公共財經濟의 安定的 配分制度

金 泰 成[(1)]

公共財經濟에서 내쉬(Nash)均衡의 결과로 린달(Lindahl)配分을 실현시켜 주는 간단한 제도가 이 논문에서 제시되고 있다. 준선형 효용함수의 가정하에서 이 제도의 물매過程(gradient process)은 이 제도의 내쉬균형을 안정적으로 실현되게 해준다. 또한 이 조정과정은 全域的으로 安定的이며 따라서 이 제도의 균형이 동태적으로 어떻게 실현될 수 있는가가 이 논문에서 보여지고 있다.

1. 序 論

公共財가 존재하는 경제에서 각 개인들이 자신의 이익만을 추구하게 되면 어떠한 제도(mechanism)하에서도 파레토最適配分의 實現이 불가능하다고 1970년대 중반에 이르기까지 믿어져 왔다. 이에 그로브스(T. Groves)와 레드야드(J. Ledyard)는 그들의 1977년 논문을 통하여 개인들의 利益追求行爲를 주어진 제도하에서 내쉬均衡戰略의 選擇으로 모형화한다면 파레토最適의 配分을 실현시켜 주는 제도가 존재함을 보여주어 종래의 믿음을 발전시켰다. 그러나 그로브스와 레드야드가 제시한 制度를 사용하면, 실현된 均衡配分에서 어떤 참가자는 이 제도가 없을 때보다 厚生이 떨어지게 되어 이 제도에 참가할 '誘因'을 잃어버리게 된다. 이러한 短點을 지닌 그로브스와 레드야드制度의 대안으로서 Hurwicz(1979)와 Walker(1981)가 새로운 制度들을 각각 제시하였는데, 이 제도들에서는 실현된 '내쉬均衡配分'이 파레토最適일 뿐 아니라, 정확히 린달配分이며 따라서 그로브스와 레드야드制度의 단점을 극복하고 있다.

이와 같이 경제주체들의 自己利益追求行爲를 내쉬균형으로 모형화하는 이론들은, 특별히 優越戰略均衡(dominant strategy equilibrium)이 존재하는 경우, 혹은 경제주체들이 다른 주체들의 經濟環境(economic environment)에 대해 '완전한 情報'를 가지고 있는 경우를 제외하고는, 자신의 내쉬균형전략을 계산해낼 수 없다는 점에서 批判을 받아왔다. 대부분의 경우 각 경제주체의 다른 주체들의 경제환경에 대한 情報가 不完全하다는 점이나, 워커의 1980년 논문에서 보인 바와 같이, 항상 優越戰略均衡을 가지는 제도들에서는 公共財의 파

(1) 본연구는 1989년도 서울대학교 발전기금의 支援 아래 이루어졌다. 이 자리를 빌어 감사를 표한다.

레토最適配分의 실현이 불가능하다는 점을 감안하면 위의 비판은 뚜렷한 근거를 갖고 있다. 그러나 이러한 내쉬均衡을 Hurwicz(1972)의 논문에서처럼 어떤 分權化된(decentralized) '戰略調整過程'의 定常點(stationary point)으로 해석해 볼 수도 있다. 이 때 이러한 내쉬균형의 해석이 의미를 가지기 위해서는 고려하고 있는 戰略調整過程의 定常點이 제도의 내쉬균형과 일치해야 함은 물론 이 定常點이 동시에 安定的이어야 한다.

종래의 公共財 배분제도에 대한 연구들은 均衡配分의 最適性, 誘因 여부 등 주로 靜態的 측면에만 치중함으로써 균형의 안정성과 같은 動態的 측면을 무시하고 있다. 그러나 경제모형을 통해서 현실적 經濟現狀을 설명하고자 할 때, 이러한 均衡이 시간의 흐름에 따라 어떻게 성취되는가 하는 균형의 安定性 與否는 매우 중요한 문제가 된다. 이러한 관점에서 볼 때, 위에서 제시한 허위쯔나 워커의 制度들은 그 내쉬均衡들이 매우 불안정하다는 점을 쉽게 보일 수 있기에, 動態的 側面에서 결점을 내포하고 있다. 하지만 이미 본저자의 다른 論理〔Kim(1987)〕에서 지적했듯이, 내쉬균형의 不安定性은 허위쯔나 워커의 제도들에 국한된 것이 아니라, 내쉬均衡을 통해 린달配分을 실현시켜 주는 어떠한 公共財 配分制度를 고려하더라도 제거되기는 어렵다. 따라서 내쉬균형의 不安定性은 특정 제도의 성격보다는 린달배분 자체에 기인한다고 볼 수 있다. 이러한 全般的인 내쉬均衡의 不安定性 문제는 내쉬균형을 통한 린달배분의 실현과 내쉬균형의 안정성을 동시에 얻기 위해서는 고려대상의 경제환경을 制限시켜야만 한다는 점을 시사해 주고 있다.

이러한 經濟環境의 制限은 균형의 안정성 문제가 아니더라도 이미 公共財 이론에서 많이 채택되는 가정이었다. 예를 들어, 공공재 연구에 대한 초기 문헌에서는 파레토最適인 공공재 수준이 마치 私的財(private good)의 配分과는 독립적으로 결정될 수 있는 것처럼 취급했었다. 그러나 Samuelson(1969)은 파레토最適인 公共財 水準은 일반적으로는 私的財의 배분과 獨立的으로 決定될 수 없음을 밝힘과 동시에, x_i와 y가 각각 소비자 i의 私的財 소비량과 公共財 소비량을 나타낸다면 소비자 i의 선호체계가 $x_i+V_i(y)$라는 형태의 效用函數로 표현이 가능한 경우에 한하여, 파레토最適인 公共財 수단은 私的財 配分과는 獨立的으로 결정될 수 있음을 보여주었다. 이와 같이 제한된 경제환경을 흔히 準線形(quasi-linear) 경제환경이라 하며, 공공재 배분제도에 대한 그간의 많은 연구는 경제환경에 대해서 準線形 假定을 채택했었다〔예를 들어, Groves(1979), Trunchon(1984) 등〕. 그러나 이와 같이 제한된 準線形 經濟環境下에서도 앞에서 언급된 허위쯔나 워커의 제도들은 여전히 불안정적 내쉬均衡을 가짐을 보일 수 있다.

따라서 이 논문에서는 내쉬균형의 결과로서 린달配分을 실현시켜 주는 새로운 배분제도를

소개하고자 한다. 이 새로운 제도하에서는 적어도 경제환경이 準線形으로 제한되면, 내쉬均衡이 安定的임을 보일 수 있다. 구체적으로 각 소비자 i의 選好體系가 $x_i+V_i(y)$라는 형태의 準線形效用函數로 표현될 수 있을 때, 각 소비자들이 물매過程을 통해 자신들의 戰略을 調整하면 새로운 제도의 내쉬균형은 安定的일 뿐 아니라 全域的으로 安定的(globally stable)임을 이 논문에서 보이고자 한다.

앞에서도 언급했듯이, 내쉬균형의 결과로써 파레토最適인 配分을 실현시키는 制度가 존재함은 이미 알려져 있다〔Groves and Ledyard(1977), Hurwicz(1979), Walker(1981)〕. 그러나 優越戰略 내쉬均衡이 항상 존재하는 제도만을 고려하게 되면, 이 제도의 균형으로 실현되는 배분이 항상 파레토最適이 될 수는 없다는 것 또한 알려져 있다〔Walker(1980)〕. 따라서 파레토最適의 배분을 실현시켜 주는 제도들의 내쉬均衡이 어떻게 성취될 수 있는가 하는 점이 의문시되어 왔는데, 본논문에서는 내쉬均衡의 결과로써 린달配分이 실현되는 제도를 제시하고, 이 제도의 내쉬均衡이 安定的임을 보임으로써, 위 의문에 대한 답을 제공하고자 한다.

이를 위한 본논문구성은 다음과 같다. 먼저 第2節에서는 公共財가 있는 경제환경들을 정의하고, 第3節에서는 내쉬均衡의 결과로써 린달配分을 실현시켜 주는 새로운 제도를 소개한다. 그리고 '戰略調整過程'과 均衡의 '安定性'의 개념 등을 第4節에서 정의하고 이 논문의 주요 정리중 하나인 '安定性定理'는 第5節에서 보이고자 한다. 마지막으로, 第6節에서는 간단한 結論을 내리기로 한다.

2. 公共財 經濟環境

이 연구에서는 x로 표시되는 하나의 私的財, y로 표시되는 하나의 公共財, 그리고 n명의 消費者가 존재하는 경제를 고려한다. 물론 이 논문의 모든 결과는 여러 종류의 공공재가 존재하는 경제에도 쉽게 일반화될 수 있다. 각 소비자 i는 移行的(transitive)이며 完全的(complete)인 選好體系 $\succsim_i$를 가지고 있으며, 각 소비자의 선호는 私的財 x에 대하여 强單調的으로 증가함을 가정한다. 또한 각 소비자 i는 초기부존자원으로 ω_i^x만큼의 私的財를 가지고 있으며, 公共財는 가지고 있지 않다고 한다. 그러나 公共財는 私的財를 사용하여 생산될 수 있으며 그 생산기술은 規模收益不變(constant returns to scale)이고 따라서 $y=\frac{1}{\beta}x$라는 생산함수로 생산기술이 표시된다(여기서 β는 임의의 양수). 앞으로 이 논문에서 자주 사용되는 '경제환경'들의 집합, E_i, E, E^Q 등을 다음과 같이 정의하자.

定義1 : $E_i=\{(\underset{i}{\succsim}, \omega_i^x)$: $\succsim$는 移行的, 完全的 選好體系이며, 私的財 x에 대해 강단조증가하며, ω_i^x는 양수이다$\}$로 E_i를, $E=\prod_{i=1}^{n}E_i$로 E를 정의한다. 그러면 소비자 i의 특성은 E_i의 한 원소 e_i로 규정되며, E의 한 원소 $e=(e_i)_{i=1}^n$는 어떤 한 경제환경을 규정해 준다.

定義2 : $E^Q=\{(\underset{i}{\succsim}, \omega_i^x)_{i=1}^n\in E$: 각 소비자 i의 選好體系 $\underset{i}{\succsim}$는 $x_i+V_i(y)$라는 효용함수로 표현되고, 모든 양수 y에 대하여 $DV_i(y)>0$이며 $D^2V_i(y)<0$이다$\}$로 '準線形 經濟環境' E^Q를 정의한다. 단, D^k는 k계 도함수를 나타낸다. $DV_i(y)>0$이라는 것은 선호체계의 강단조성을 의미하며, $D^2V_i(y)<0$이라는 것은 效用函數가 强準오목함수(strictly quasi-concave)라는 사실과 밀접한 관계를 가지고 있다.

3. 린달配分을 實現시켜 주는 制度

린달配分을 내쉬均衡의 결과로 실현시켜 주는 제도로서 허위쯔의 제도와 워크의 제도가 이미 문헌에 소개된 바 있는데, 本節에서는 그 대안으로서 새로운 制度를 소개하고자 한다. 본절의 새로운 제도하에서는 아래의 定理1에서 보여주듯이 허위쯔나 워커의 제도들 처럼 린달配分이 내쉬均衡의 결과로써 실현된다. 그러나 이 제도는 다른 제도들과는 달리, 均衡의 安定性이라는 바람직한 측면을 가지고 있다. 즉, 앞으로 定理2에서 밝히듯이, 각 소비자들이 물매過程을 통해 자신들의 전략을 조정하면, 準線形 경제환경에서 이 제도의 내쉬균형은 全域的으로 安定的이다. 이제 새로운 제도를 다음과 같이 정의하자.

定義3 : 消費者 i의 戰略空間(strategy space)을 R^2라 하고, 소비자 i의 전략공간의 대표원소 즉 전략을$(m_i, z_i)\in R\times R$로 표시한다. 각 소비자 i가 (m_i, z_i)를 자신의 전략으로 선택할 때, 公共財 수준을 決定해 주는 결과함수(outcome function)는

$$Y(m, z)=\sum_{k=1}^{n}z_k$$

로 소비자 i가 추가로 얻게되는 私的財의 양을 결정해 주는 결과함수는

$$X_i(m, z)=-P_i(m, z)\ Y(m, z)-\frac{1}{2}\Big(m_i-\sum_{k=1}^{n}z_k\Big)^2$$

로 정의한다. 단, 여기서 $P_i(m, z)=\frac{1}{n}\beta-\sum_{k\neq i}z_k+\frac{1}{n}\sum_{k\neq i}m_k$, $m=(m_1, m_2, \cdots, m_n)$이며 $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)$이다.

결과함수의 값 $Y(m, z)$는 소비자들이 (m, z)라는 戰略을 선택할 경우 공급될 公共財의 量, 그리고 $X_i(m, z)$는 같은 경우에 있어서 소비자 i가 추가로 얻게 되는 私的財의 量에 해

당된다. 소비자 i의 전략중 z_i는 다른 消費者들이 함께 요구한 公共財에다 소비자 i가 추가로 늘리고자(혹은 줄이고자) 하는 公共財의 量으로 해석될 수 있다. 소비자 i가 최적으로 여기는 공공재의 양이 다른 사람들이 함께 요구한 量보다 적을 수도 있으므로 戰略 z_i는 陰의 값도 허용된다. 소비자 i의 전략중 m_i는 公共財 水準에 대한 소비자 i의 제안으로 해석할 수 있다. 이 제도하에서는 m_i와 $\sum_{k=1}^{n} z_k$가 다르면 그 차이의 제곱, 즉 $(1/2)(m_i-\sum_{k=1}^{n} z_k)^2$만큼의 私的財를 벌금으로 지불하게 된다. 또한 (m_i, z_i)를 선택함으로써 消費者 i는 公共財 水準 $Y(m, z)$를 변화시킬 수 있지만, 공공재 단위당 $P_i(m, z)$만큼의 價格을, 그리고 $(1/2)(m_i-\sum_{k=1}^{n} z_k)^2$ 만큼의 벌금을 지불한다. 소비자 i는 자기자신의 戰略選擇(m_i, z_i)으로써 $P_i(m, z)$에 영향을 줄 수는 없으므로, 합리적인 소비자들은 均衡에서 $\sum_{k=1}^{n} z_k$와 동일한 m_i를 선택할 것이다. 그러므로 $P_i(m, z)$를 公共財에 대한 소비자 i의 稅率, $\omega_i^x+X_i(m, z)$를 소비자 i의 私的財 消費量으로 볼 수 있다.

定義4 : 주어진 경제환경 $e=(\underset{i}{\gtrsim}, \omega_i^x)_{i=1}^n$에서 내쉬均衡은 다음의 조건을 만족시키는 전략 $(\bar{m}, \bar{z})$로 정의된다. 모든 $(m_i, z_i)\in R^2$에 대해서,

$$[\omega_i^x+X_i(\bar{m}, \bar{z}),\quad Y(\bar{m}, \bar{z})]\underset{i}{\lesssim}[\omega_i^x+X_i(\bar{m}_{-i}, \bar{z}_{-1}, m_i, z_i),\quad Y(\bar{m}_{-i}, \bar{z}_{-i}, m_i, z_i)]$$

이다. 단, $m_{-i}=(m_1, m_2, \cdots, m_{i-1}, m_{i+1}, \cdots, m_n)$.

이제 定義3의 제도하에서는 내쉬均衡의 결과로서 린달配分이 실현됨을 定理1을 통해 보일 수 있다.

定理1 : 만약 전략 $(\bar{m}, \bar{z})$가 어떤 경제환경 $e\in E$에서 定義3의 제도의 내쉬균형이라면, $[(P_i(\bar{m}, \bar{z}),\ \omega_i^x+X(\bar{m}, \bar{z}))_{i=1}^n,\ Y(\bar{m}, \bar{z})]$는 경제환경 e에서의 린달균형이 된다. 여기서 $P_i(\bar{m}, \bar{z})$는 소비자 i가 지불하는 公共財의 린달價格이다. 그리고 만약 $[(\bar{P}_i, \bar{X}_i)_{i=1}^n, \bar{Y}]$가 경제환경 $e\in E$에서의 린달均衡이라면, 이 경제환경 e에서 定義3의 제도의 내쉬均衡$(\bar{m}, \bar{z})$가 존재하여 $Y(\bar{m}, \bar{z})=\bar{Y}$, $\omega_i^x+X_i(\bar{m}, \bar{z})=\bar{X}_i$, $P_i(\bar{m}, \bar{z})=\bar{P}_i$라는 조건을 만족시킨다.

證明 : 먼저 첫번째 命題를 증명하기 위해서 $(\bar{m}, \bar{z})$를 경제환경 $e=(\underset{i}{\gtrsim}, \omega_i^x)_{i=1}^n$에서의 내쉬均衡이라고 하자. 그러면 각 소비자 i에 대해서, 또한 어떤 實數 m_i에 대해서도,

$$[\omega_i^x+X_i(\bar{m}, \bar{z}),\quad Y(\bar{m}, \bar{z})]\underset{i}{\gtrsim}[\omega_i^x+X_i(\bar{m}_{-i}, m_i, \bar{z}),\quad Y(m_{-i}, m_i, \bar{z})]$$

가 성립한다. 소비자 i의 私的財의 量을 결정해 주는 $X_i(m, z)$의 형태를 고려할 때, 각 소비자 i의 선호가 私的財 x에 대해 强單調性을 만족시키므로 소비자 i에 대해

$$\bar{m}_i=\sum_{k=1}^{n}\bar{z}_k \tag{3.1}$$

임을 의미한다. 따라서,

(3.2) $$X_i(\bar{m},\bar{z})=-P_i(\bar{m},\bar{z})\,Y(\bar{m},\bar{z})$$

이다. 이제 私的財를 單位財(numeraire)로 삼고 $P_i(\bar{m},\bar{z})$를 소비자 i가 지불하는 공공재의 린달價格으로 놓으면, 소비량의 組合 $[\omega_i^x+X_i(\bar{m},\bar{z}),\ Y(\bar{m},\bar{z})]$은 소비자 i의 예산제약을 충족시킨다. 이제 소비량의 조합 $[\omega_i^x+X_i(\bar{m},\bar{z}),\ Y(\bar{m},\bar{z})]$이 예산제약하에서 소비자 i의 選好를 極大化시킴을 보이자. $(\bar{m},\bar{z})$가 내쉬균형이므로, (3.2)式을 이용하면, 각 소비자 i와 모든 實數 m_i, z_i에 대해서,

$$[\omega_i^x-P_i(\bar{m},\bar{z})\,Y(\bar{m},\bar{z}),\quad Y(\bar{m},\bar{z})]$$
$$\succsim_i[\omega_i^x-P_i(\bar{m}_{-i},\bar{z}_{-i},m_i,z_i)\,Y(\bar{m}_{-i},\bar{z}_{-i},m_i,z_i)-\frac{1}{2}(m_i-z_i-\sum_{k\neq i}\bar{z}_k)^2,\quad Y(\bar{m}_{-i},\bar{z}_{-i},m_i,z_i)]$$

가 성립한다. 따라서 (m_i,z_i)를 $(Y,\ Y-\sum_{k\neq i}\bar{z}_k)$로 대치하면, 어떠한 실수 Y에 대해서도

$$[\omega_i^x-P_i(\bar{m},\bar{z})\,Y(\bar{m},\bar{z}),\quad Y(\bar{m},\bar{z})]\succsim_i[\omega_i^x-P_i(\bar{m},\bar{z})\,Y,\ Y]$$

이 만족되고, 이로부터 소비량 조합$[\omega_i^x+X_i(\bar{m},\bar{z}),\quad Y(\bar{m},\bar{z})]$는 $X+P_i(\bar{m},\bar{z})\,Y=\omega_i^x$라는 예산제약식을 충족시키는 消費量 組合$(X, Y)$중 소비자 i에게 最大의 效用을 줌을 알 수 있다. 그리고 (3.1), (3.2) 두 式으로부터,

$$\sum_{i=1}^{n}X_i(\bar{m},\bar{z})+\beta Y(\bar{m},\bar{z})=0$$

이 성립하므로, 配分$[(\omega_i^x+X_i(\bar{m},\bar{z}))_{i=1}^n,\quad Y(\bar{m},\bar{z})]$는 실현가능한(feasible) 배분이다. 따라서 $[(P_i(\bar{m},\bar{z}),(\omega_i^x+X_i(\bar{m},\bar{z}))_{i=1}^n,\quad Y(\bar{m},\bar{z})]$는 린달균형이 된다.

두번째 命題를 증명하기 위해서, $[(\bar{P}_i,\bar{X}_i)_{i=1}^n,\bar{Y}]$를 경제환경 $e=(\succsim_i,\omega_i^x)_{i=1}^n$에서의 린달均衡이라 하자. 그리고 $(\bar{m},\bar{z})$를 다음과 같이 정의하자.

$$\bar{m}_i=\bar{Y},\quad \forall i=1,2,\cdots,n$$

(3,3) $$\bar{z}_1+\bar{z}_2+\cdots+\bar{z}_n=\bar{Y}$$

$$-\sum_{k\neq i}\bar{z}_k=\bar{P}_i-\frac{1}{n}\beta-\frac{1}{n}\sum_{k\neq i}\bar{m}_k,\quad \forall i=1,2,\cdots,n-1$$

그러면 $(\bar{m}_1,\bar{m}_2,\cdots,\bar{m}_n,\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_n)$는 위 조건으로부터 유일하게 결정된다. 그런데 $[(\bar{P}_i,\bar{X}_i)_{i=1}^n,$ $\bar{Y}]$는 린달均衡이므로,

$$[\omega_i^x-\bar{P}_i\bar{Y},\bar{Y}]\succsim_i[\omega_i^x-\bar{P}_iY,\ Y]$$

라는 관계가 모든 실수 Y에 대해서 성립해야 한다. 이제 Y를 $z_i+\sum_{k\neq i}\bar{z}_k$로 대체하여 보자. 그러면 각 소비자 i에게 있어서,

(3.4) $$[\omega_i^x-\bar{P}_i\bar{Y},\bar{Y}]\succsim_i[\omega_i^x-\bar{P}_i(z_i+\sum_{k\neq i}\bar{z}_k),\quad z_i+\sum_{k\neq i}\bar{z}_k]$$

의 관계가 모든 실수 z_i에 대해서 성립한다. 그런데 私的財 x에 대해서 선호가 强單調的이므로, 모든 m_i에 대해서,

$$(3.5)\qquad [\omega_i^x-\bar{P}_i(z_i+\sum_{k\neq i}\bar{z}_k),\ z_i+\sum_{k\neq i}\bar{z}_k]$$
$$\underset{i}{\gtrsim}[\omega_i^x-\bar{P}_i(z_i+\sum_{k\neq i}\bar{z}_k)-\frac{1}{2}(m_i-z_i-\sum_{k\neq i}\bar{z}_k)^2,\ z_i+\sum_{k\neq i}\bar{z}_k]$$

이다. (3.4), (3.5)式에 의해 모든 실수 m_i, z_i에 대해서,

$$(3.6)\qquad [\omega_i^x-\bar{P}_i\bar{Y},\bar{Y}]\underset{i}{\gtrsim}[\omega_i^x-P_i(z_i+\sum_{k\neq i}\bar{z}_k)-\frac{1}{2}(m_i-z_i-\sum_{k\neq i}\bar{z}_k)^2,\ z_i+\sum_{k\neq i}\bar{z}_k]$$

의 관계가 성립한다. 그런데 (3.3)式에 의하면,

$$\bar{Y}=\sum_{k=1}^{n}\bar{z}_k=Y(\bar{m},\bar{z})$$

$$(3.7)\qquad \bar{P}_i=\frac{1}{n}\beta-\sum_{k\neq i}\bar{z}_k+\frac{1}{n}\sum_{k\neq i}\bar{m}_k=P_i(\bar{m}_{-i},\bar{z}_{-i},m_i,z_i)$$
$$(\bar{m}_i-\sum_{k=1}\bar{z}_k)^2=0,\quad \forall i=1,2,\cdots,n.$$

이다. 그러므로 (3.6), (3.7)式에 의하여, 모든 실수 m_i, z_i에 대해서

$$[\omega_i^x-P_i(\bar{m},\bar{z})Y(\bar{m},\bar{z})-\frac{1}{2}(\bar{m}_i-\sum_{k=1}^{n}\bar{z}_k)^2,\ Y(\bar{m},\bar{z})]$$
$$\underset{i}{\gtrsim}[\omega_i^x-P_i(\bar{m}_{-i},\bar{z}_{-i},m_i,z_i)Y(\bar{m}_{-i},\bar{z}_{-i},m_i,z_i)-\frac{1}{2}(m_i-z_i-\sum_{k\neq i}\bar{z}_k)^2,$$
$$Y(\bar{m}_{-i},\bar{z}_{-i},m_i,z_i)]$$

이다. 따라서 $(\bar{m},\bar{z})$는 定義3의 制度의 내쉬均衡이며, 이 내쉬均衡에서는

$$Y(\bar{m},\bar{z})=\bar{Y},\quad \omega_i^x+X_i(\bar{m},\bar{z})=\bar{X}_i,\quad P_i(\bar{m},\bar{z})=\bar{P}_i$$

가 성립한다. ▨

따름定理1 : 定義3의 제도의 내쉬均衡과 린달均衡 사이에는 일 대 일 대응관계가 있다.

證明 : $(m_i,z_i)_{i=1}^n$를 내쉬균형이라 하자. 그러면 린달가격 $(P_i)_{i=1}^n$과 公共財 水準 y는 다음 식을 통해 결정된다.

$$y=\sum_{k=1}^{n}z_k$$
$$P_i=\frac{1}{n}\beta-\sum_{k\neq i}z_k+\frac{1}{n}\sum_{k\neq i}m_k,\quad \forall i=1,2,\cdots,n.$$

반대로 $[(P_i)_{i=1}^n, y]$를 각 소비자가 직면하는 린달價格들과 공공재 수준이라 하자. 그러면 定義3의 제도의 내쉬均衡$(m_i,z_i)_{i=1}^n$은 다음 $2n$개의 식에 의해서 결정된다.

$$m_i=y,\quad \forall i=1,2,\cdots,n.$$
$$\sum_{k=1}^{n}z_k=y$$
$$\sum_{k\neq i}z_k=P_i-\frac{1}{n}\beta-\frac{1}{n}\sum_{k\neq i}m_k=P_i-\frac{1}{n}\beta-\frac{n-1}{n}y,\quad \forall i=1,2,\cdots,n-1.$$

그리고 위 식들의 解$(m_i,z_i)_{i=1}^n$는 唯一하게 存在한다. ▨

이제 새로운 제도의 내쉬均衡의 安定性을 논의하기 위해서는, 각 소비자들의 戰略調整過程 및 均衡의 安定性에 대한 구체적인 정의들이 필요하다. 이들을 다음 節에서 다루고자

한다.

4. 戰略調整過程

본연구에서는 다음과 같은 의미의 情報分權化(informational decentralization) 가정을 충족하는 戰略調整過程을 그 분석대상으로 한다. 즉, 각 소비자 i는 자신의 전략 s_i를 調整함에 있어서 자신의 경제환경 e_i에 대해서는 정확한 情報를 가지고 있지만, 다른 소비자들의 경제환경 $(e_j)_{j\neq i}$에 대해서는 전혀 정보를 가지지 못하고 단지 그들의 戰略 $(s_j)_{j\neq i}$를 통해서만 정보를 類推할 수 있다. 따라서 소비자 i의 '戰略調整函數'는 소비자 i 자신의 경제환경 e_i와 각 소비자들이 選擇한 戰略 $s=(s_j)_{j=1}^{n}$만의 함수이다. 또한 내쉬均衡의 안정성을 논의하기 위해서, 제도의 내쉬均衡이 바로 戰略調整過程의 '定常點'이 되는 그러한 전략조정과정만을 본연구에서는 고려한다. 이제 이러한 전략조정과정을 정의해 보자.

定義5: 각 소비자 i의 전략집합 S_i는 R^{n_i}의 開部分集合(open subset)이며 여기서 n_i는 양의 정수이다. $S=\prod_{i=1}^{n} S_i$로 정의되며, 함수 $F_i: S\times E_i \rightarrow R^{n_i}$는 소비자 i의 戰略調整函數이다. 함수 F_i는 連續函數로, 그리고 각 $e_i \in E_i$에 대해서 함수 $F_i(\cdot\,;e_i): S\rightarrow R^{n_i}$는 C'로 가정하자. 소비자 i는

$$\frac{\partial s_i}{\partial t} \equiv \dot{S}_i = F_i(s\,;e_i)$$

를 통해서 자신의 戰略 s_i를 시간에 따라 변화시킨다. 따라서 경제환경 e와 초기전략 $s(0)$가 주어졌을 때 각 소비자들의 戰略調整函數들은

$$\dot{S} = F(s\,;e) \tag{4.1}$$

라는 미분방정식을 결정해 준다. 여기서 $F(s\,;e)=[F_1(s\,;e_1), \cdots, F_n(s\,;e_n)]$이다. 이러한 함수 F는 戰略調整過程이라 불린다.

함수 $(F_i)_{i=1}^{n}$에 대한 위의 가정들은 미분방정식 (4.1)이 초기조건 $s(0)$ 근방에서 유일한 局地的 解를 가지기 위한 충분조건이 된다[Coddington and Levinson(1955) 참조].

定義6: $F(s\,;e)=0$를 만족하는 戰略 s를 경제환경 e하에서의 미분방정식 (4.1)의 '定常點'이라 정의한다.

이제 전략조정과정의 全域的 安定性을 정의해 보자.

定義7: 함수 F를 戰略調整過程이라 하고 $s(e, s(0), t)$는 초기조건이 $s(0)$로 주어졌을 때

미분방정식 (4.1)의 시간 t에서의 해라고 하자. 그리고 경제환경 $\bar{e}$에서 전략조정과정 F의 유일한 定常點을 $\bar{s}$로 놓자. 이 때, 모든 초기조건 $s(0)\in S$에 대하여,

$$\lim_{t\to\infty} s(\bar{e},\ s(0),\ t)=\bar{s}$$

가 성립하면 F는 경제환경 $\bar{e}$에서 全域的으로 安定的이라 정의한다.

이제까지 전략조정과정이 情報分權化를 충족시켜야 함을 제외하고는 전략조정과정에 어떠한 '行態的 가정'도 부과하지 않았다. 그러나, 다음 節에서 취급되는 물매過程은 특정한 戰略調整行爲를 내포하는 것으로서, 이 물매過程下에서는 각 소비자들이 주어진 시간에 있어서 다른 소비자들의 전략들을 주어진 것으로 보고 자신의 效用을 極大化시키는 방향으로 자신의 戰略을 修正한다. 이와 같은 소비자들의 행태는 아주 자연스러운 戰略行爲라 할 수 있겠다.

물론 각 소비자들이 전략을 조정함에 있어 물매過程 외에 다른 戰略的 行爲를 상정해 볼 수도 있다. 그러나 모든 사람이 다 수긍할 수 있는 그러한 消費者의 戰略調整行態가 있는 것으로는 보이지 않는다. 優越戰略이 존재하는 특별한 상황을 제외하고는, 어떠한 형태의 전략조정행위도 의문의 여지가 있는 것으로 보인다. 따라서 어떤 형태의 戰略調整行爲가 더 적합한가는 理論的인 問題인 동시에 實證的 問題이다.

5. 準線形經濟에서의 全域的 安定性

이 節에서는 각 소비자들이 물매過程에 따라 전략을 조정하면, 준선형 경제환경하에서는 第3節에서 정의된 제도의 내쉬均衡이 全域的으로 安定的임을 보이고자 한다. 여기서 준선형 경제환경이란 각 소비자 i의 選好體系가 $x_i+V_i(y)$라는 형태의 效用函數로 표현될 수 있는 경제환경을 말하며, 이들의 집합을 E^Q로 표시하자. 각 개인들이 전략을 수정할 때 각자의 效用이 增加하는 방향으로 조정한다는 것은 매우 자연스러운 가정이다. 이러한 가정을 만족시키는 戰略調整過程중의 하나가 바로 물매過程이며 이는 다음과 같이 정의된다.

定義8: 第3節에서 정의된 制度의 물매過程은

$$\dot{m}_i=F_i(m, z; e_i)=\frac{\partial u_i}{\partial m_i}[\omega_i^x+X_i(m, z),\quad Y(m, z)],\quad \forall i=1, 2, \cdots, n$$

$$\dot{z}_i=F_{n+i}(m, z; e_i)=\frac{\partial u_i}{\partial z_i}[\omega_i^x+X_i(m, z),\ Y(m, z)],\quad \forall i=1, 2, \cdots, n$$

로 정의된다. 여기서 u_i는 소비자 i의 效用函數, (m_i, z_i)는 소비자 i의 전략, $X_i(m, z)$

와 $Y(m, z)$는 제도의 결과함수들이다. 이제 이 물매過程을 벡터形態로 표시하면,

$$\begin{pmatrix} \dot{m}_1 \\ \vdots \\ \dot{m}_n \\ \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{pmatrix} = F(m, z)$$

이 된다.

경제환경 e가 준선형이면, 定義8의 물매過程은 다음과 같다.

$$\dot{m}_i = F_i(m, z\,;\, e_i) = \sum_{k=1}^{n} z_k - m_i, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

(4.2)

$$\dot{z}_i = F_{n+i}(m, z\,;\, e_i) = \mathrm{D}V_i\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k\Big) - z_i + m_i - \frac{1}{n}\sum_{k\neq i} m_k - \frac{1}{n}\beta, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

각 소비자들에게 있어서 내쉬均衡戰略의 선택은 각자의 최적전략선택을 의미하며, 따라서 이 제도가 不均衡狀態에 있을 때만 전략조정함수가 역할을 하게 된다. 그리고 경제환경이 準線形일 때는 전략조정과정 $F(m, z\,;\, e)$의 定常點 $(\bar{m}, \bar{z})$가 바로 제도의 내쉬均衡임을 쉽게 확인할 수 있다. 그러므로 定常點 $(\bar{m}, \bar{z})$로의 수렴은 내쉬均衡으로의 수렴과 일치한다. 또한 準線形 경제환경에서는 린달均衡이 유일하므로, 따름定理1에 의하면 이 경우 내쉬均衡도 유일하다.

다음의 定理2는 準線形 경제환경하에서 물매過程이 全域的으로 安定的임을 보이고 있다.

定理2 : 準線形 경제환경에서 (4.2)式으로 주어진 물매過程은 全域的으로 安定的이다.

證明 : $(\bar{m}, \bar{z})$를 준선형 경제환경에서 (4.2)式으로 주어진 물매過程의 定常點이라 하자. 그리고 (q, r)를 다음과 같이 정의하자.

$$q_i = \frac{1}{\sqrt{n}} m_i, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

$$r_i = \sum_{k=i}^{n} z_k, \qquad \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

이제 (4.2)式으로 주어진 물매過程을 (q, r)로써 표시하면,

(4.2) $$\dot{q}_i = \frac{1}{\sqrt{n}} r_1 - q_i \equiv G_i(q, r\,;\, e), \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

(4.3) $$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= \sum_{k=1}^{n} F_{n+k}(m, z\,;\, e) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Big[\mathrm{D}V_k\Big(\sum_{l=1}^{n} z_l\Big) - z_k + m_k - \frac{1}{n}\sum_{l\neq k} m_l - \frac{1}{n}\beta\Big] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}V_k(r_1) - r_1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} q_k - \beta \\ &\equiv G_{n+1}(q, r\,;\, e) \end{aligned}$$

$$(4.4)\qquad \dot{r}_i=\sum_{k=i}^{n} F_{n+k}(m, z\ ;\ e)$$

$$=\sum_{k=i}^{n}\mathrm{D}V_k(r_1)-r_i+\sqrt{n}\sum_{k=i}^{n}q_k-\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=i}^{n}\sum_{l\neq k}q_l-\frac{n+1-i}{n}\beta$$

$$\equiv -r_i+h(q_1,\cdots,q_n,r_1)$$

$$\equiv G_{n+L}(q,r\ ;\ e),\quad \forall i=1,2,\cdots n$$

이를 벡터형태로 요약해서 표현하면

$$\begin{bmatrix}\dot{q}\\ \dot{r}\end{bmatrix}=G(q,r\ ;\ e)$$

이다.

이제 새로운 微分方程式體系 (4.2)～(4.4)가 準線形경제하에서 全域的으로 安定的임을 보이면 충분하다. 소미분방정식체계 (4.2), (4.3)은 變數 $(r_2, r_3, \cdots, r_n)$과는 獨立的으로 구성되어 있으며, 소미분방정식체계 (4.4)는 자기자신 r_i와 (4.2) 및 (4.3)에서 규정된 變數$(q_1,\cdots,q_n,r_1)$에 의존한다. 더우기 소미분방정식체계 (4.4)는 자기변수 r_i의 크기와는 陰의 線形關係를 가지고 있다. 따라서 소미분방정식체계 (4.2), (4.3)의 全域的 安定性을 증명하면, 이것은 바로 전체 미분방정식체계 (4.2)～(4.4)의 全域的 安定性을 증명하는 것이 된다.

소미분방정식체계 (4.2), (4.3)의 全域的 安定性을 보이기 위해, 다음과 같이 정의된 함수 $H: R^{n+1}\to R$을 고려해 보자.

$$H(q_1,q_2,\cdots,q_n,r_1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\nu_k(r_1)+\frac{1}{\sqrt{n}}r_1\sum_{k=1}^{n}q_k-\frac{1}{2}\left[(r_1)^2+\sum_{k=1}^{n}(q_k)^2+2\beta r_1\right]$$

그러면 소미분방정식체계 (4.2), (4.3)의 우변들은 바로 함수 H의 물매(gradient)가 된다. 또한,

$$[D_{ij}H(q,r_1)]_{i,j=1}^{n}=\begin{pmatrix} -1, & 0, & \cdots, & 0, & \frac{1}{\sqrt{n}}\\ 0, & -1, & \cdots, & 0, & \frac{1}{\sqrt{n}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0, & 0, & \cdots, & -1, & \frac{1}{\sqrt{n}}\\ \frac{1}{\sqrt{n}}, & \frac{1}{\sqrt{n}}, & \cdots, & \frac{1}{\sqrt{n}}, & \sum_{k=1}^{n}\mathrm{D}^2V_k(r_1)-1 \end{pmatrix}$$

이며, 행렬$[D_{ij}H(q,r_1)]$은 어떠한 q, r_1의 값에 대해서도 음정부호행렬이다. 따라서 이른바 물매體系(gradient system)의 全域的 安定性에 관한 정리 [Hirsh and Smale(1974) 참

조]에 의하면, 소미분방정식체계 (4.2), (4.3)은 全域的으로 安定的이다. 소미분방정식체계 (4.2), (4.3)이 全域的으로 안정적이므로, 앞의 논의에서 보았듯이 전체 체계 (4.2)~(4.4)도 全域的으로 安定的이다. ▨

본연구에서는 각 소비자들의 시간에 따른 戰略의 調整을 연속시간적으로 모형화하고 있으나, 이를 離散時間(discrete time)적으로 模型化해 보는 것도 흥미로운 연구가 될 것이다. 그러나 일반적으로 離散時間的 動態模型에서는 Overshooting의 可能性이 존재하기 때문에 이 경우 안정성 문제는 연속시간적 동태모형에서보다 더 어려운 과제이다. Muench and Walker(1979)는 이와 관련하여 經濟의 크기가 무한히 커질때 즉 소비자가 무한히 많아질 때 離散時間模型하에서 漸近的 誘因과 漸近的 安定性에 대해 연구했다.

6. 結 論

본연구에서 우리는 린달配分이 내쉬균형의 결과로서 실현되는 새로운 제도를 소개하고, 각소비자의 選好體系가 $x_i+V_i(y)$라는 형태의 準線形效用函數로 표현될 때는 이 제도의 물매過程이 全域的으로 安定的임을 보였다. 이와 같은 연구결과는 내쉬均衡이 어떻게 동태적으로 성취될 수 있는가를 보여주며, 모형의 特定變數가 外生的으로 변했을 경우 어떻게 새로운 내쉬均衡에 도달할 수 있는가를 보여준다.

그러나 본연구에서 밝혀진 配分制度의 安定性은 준선형 경제환경이라는 제한된 경제환경하에서 얻어졌다. 따라서 一般的 經濟環境下에서 配分制度의 安定性은 여전히 문제라 할 수 있다. 이 문제에 대하여 본저자는 1987년의 다른 논문을 통하여 어떤 제도이든 린달配分이 내쉬均衡의 결과로 실현된다면, 어떠한 전략조정과정하에서도 내쉬균형이 不安定的인 經濟環境이 存在한다는 것을 밝히고 있다. 그러므로 본논문에서 시도한 바와 같이 상당한 정도의 경제환경에 대한 制限은 配分制度의 安定性에 필수적인 요소라 할 수 있겠다. 그러나 린달配分이 실현되면서 配分制度가 安定的인 경제환경의 최대범위는 여전히 남아있는 숙제이다.

서울大學校 國際經濟學科 助敎授
151-742 서울 관악구 신림동
전화 : (02)880-6396
팩시 : (02)888-4454

參考文獻

李道星(1988) : "公共財 配分을 위한 安定制度", 『西江大學校 經商論叢』 **15**.

Arrow, K., and L. Hurwicz (1977): "Stability of the Gradient Process in N-person Games," in K. Arrow and L. Hurwicz(eds.), ***Studies in Resource Allocation Process***, Cambridge, Cambridge University Press.

Coddington, E.A., and N. Levinson (1955): ***Theory of Ordinary Differential Equations***, New York, McGraw-Hill.

Groves, T. (1979): "Efficient Collective Choice with Compensation," in J.J. Laffont(ed.), ***Aggregation and Revelation of Preferences***, Amsterdam, North Holland, 37~59.

Groves, T., and J. Ledyard(1977): "Optimal Allocation of Public Goods: A Solution to the 'Free Rider' Problem," ***Econometrica***, **45**, 783~809.

Hirsch, M., and S. Smale(1974): ***Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra***, New York, Academic Press.

_______(1972): "On Informationally Decentralized Systems," in C. McGuine and R. Radner (eds.), ***Decision and Organization***, Amsterdam, North Holland, 297~336.

Hurwicz, L. (1979): "Outcome Functions Yielding Walasian and Lindahl Allocations at Nash Equilibrium Points," ***Review of Economic Studies***, **46**, 217~225.

Kim, T. (1987): "On the Nonexistence of a Stable Nash Mechanism Implementing Lindahl Allocations," Mimeo, California Institute of Technology.

Muench, T., and M. Walker(1079): "Identifying the Free Rider Problem," in J. J. Laffont (ed.), ***Aggregation and Revelation of Preferences***, Amsterdam, North Holland, 61~86.

Samuelson, P. (1969): "Pure Theory of Public Expenditure and Taxation," in J. Margolis and H. Guiton (eds.), ***Public Economics***, London, McMillan.

Trunchon, M. (1984): "Non-Myopic Strategic Behavior in the MDP Planning Procedure," ***Econometrica***, **52**, 1179~1190.

Walker, M. (1980): "On the Nonexistence of a Dominant Strategy Mechanism for Making Optimal Public Decision," ***Econometrica***, **48**, 1521~1540.

_______(1981): "A Simple Incentive Compatible Scheme for Attaining Lindahl Allocations." ***Econometrica***, **49**, 65~71.