모두 하나의 원소로 이루어진 집합이므로, 集合 S의 원소개수는 添字集合 T의 원소개수와 같다. 따라서, $(\mu, \nu) \in S$이면, 적어도 하나의 $t \in T$에 대하여 $\mu = c_t$ 이며, $\nu = r_t$이다. 또한 각 $t \in T$에 대하여 集合 c_t는 하나의 원소로 구성되어 있으므로, $(\mu, \nu) \in I$이면 $\mu = \nu$이다. 그러므로, 定理1의 期待效用合理的이기 위한 조건 안의 등식은

$$\sum_{t \in T} \lambda_t c_t = \sum_{t \in T} \lambda_t r_t$$

으로 된다. ▨

定理1과 따름定理2의 결론은 다음과 같이 해석될 수 있다. 만약 선택주체가 期待效用極大化를 하지 않았으면 외부 관찰자로서 적당한 가중치를 가지고 複合福券을 만들었을 때 선택된 복권으로부터 만든 복합복권이나 선택되지 못한 복권으로부터 만든 복합복권이나 동일한 복권이 된다는 것이다.

注意 1: Border(1989)에서는 賞을 화폐액으로 상정하고 있기 때문에 집합 X가 실수들의 緊密部分集合으로 가정하고 있다. 그러나 本論文에서는 집합 X를 임의의 緊密集合으로만 가정하고 있고 따라서 賞이 반드시 화폐액이 아닐 수도 있다.

注意 2: 따름定理2에 주어진 期待效用合理性을 규제해주는 조건은 현시선호의 강공리(SARP)보다 강한 조건이다. 그 이유는 다음과 같이 모순법을 사용하여 보일 수 있다. 만약 관찰된 選擇行爲가 SARP를 위배한다고 하자. 그러면

$$\begin{gathered}\mu_1\, S\, \mu_2\\ \mu_2\, S\, \mu_3\\ \vdots\\ \mu_n\, S\, \mu_1\end{gathered}$$

을 만족시키는 복권들 $\mu_1, \cdots, \mu_n$을 찾아낼 수 있다. 이제 確率測度 λ를 $(1/n, 1/n, \cdots, 1/n)$로 놓자. 그러면

(3.3) $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i + 1$$

이다. 단, $n+1=1$이다. (3.3)式은 따름定理2에 주어진 期待效用合理性을 규정해주는 조건에 위배된다.

4. 幾何學的 解釋

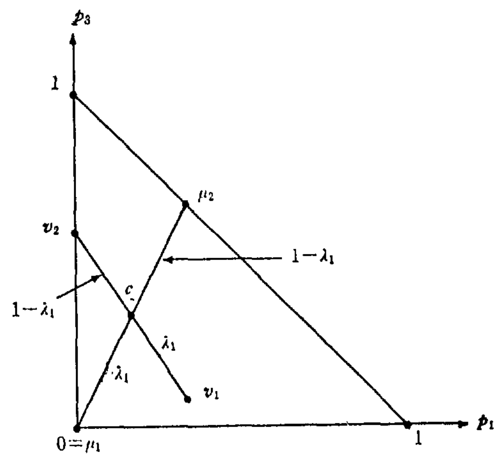
아래에 제시될 간단한 선택행위로부터 우리는 따름定理2의 期待效用合理性條件이 제시하는 흥미로운 幾何學的 意味를 볼 수 있다. 이제 X를 $\{x_1, x_2, x_3\}$로 놓자. 그러면 임의의 복권 μ는 X 위의 하나의 確率測度로 표시될 것이다. 그리고 다음과 같은 두 가지 選擇行爲가 관찰되었다고 하자.

觀察 1: 복권 μ_1과 ν_1이 모두 선택가능했을 때 복권 μ_1을 선택했다.

觀察 2: 복권 μ_2와 ν_2가 모두 선택가능했을 때 복권 μ_2를 선택했다.

이제 다음의 〈그림 1〉에서 0, 1, 1을 각 꼭지점으로 하는 삼각형을 고려해보자. 여기서 수평축은 賞 x_1을 받을 확률을, 수직축은 賞 x_2를 받을 확률을 나타낸다. 그러면 0, 1, 1을 각 꼭지점으로 하는 삼각형의 각 변들과 내부점들은 가능한 모든 복권들을 나타내게 되며, 따라서 각 꼭지점들은 賞 x_1, x_2, x_3중 하나를 확실히 받을 수 있는 복권을 의미하게 된다.

이제 두 번의 관찰에서 선택된 복권들 u_1과 u_2를 연결하는 직선과, 선택되지 못한 복권들 ν_1과 ν_2를 연결하는 직선을 고려해보자. 그리고 두 직선이 만나는 점이 있으면 그 점을 c로 표시하자. 따름定理2의 必要充分條件은, 두 직선이 만난다면 c點이 두 직선을 같은 比



〈그림 1〉

率 즉 $\lambda_1 : 1-\lambda_1$로 분할해서는 안된다는 것이다.

5. 例

다음의 예들은 期待效用合理的이지 못한 特定選擇行爲들을 통해서 定理1과 따름定理2에 함축된 의미를 보여주고 있다. 첫번째 例 1은 Kahneman and Tversky(1979)의 논문에 보고된 '알레의 逆說'에 대한 실험이다.

例 1(알레의 逆說) : 집합 X를 {2500달러, 2400달러, 0달러}로 놓아 세 종류의 賞을 받을 可能性이 있다고 하자. Kahneman and Tversky(1979)는 실험참가자들에게 먼저 복권 μ_1과 복권 ν_1 중 하나를 선택하게 했다. 복권 μ_1은 確率 1로서 2400달러를 주는 복권이며, ν_1은 0.33의 確率로 2500달러를 주고 0.66의 確率로 2400달러를 주며 0.01의 確率로 0달러를 주는 복권이다. 이 복권들을 편의상 다음과 같이 표시하자.

$$\mu_1 = [2500,\quad 0;\ 2400,\quad 1;\ 0,\quad 0]$$

$$\nu_1 = [2500,\ 0.33;\ 2400,\ 0.66;\ 0,\ 0.01].$$

다음으로 참가자들에게 다음과 같은 복권 μ_2와 ν_2 중 하나를 선택하게 했다.

$$\mu_2 = [2500,\ 0.33;\ 2400,\quad 0;\ 0,\ 0.67]$$

$$\nu_2 = [2500,\quad 0;\ 2400,\ 0.34;\ 0,\ 0.66].$$

Kahneman and Tversky(1979)에 의하면 61%의 참가자들이 첫번째 쌍에서는 μ_1을, 두번째 쌍에서는 μ_2를 선택했다는 것이다.

이 행위가 期待效用合理的이기 위해서는 세 實數 $u(0)$, $u(2400)$, $u(2500)$이 존재하여

$$u(2400)>0.33u(2500)+0.66u(2400)+0.01u(0)$$

$$0.33u(2500)+0.67u(0)>0.34u(2400)+0.66u(0)$$

의 두 부등식이 만족되어야 한다. 그러나 위의 두 부등식을 동시에 만족시키는 $u(0)$, $u(2400)$, $u(2500)$의 실수는 存在하지 않음을 쉽게 알 수 있다. 따라서, 이 행위는 期待效用極大化를 위배하게 된다.

반면, 위의 선택행위에 함축된 의미를 보기 위해 다음과 같은 상황을 고려해보자. 참가자들로 하여금 각 쌍의 복권들중에서 각각 1개의 복권을 선택하게 하고, 그 후 관찰자는 0.5의 確率로 두 쌍중 하나를 선택한다고 하자. 그러면 61%의 참가자들이 선택한 복권들로부터는

$$[2500,\ 0.165;\ 0.5;\ 0.335]$$

라는 복합복권이 만들어지나, 각 쌍에서 선택되지 못한 복권들로부터 각각 0.5의 確率로 만들어진 복합복권도 위의 복합복권과 동일해진다. 매우 類似한 現象이 '共通比率效果'로 알려진 실험에서도 나타난다.

例 2(共通比率效果) : Kahneman and Tversky(1979)의 다른 실험에서는 참가자들에게 다음과 같은 복권 μ_1과 ν_1 중에서 하나를 선택하게 만들었다.

$$\mu_1=[4000,\ \ 0;\ 3000,\ 1;\ 0,\ \ 0]$$

$$\nu_1=[4000,\ 0.8;\ 3000,\ 0;\ 0,\ 0.2].$$

다음으로 참가자들에게 다음의 복권 μ_2와 ν_2 중 하나를 선택하게 했다.

$$\mu_2=[4000,\ 0.2;\ 3000,\ \ 0;\ 0,\ 0.8]$$

$$\nu_2=[4000,\ \ 0;\ 3000,\ 0.25;\ 0,\ 0.75].$$

그런데 과반수 이상의 참가자들이 첫번째 쌍으로부터는 μ_1을, 두번째 쌍으로부터는 μ_2를 선택함이 보고되었다.

이와 같은 選擇行爲가 期待效用假說과 합치되기 위해서는 $u(0)$, $u(3000)$, $u(4000)$으로 표시되는 세 실수가 존재하여

$$u(3000)>0.8u(4000)+0.2u(0)$$

$$0.2u(4000)+0.8u(0)>0.25u(3000)+0.75u(0)$$

의 두 부등식을 만족시켜야 한다. 그러나 위의 두 부등식을 함께 만족시키는 $u(0)$, $u(3000)$, $u(4000)$은 存在하지 않음을 쉽게 알 수 있고, 따라서 과반수 이상의 참가자들의 選擇行爲는 期待效用極大化行爲라 할 수 있다.

반면, 첫번째 쌍으로부터 선택된 복권 μ_1을 0.2의 確率로 주고, 두번째 쌍으로부터 선택된 복권 μ_2를 0.8의 確率로 주는 複合福券 μ^c를 고려해보자. 그리고 첫번째 쌍에서 선택되지 못한 복권 ν_1을 0.2의 確率로, 두번째 쌍으로부터 선택되지 못한 복권 ν_2를 0.8의 確率로 주는 복합복권 ν^c를 고려해보자. 그러면 선택된 복권들로부터 만든 복합복권 μ^c와 선택되지 못한 복권들로부터 만든 複合福券 ν^c가 모두 같은 복권

〔4000, 0.16; 3000, 0.2; 0, 0.64〕

이 됨을 쉽게 알 수 있다.

附 錄

여기서는 본문의 主要定理들에서 사용된 補助定理들을 기술하고 증명하고자 한다. 다음의 補助定理 A.1은 X가 有限集合인 경우 'Theorem of Alternatives'로 알려진 정리이다. 단, 補助定理 A.1은 Theorem of Alternatives를 임의의 긴밀집합 X로 확장해주고 있다.

補助定理 A.1 : 이제 각 $i=1, \cdots, n$에 대해 μ_i를 緊密集合 X 위에 정의된 完全加法的 測度(countably additive measure)라 하자. 그러면 항상 다음의 두 조건 (1), (2)중 하나가 성립해야 하며, 두 條件이 동시에 성립할 수는 없다.

(1) 연속함수 $u: X \to R$이 存在하여, 각 $i=1, \cdots, m$에 대하여

$$\int_X u(x)\,d\mu_i(x) > 0$$

이며, 각 $i=m+1, \cdots, n$에 대하여

$$\int_X u(x)\,d\mu_i(x) \geq 0$$

이다. 혹은,

(2) 非陰의 실수 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$이 존재하여, 적어도 하나의 $i=1, \cdots, m$에 대하여 λ_i는 양수이며 모든 연속함수 $u: X \to R$에 대하여

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_X u(x)\,d\mu_i(x) \leq 0$$

이다.

證明 : (1)이 성립하면 (2)가 성립할 수 없음은 자명하다. 따라서 (1)이 성립하지 않는다고 가정하고 (2)가 성립함을 보이자. 이제 집합 C_1, C_2를 각각 $C_1 = \{z \in R^n$: 각 $i=1, \cdots, m$에 대하여 $\int_X u(x)\,d\mu_i(x) > z_i$이며, 각 $i=m+1, \cdots, n$에 대하여 $\int_X u(x)\,d\mu_i(x) = z_i$

인 연속함수 $u: X \to R$이 존재한다}, $C_2=\{z\in R^n$: 모든 $i=1,\cdots,n$에 대하여, $z_i\geq 0$이다} 로 정의하자. 이제 C_1과 C_2는 非空集合들이며 R^n의 볼록(convex)부분집합들임이 자명하다. 또한 (1)이 성립하지 않으므로, $C_1\cap C_2=\phi$이다. 따라서 分離超平面定理(separating hyperplane theorem) [Rockafellar(1970, 定理 20.2) 참조]에 의하면, $\lambda\in R^n$와 $\alpha\in R$이 존재하여 모든 $z\in C_1$에 대하여

$$\lambda z\leq\alpha$$

이며, 모든 $z\in C_2$에 대하여

$$\lambda z\geq\alpha$$

이며, 첫번째 부등식은 적어도 하나의 $z\in C_1$에 대해서는 强不等式으로 성립한다. 또한, 두번째 부등식은

$$\alpha\leq 0,\ \lambda\geq 0,\cdots,\ \lambda\geq 0$$

임을 의미한다. 그러므로 만약 $u: X\to R$이 연속함수이고 각 $i=1,\cdots,m$에 대하여 $\int_X u(x)\,d\mu_i(x)>z_i$이면, 첫번째 부등식으로부터

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i z_i+\sum_{i=m+1}^{n}\lambda_i\int_X u(x)\,d\mu_i(x)\leq\alpha$$

임을 알 수 있다. 따라서 모든 연속함수 $u: X\to R$에 대하여,

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_X u(x)\,d\mu_i(x)\leq\alpha$$

가 성립한다. 그러므로 모든 연속함수 $u: X\to R$에 대하여

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_X u(x)\,d\mu_i(x)\leq 0$$

이 만족된다.

이제 證明을 완성하기 위해서는 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$이 모두 0이 될 수는 없음을 보이기만 하면 된다. 이를 모순법으로 證明하기 위해, $\lambda_1=\cdots=\lambda_m=0$이라 해보자.

$u\equiv 0$인 경우 모든 $i=1,\cdots,n$에 대하여 $\int_X u(x)\,d\mu_i(x)\geq 0$이고 그러한 u에 대해서는

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_X u(x)\,d\mu_i(x)\geq 0$$

이다. 그러나 모든 연속함수 $u: X\to R$에 대하여

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_X u(x)\,d\mu_i(x)\leq\alpha\leq 0$$

이 성립해야 한다. 따라서 $\alpha=0$일 수 밖에 없다. 그런데 $u\to\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_X u(x)\,d\mu_i(x)$는 線形函數이므로 모든 연속함수 $u: X\to R$에 대하여

$$\text{(A.1)} \qquad \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_X u(x)\,d\mu_i(x)=0.$$

반면, 적어도 하나의 $z\in C_1$에 대해서는

$$\lambda z\leq\alpha$$

이며, $\lambda_1=\cdots=\lambda_m=0$으로 가정했으므로, 모든 연속함수 $u: X\to R$에 대하여

$$\lambda z=\sum_{i=m+1}^{n}\lambda_i\int_X u(x)\,d\mu_i(x)<0$$

이고, 이것은 (A.1)式과 모순이다. ▨

補助定理 A.2 : 이제 각 $i=1,\cdots,n$에 대해 μ_i를 緊密集合 X 위에 정의된 完全加法的 測度라 하자. 그러면 항상 다음의 두 조건 (1), (2)중 하나가 成立해야 하며, 두 條件이 동시에 성립할 수는 없다.

(1) 연속함수 $u: X\to R$이 存在하여, 각 $i=1,\cdots,m$에 대하여

$$\int_X u(x)\,d\mu_i(x)>0$$

이며, 각 $i=m+1,\cdots,n$에 대하여

$$\int_X u(x)\,d\mu_i(x)\geq 0$$

이다. 혹은,

(2) 非陰의 실수 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$이 存在하여, 적어도 하나의 $i=1,\cdots,m$에 대하여 λ_i는 양수이며,

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i=0$$

이다.

證明 : (1)이 성립하면 (2)가 成立할 수 없음을 쉽게 알 수 있다. 따라서, (1)이 성립하지 않는다고 가정하고 (2)가 成立함을 보이자. 그러기 위해서, 連續函數들의 집합 $C(X)$에서 실수들의 집합 R로의 함수 f를

$$f(u)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_X u(x)\,d\mu_i(x)$$

로 정의하자. 그러면 補助定理 A.1에 의하여, 모든 연속함수 $u: X\to R$에 대해서 $f(u)\leq 0$이다. 그런데 f는 線形函數이므로, 모든 연속함수 $u: X\to R$에 대하여 $f(u)=0$이 된다. 그러므로 모든 連續函數 $u: X\to R$에 대하여

$$f(u)=\int_X u(x)\,d(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i)(x)=0$$

이 성립하고, 이 사실은 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i=0$임을 의미한다.

補助定理 A.3 : 이제 각 $i=1,\cdots,n$에 대해 μ_i를 緊密集合 X 위에 정의된 完全加法的 測度라 하자. 그러면 항상 다음의 두 조건 (1), (2)중 하나가 성립해야 하며, 두 條件이 동시에 成立할 수는 없다.

(1) 연속함수 $u: X\to R$이 存在하여, 각 $i=1,\cdots,m$에 대하여

$$\int_X u(x)\,d\mu_i(x)>0$$

이며, 각 $i=m+1,\cdots,n$에 대하여

$$\int_X u(x)\,d\mu_i(x)=0$$

이다. 혹은,

(2) 실수 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$이 存在하여, 모든 $i=1,\cdots,m$에 대하여 $\lambda_i\geq 0$이며, 적어도 하나의 $i=1,\cdots,m$에 대하여 $\lambda_i>0$이며

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i=0$$

이다.

證明 : 조건 (1)은 다음의 (1′)와 동일함은 쉽게 알 수 있다.

(1′) 각 $i=1,\cdots,m$에 대하여

$$\int_X u(x)\,d\mu_i(x)>0$$

이며, 각 $i=m+1,\cdots,n$에 대하여

$$\int_X u(x)\,d\mu_i(x)\geq 0$$

이며, 각 $i=n+1,\cdots,2n-m$에 대하여

$$\int_X u(x)\,d\mu_i(x)\geq 0$$

을 만족시키는 연속함수 $u: X\to R$이 存在한다. 단, 각 $i=n+1,\cdots,2n-m$에 대하여 $\mu_i=\mu_{i-n+m}$이다.

(1)이 成立하면 (2)가 성립할 수 없음은 자명하다. 따라서, (1′)가 만족되지 않는다고 가정하고, 이 경우 (2)가 만족됨을 보이면 될 것이다. 補助整理 A.2에 의하면 非

陰의 실수 $\delta_1, \cdots, \delta_{2n-m}$이 존재하여, 적어도 하나의 $i=1, \cdots, m$에 대하여 $\delta_i>0$이며

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i\mu_i=0 \tag{A.2}$$

이 만족된다. 이제 각 $i=1, \cdots, m$에 대하여 $\lambda_i=\delta_i$로 그리고 각 $i=m+1, \cdots, n$에 대하여 $\lambda_i=\delta_i-\delta_{i+n-m}$으로 定義하자. 그러면 각 $i=1, \cdots, m$에 대하여 $\lambda_i\geq 0$이며, 적어도 하나의 $i=1, \cdots, m$에 대하여 $\lambda_i>0$이 된다. 또한 (A.2)式을 이용하면,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i&=\sum_{i=1}^{m}\delta_i\mu_i+\sum_{i=m+1}^{n}(\delta_i-\delta_{i+n-m})\mu_i\\&=\sum_{i=1}^{m}\delta_i\mu_i+\sum_{i=m+1}^{n}\delta_i\mu_i+\sum_{i=m+1}^{n}\delta_{i+n-m}\mu_{i+n-m}\\&=\sum_{i=1}^{m}\delta_i\mu_i+\sum_{i=m+1}^{n}\delta_i\mu_i+\sum_{i=n+1}^{2n-m}\delta_i\mu_i\\&=0\end{aligned}$$

이 成立하며 이 사실은 조건 (2)를 의미하게 된다. ▨

補助定理 A.4 : 이제 각 $i=1, \cdots, n$에 대해 μ_i를 緊密集合 X 위에 정의된 完全加法的 測度라 하자. 그러면 항상 다음의 두 條件 (1), (2)중 하나가 성립해야 하며, 두 條件이 동시에 成立할 수는 없다.

(1) 연속함수 $u: X\to R$이 존재하여, 각 $i=1, \cdots, m$에 대하여

$$\int_X u(x)\,d\mu_i(x)>0$$

이며, 각 $i=m+1, \cdots, n$에 대하여

$$\int_X u(x)\,d\mu_i(x)=0$$

이다. 혹은,

(2) 非陰의 실수 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$이 존재하여, 적어도 하나의 $i=1, \cdots, m$에 대하여 λ_i는 양수이며

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i=0$$

이다.

證明 : (1)이 성립하면 (2)가 成立하지 않음은 자명하다. 이제 (1)이 성립하지 않는다고 가정하고 (2)가 成立함을 보여보자. 補助定理 A.3에 의하면, 모든 $i=1, \cdots, m$에 대하여 $\lambda_i\geq 0$이며 적어도 하나의 $i=1, \cdots, m$에 대하여 $\lambda_i>0$이며

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i=0$$

인 실수 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$이 存在한다. 이제 모든 $i=m+1, \cdots, n$에 대하여 $\lambda_i \geq 0$임을 보이면 충분하다. 모순법으로, 적어도 하나의 $i=m+1, \cdots, n$에 대하여 $\lambda_i < 0$이라 하자. 그리고 $\lambda_i \geq 0$이면, $\nu_i = \mu_i$, $\delta_i = \lambda_i$로, $\lambda_i < 0$이면 $\nu_i = -\mu_i$, $\delta_i = -\lambda_i$로 ν_i와 δ_i를 각각 정의하자. 그러면 $\sum_{i=1}^{n} \delta_i \nu_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i = 0$이다. 그리고 ν_i는 補助定理 A.3의 前提條件들을 모두 만족시킨다. 그러므로 補助定理 A.3에 의하면 각 $i=1, \cdots, m$에 대하여

$$\int_X u(x)\, d\nu_i(x) > 0$$

이며, 각 $i=m+1, \cdots, n$에 대하여

$$\int_X u(x)\, d\nu_i(x) = 0$$

을 만족시키는 연속함수 $u: X \to R$이 存在한다. 그런데 각 $i=1, \cdots, m$에 대하여 $\nu_i = \mu_i$이므로, 각 $i=1, \cdots, m$에 대하여

$$\int_X u(x)\, d\mu_i(x) = \int_X u(x)\, d\nu_i(x) > 0 \tag{A.3}$$

이다. 또한 각 $i=m+1, \cdots, n$에 대하여 $\nu_i = \mu_i$ 혹은 $-\mu_i$이므로, 각 $i=m+1, \cdots, n$에 대하여

$$\int_X u(x)\, d\mu_i(x) = \int_X u(x)\, d\nu_i(x) = 0 \tag{A.4}$$

이다. (A.3), (A.4)式은 조건 (1)을 意味하며, 이는 (1)이 성립하지 않는다는 假定에 모순이다. ▨

注意: 補助定理 A.4의 (2)에서

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

이 되도록 λ_i를 선택할 수 있으며, 따라서, $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$은 添字集合(index set) $\{1, \cdots, n\}$ 위에 정의된 確率測度가 된다.

서울大學校 國際經濟學科 助敎授
151-742 서울 관악구 신림동
전화: (02) 880-6396
팩시: (02) 888-4454

參 考 文 獻

Border, K.C. (1989): "Revealed Preference, Stochastic Dominance, and the Expected Utility

Hypothesis," manuscript.

Green, R., and S. Srivastava (1986): "Expected Utility Maximization and Demand Behavior," *Journal of Economic Theory*, **38**, 313～323.

Kahneman, D., and A. Tversky (1979): "Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk," *Econometrica*, **47**, 263～291.

Kim, T. (1990): "The Subjective Expected Utility Hypothesis and Revealed Preference," manuscript.

Richter, M.K. (1966): "Revealed Preference Theory," *Econometrica*, **34**, 635～645.

__________ (1975): "Rational Choice and Polynomial Measurement Theory," *Journal of Mathematical Psychology*, **12**, 99～113.

Rockafellar, T. (1970): *Convex Analysis*, Princeton University Press.

Shapiro, L. (1979): "Conditions for Expected Utility Maximization: The Finite Case," *The Annals of Statistics*, **7**, 1288～1302.

Varian, H. (1983): "Nonparametric Tests of Models of Investor Behavior," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **18**, 269～278.