샤플리 밸류를 應用한 費用配分의 公平性

錢 英 燮(1)

1953년 샤플리에 의해 소개된 샤플리 벨류(Shapley value)는 移轉的 效用 聯合型 게임의 解들중 가장 잘알려져 있는 解이다. 특히 샤플리 밸류를 이용한 비용배분은 공평한 것으로 간주되어, 費用配分問題들을 해결함에 있어 널리 사용되어 왔다. 이 논문에서는 샤플리 밸류가 실제 비용배분문제들에 어떻게 응용되어질 수 있으며, 또한 샤플리 밸류의 公理的 特性들은 무엇인지를 살펴보고 있다.

1. 머 리 말

協助的 게임(cooperative game) 또는 聯合型게임(coalitional form game)은 경기자의 집합과 그 경기자들의 부분집합인 聯合(coalition)의 效用可能集合으로 구성된다. 즉 각각의 연합이 실현가능한 효용가능집합이 주어졌을 때 공평한 타협이 어떠한 것인가를 연구대상으로 하고 있다. 만약 각 연합의 효용가능집합이 어떤 경기자가 1단위의 效用을 포기했을 때 다른 경기자의 效用이(또는 다른 경기자들의 효용의 합이) 1단위 증가하도록 나타나면 移轉的 效用(transferable utility) 聯合型게임이라고 하고(2) 그렇지 않으면 非移轉的 效用(non-transferable utility) 聯合型게임이라고 한다. 이 논문에서는 移轉的 效用聯合型게임에 국한하여 논의를 전개하도록 한다.

移轉的 效用聯合型게임에서 가장 잘 알려져 있는 解(solution), 또는 밸류(value)는 1953년 샤플리(L.S. Shapley)에 의해 소개되었다. 그 후 '샤플리 밸류'의 특성은 다양한 접근방법을 통하여 연구되었으며, 특히 여러 가지 費用配分問題에 있어서 公平한 費用配分方法中의 하나로 간주되어 왔다. 이 논문에서는 샤플리 밸류가 어떠한 解의 개념인지를 소개하기 위하여 기존의 연구들을 종합・정리하였다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 第2節에서는 이전적 효용연합형게임을 소개하고, 그해의 개념인 샤플리 밸류를 정의한다. 第3節에서는 이 샤플리 밸류를 어떤 특정한 게임에

(1) 이 論文의 준비에 여러 가지로 조언을 주신 林鍾哲 敎授와 李之舜 敎授께 감사드린다.
(2) 즉 이전적 효용연합형 게임의 경우 效用可能集合은 지지벡터가 단위벡터인 초평면으로 나타난다.

사용했을 때 보수를 어떻게 계산할 수 있는가를 설명하고 第4節에서는 샤플리 밸류를 실제 費用配分問題에 적용하여 보도록 한다. 第5節에서는 公利的 接近法을 통하여 샤플리 밸류의 특성을 살펴보고 마지막으로 第6節에서는 샤플리 밸류가 어떻게 일반화될 수 있으며 이 샤플리 밸류와 다른 解들간의 관계가 어떠한지를 간단하게 살펴봄으로써 맺음말을 대신한다.

2. 移轉的 效用聯合型게임과 샤플리 밸류

$N\equiv\{1,\cdots,n\}$을 '경기자의 집합'이라 하면 N의 부분집합 S를 '연합'이라 부르며, 연합 S에 속한 경기자들의 수는 $|S|$로 표시한다. '移轉的 效用聯合型게임', 또는 줄여서 '게임'은 모든 연합 $S\subseteq N$에 정의되는 實價函數(real-valued function) v로 $v(\phi)=0$을 만족한다. $v(S)$는 연합 S의 값어치(worth)라고 불리운다. 경기자들의 集合 N이 주어졌을때. Γ는 모든 게임의 집합을 나타낸다.

'밸류'는 함수 $\phi:\Gamma\rightarrow R^N$로서 각 게임 $v\in\Gamma$에 대해 벡터 $\phi(v)=[\phi_i(v)]_{i\in N}$를 대응시킨다. 실수 $\phi_i(v)$는 게임 v에서의 i의 '報酬'를 나타낸다. 표기의 편의를 위하여 $\{i\}$는 i로 표시하기로 한다.

定義: 모든 게임 $v\in\Gamma$와 모든 경기자 $i\in N$에 대해 '샤플리 밸류'는

$$\phi_i(v)\equiv\sum_{S:i\in S}\frac{(|S|-1)!|N\backslash S|!}{|N|!}\{v(S)-v(S\backslash i)\}$$

로 정의된다.

샤플리 밸류는 全體聯合(grand coalition)의 값어치를 분배하는 公平한 방법으로 각 경기자의 보수를 그가 각각의 연합에 대하여 기여하는 限界貢獻의 加重平均으로 설정한다. 이때 加重値는 연합의 크기에 따라 결정되게 된다.

3. 샤플리 밸류에 의한 報酬計算法

샤플리 밸류의 특성을 파악하기 앞서 여기서는 어떤 게임에서 샤플리 밸류를 이용하여 각 경기자들의 보수를 결정하도록 하였을 때, 그 계산법이 어떻게 되는지를 살펴보도록 하겠다. 먼저 2人 게임의 경우를 살펴보고, 그 후 일반적인 경우를 보도록 하겠다.

(3) Roth(1988)에는 샤플리 밸류에 관한 다양한 논문들을 모아두고 있다.

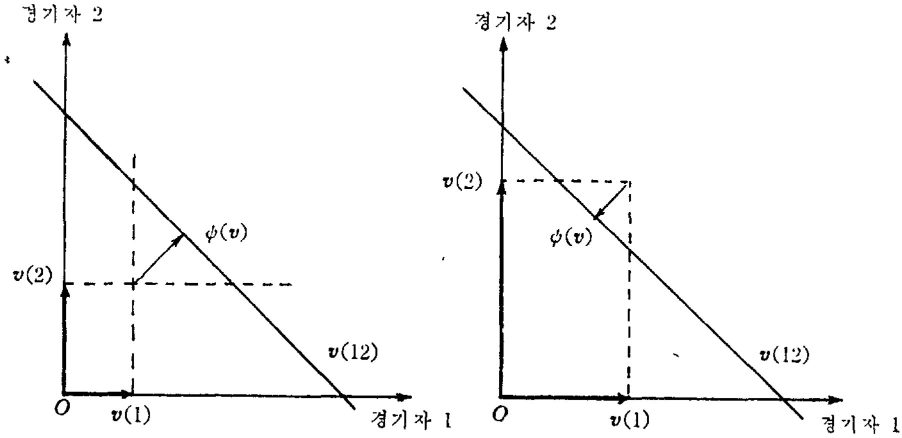
3.1. 2人 게임의 경우

경기자의 수가 둘인 경우 샤플리 밸류는 다음과 같이 단순화된 모습으로 된다. $N\equiv\{1,2\}$ 라고 두면,

$$\phi_1(v)=v(1)+\frac{1}{2}[v(12)-v(1)-v(2)]$$

$$\phi_2(v)=v(2)+\frac{1}{2}[v(12)-v(1)-v(2)]$$

이다. 각 경기자는 먼저 자신만으로 구성된 연합의 값어치를 배정받고, 그 합이 全體聯合의 값어치보다 작으면 그 나머지 부분을 똑같이 나누어 가지고 반면에 그 합이 전체연합의 값어치보다 크면 그 差異를 각 경기자가 똑같이 내어놓게 된다. 이를 그림으로 보면 다음과 같다.



$v(12)>v(1)+v(2)$인 경우 $v(12)<v(1)+v(2)$인 경우

〈그림 1〉 2人 게임의 경우

3.2. 一般的인 경우 : 限界貢獻을 이용한 計算法

이 방법은 샤플리 밸류의 定義를 그대로 사용한 방법이다. 〈表 1〉과 같이 제일 왼쪽에 경기자들의 모든 가능한 '順序'를 적는다. 그 후 각 순서에 있어서의 각 경기자의 限界貢獻(marginal contribution)을 표에 기입하게 된다. 예를 들어 순서가 3 2 1이면 경기자 3은 $v(3)$을, 경기자 2는 $v(23)-v(3)$을, 경기자 1은 $v(123)-v(23)$를 配定받게 된다. 마지막으로 각 열의 합을 더한 다음 $|N|!$(지금의 경우 $3!=6$)로 나누어 주면 각 경기자의 보수가 구해진다.

예로써 $N\equiv\{1,2,3\}$, $v(1)=6$, $v(2)=12$, $v(3)=18$, $v(12)=30$, $v(13)=18$, $v(23)=48$, 그리고 $v(123)=72$인 게임을 보면 〈表 2〉와 같다.

〈表 1〉 限界貢獻을 이용한 報酬計算法 : 一般的인 경우

	1	2	3
1 2 3	$v(1)$	$v(12)-v(1)$	$v(123)-v(12)$
1 3 2	$v(1)$	$v(123)-v(13)$	$v(13)-v(1)$
2 1 3	$v(12)-v(2)$	$v(2)$	$v(123)-v(12)$
2 3 1	$v(123)-v(23)$	$v(2)$	$v(23)-v(2)$
3 1 2	$v(13)-v(3)$	$v(123)-v(13)$	$v(3)$
3 2 1	$v(123)-v(23)$	$v(23)-v(3)$	$v(3)$
	열의 합/6	열의 합/6	열의 합/6

〈表 2〉 限界貢獻을 이용한 報酬計算法의 例

	1	2	3
1 2 3	6	24	42
1 3 2	6	54	12
2 1 3	18	12	42
2 3 1	24	12	36
3 1 2	0	54	18
3 2 1	24	30	18
	$\frac{78}{6}=13$	$\frac{186}{6}=31$	$\frac{168}{6}=28$

따라서 샤플리 밸류를 이 게임에 응용하여 각 경기자의 報酬를 구해보면 경기자 1은 13, 경기자 2는 31, 그리고 경기자 3은 28을 갖게 된다.

3.3. 一般的인 경우 : 平均貢獻을 이용한 計算法

이 方法은 Maschler(1982)가 開發한 방법으로 2人 게임에 있어서의 配分法을 일반화시킨 것이다. 2人 게임의 경우 먼저 $v(1)$과 $v(2)$를 경기자 1, 2에게 주고 나머지 부분을 두 사람이 똑같이 가지거나 또는 똑같이 부담하게 된다. 일반적으로는 먼저 $v(1)$을 경기자 1에게 주고 경기자 1을 포함하는 모든 聯合의 값어치에서 $v(1)$만큼 공제하게 된다. 마찬가지로 $v(2)$를 경기자 2에게 $v(3)$를 경기자 3에게 주고, 경기자 2를 포함하는 모든 聯合의 값어치에서 $v(2)$를 그리고 경기자 3을 포함하는 모든 聯合의 값어치에서 $v(3)$를 공제한다. 그 후 $v(12)-v(1)-v(2)$가 양수이면 이것을 경기자 1과 2에게 똑같이 나누어 주고, 음수이면 경기자 1과 2가 똑같이 부담하게 된다. 그 후 12를 포함하는 모든 聯合의 값어치에 $v(12)-v(1)-v(2)$를 더하게 된다. 이 過程을 반복하여 마지막에 가서는 聯合 123에 남은 값어치를 세 사람에게 똑같이 나누어 주고, 왼쪽 세열에 남은 것을 열로 더하게 되면 각자의 報酬가 나오게 된다. 이 方法을 整理하면 〈表 3〉처럼 나타낼 수 있다.

〈表 3〉 平均貢獻을 이용한 報酬計算法 : 一般的인 경우

1	2	3	1	2	3	12
0	0	0	$v(1)$	$v(2)$	$v(3)$	$v(12)$
$v(1)$	0	0	0	$v(2)$	$v(3)$	$v(12)-v(1)$
0	$v(2)$	0	0	0	$v(3)$	$v(12)-v(1)-v(2)$
0	0	$v(3)$	0	0	0	$v(12)-v(1)-v(2)$
	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
			0	0	0	0

1	2	3	13	23	123
0	0	0	$v(13)$	$v(23)$	$v(123)$
$v(1)$	0	0	$v(13)-v(1)$	$v(23)$	$v(123)-v(1)$
0	$v(2)$	0	$v(13)-v(1)$	$v(23)-v(2)$	$v(123)-v(1)-v(2)$
0	0	$v(3)$	$v(13)-v(1)-v(3)$	$v(23)-v(2)-v(3)$	$v(123)-v(1)-v(2)-v(3)$
	⋮		⋮	⋮	⋮
			0	0	0

〈表 4〉 平均貢獻을 이용한 報酬計算法의 例

1	2	3	1	2	3	12	13	23	123
0	0	0	6	12	18	30	18	48	72
6	0	0	0	12	18	24	12	48	66
0	12	0	0	0	18	12	12	36	54
0	0	18	0	0	0	12	−6	18	36
6	6	0	0	0	0	0	−6	18	24
−3	0	−3	0	0	0	0	0	18	30
0	9	9	0	0	0	0	0	0	12
4	4	4	0	0	0	0	0	0	0
13	31	28							

앞의 예를 이 방법을 이용하여 계산해 보면 〈表 4〉와 같다. 이 계산법의 結果가 限界貢獻을 이용한 계산의 결과인 〈表 2〉와 같아짐을 확인할 수 있다.

4. 샤플리 밸류를 適用한 費用配分問題들

앞에서는 일반적인 移轉的 效用聯合型게임에 있어서 샤플리 밸류에 의한 報酬가 어떻게 계산될 수 있는지를 살펴 보았다. 이러한 샤플리 밸류는 실제에 있어서 여러 가지 다양한 費用配分問題(cost allocation problem)들에 적용되어 질 수 있으며, 이 경우 報酬計算은 보다 단순한 형태로 나타날 수도 있다. 여기서는 공항 활주로 건설비용배분문제와 유산상속

문제에 샤플리 밸류를 적용하여 그 결과가 어떻게 나오는지를 고찰해 보도록 하겠다.

4.1. 공항 활주로 建設費用配分問題

다음과 같은 費用配分問題를 생각해 보자. 어떤 지역에서 새로운 공항 활주로를 건설할려고 한다. 이 공항에는 여러 종류의 비행기들이 이착륙을 한다고 하며, 비행기의 機種에 따라 필요한 활주로의 길이가 다르다고 하자. 각 비행기 기종마다 하나씩의 활주로를 건설하면 費用配分의 問題는 쉽게 해결되겠지만 資源의 낭비가 무척 크게 된다. 그렇다면 모든 비행기가 이착륙할 수 있는 활주로를 건설한다고 할 때, 즉 가장 긴 활주로가 필요한 비행기가 이용할 수 있게 활주로를 건설한다고 할 때, 이 활주로 건설비용은 어떻게 配分하는 것이 좋을 것인가.(4)

이 문제에 대해 Baker(1965)와 Thompson(1971)은 다음과 같은 해결책을 제시했다.

(1) 먼저 가장 짧은 활주로가 필요한 비행기가 이착륙할 수 있는 활주로 建設費用을 계산하여 그 비용을 모든 비행기들이 똑같이 부담한다.

(2) 그 다음 두번째로 짧은 활주로가 필요한 비행기가 이착륙할 수 있는 활주로 건설을 위한 追加的인 費用(가장 짧은 활주로 건설비용에 더하여 추가적으로 필요한 費用)을 계산하여, 가장 짧은 활주로가 필요한 비행기를 제외한 나머지 비행기들이 똑같이 부담한다.

(3) 이 과정을 가장 긴 활주로가 필요한 비행기가 이착륙할 수 있는 활주로 建設費用까지 반복하여 適用한다.

이에 대해 Littlechild and Owen(1973)은 활주로 建設費用配分問題를 移轉的 效用聯合型 게임으로 적절하게 바꾸었을 때, 이러한 해결책이 샤플리 밸류에 의한 費用配分方法과 일치함을 보여주었다. 이제 이러한 費用配分問題에 샤플리 밸류를 어떻게 적용할 수 있는가를 살펴보기로 하자.

먼저 m類型의 경기자가 있다고 하고, $n_i(i=1,\cdots,m)$를 i유형의 경기자의 수, 그리고 N_i $(i=1,\cdots,m)$를 i유형의 경기자의 집합이라고 하자. 물론 $n_i>0$이 된다. 경기자 전체의 集合을 $N\equiv\bigcup_{i=1}^{m}N_i$, 그리고 경기자의 總數를 $n=\sum_{i=1}^{m}n_i$로 두자. 각 경기자 i와 관련되어 있는 비용을 C_i로 표시하면, 一般性을 잃지 않고도 우리는

$$0\equiv C_0<C_1<C_2<\cdots<C_m$$

이라고 가정할 수 있다. 더 나아가서 $v(\phi)=0$, 그리고 모든 聯合 $S\subseteq N$에 대해 $v(S)$는 S에 속한 경기자중 가장 많은 費用이 드는 경기자의 費用으로 게임을 정의하자.

(4) 물론 실제 활주로 사용요금책정에 있어서는 이착륙에 필요한 활주로의 길이뿐만 아니라, 비행기의 무게라든지 이착륙시 필요한 다른 시설들의 使用費 등도 고려되어야 한다. 單純化를 위해서 여기서는 활주로 길이만을 고려하여 費用配分問題를 생각해 보기로 한다.

第 2 節에서 정의한 바처럼 샤플리 밸류는, 모든 $j \in N$에 대해,

$$\phi_j(v) = \sum_{S:j\in S} \frac{|N\backslash S|!(|S|-1)!}{n!}\{v(S)-v(S\backslash j)\}$$

이나, 위의 경우는 다음과 같은 식으로 單純化될 수 있다. 모든 $k=1,\cdots,m$에 대해 $r_k = \sum_{i=k}^{m} n_i$라고 두면, 모든 경기자 유형 $i=1,\cdots,m$, 그리고 경기자 $j\in N_i$에 대해

$$\phi_j(v) = \sum_{k=1}^{i} \frac{C_k - C_{k-1}}{r_k}$$

가 성립된다. 따라서 앞에서 설명한 Baker(1965)와 Thompson(1971)의 해결책과 일치하게 된다.

〈表 5〉 샤플리 밸류에 의한 활주로 建設費用配分 : $C_1<C_2<C_3$인 3人 게임의 경우

	1	2	3
1 2 3	C_1	C_2-C_1	C_3-C_2
1 3 2	C_1	0	C_3-C_1
2 1 3	0	C_2	C_3-C_2
2 3 1	0	C_2	C_3-C_2
3 1 2	0	0	C_3
3 2 1	0	0	C_3
	$\frac{1}{3}C_1$	$\frac{1}{3}C_1+\frac{1}{2}(C_2-C_1)$	$\frac{1}{3}C_1+\frac{1}{2}(C_2-C_1)+(C_3-C_2)$

더 나아가서 Littlechild and Thompson(1977)에서는 버밍햄(Birmingham) 공항의 실제자료들을 이용하여 샤플리 밸류를 利用한 方法이 실제로 버밍햄 공항에서 사용되고 있는 요금책정방법과 유사함을 보여주었다.

4.2. 遺產相續問題

최근에 와서 移轉的 效用聯合型게임에서 많은 논문이 나온 관심분야중의 하나가 遺產相續問題이다〔Aumann and Maschler(1985), Moulin(1987), O'Neill(1982), Young(1987, 1988), Chun(1988, 1989a)〕.(5) 이러한 문제는 어떤 사람이 죽었을 때 남긴 유산이 자기가 生前에 상속인들에게 주겠다고 약속한 금액보다 적을 때 생기게 된다. 바빌로니안 탈무드(Babylonian Talmud)에는 이와 관련된 여러 가지 사례들이 나와 있는데, 여기서는 O'Neill (1982, p. 346)에 인용되어 있는 두 경우를 살펴보기로 한다.

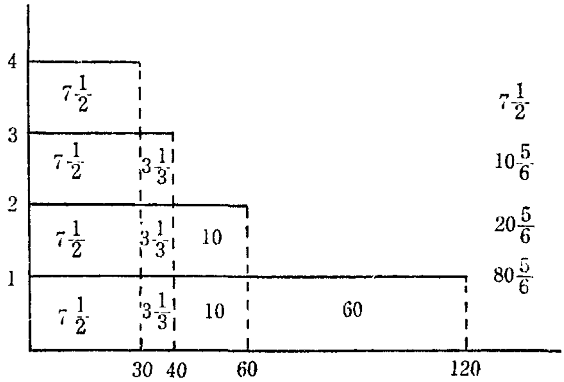
(1) 두 사람이 함께 옷감을 주웠는데, 첫번째 사람은 "전부 내것이다" 그리고 두번째 사

(5) 이러한 遺產相續問題를 바꾸어 생각하면 부도기업의 자산정리문제 또는 課稅問題 등으로 해석할 수도 있다. 특히 Young(1987, 1988)에서는 課稅問題를 중점적으로 다루고 있다.

람은 "반은 내것이다"라고 주장했을 때 첫번째 사람은 3/4을, 두번째 사람은 1/4을 갖게 된다.

(2) 어떤 사람이 죽었는데, 그 네 아들들은 동일한 날짜가 적혀있는 合法的인 유서들을 가지고 나타났다. 이 네 유서에서는 첫번째 아들에게 유산의 전부를, 두번째 아들에게 반을, 세번째 아들에게 1/3을, 그리고 마지막 아들에게는 1/4을 주겠다고 하였다. 이에 대해 Rabbi Ibn Erza가 제시한 하나의 해결책은 각자에게 97/144, 25/144, 13/144와 9/144를 주는 것이다. 자신의 해결책이 정당하다고 그가 밝힌 이유는 다음과 같다.

유산총액이 120이라고 하자. 마지막 아들은 유산의 1/4, 즉 30을 요구하고 이 부분은 다른 세 아들들도 똑같이 요구하므로, 30의 1/4 즉 $7\frac{1}{2}$를 가져야 한다. 셋째 아들은 유산의 1/3, 즉 40을 요구하는데 이미 30만큼에서 $7\frac{1}{2}$을 받았으므로 나머지 부분인 10의 $\frac{1}{3}$인 $3\frac{1}{3}$을 더 가져야 한다. 따라서 셋째 아들의 몫은 $10\frac{5}{6}$이다. 마찬가지의 방법으로 두번째 아들의 몫은 $20\frac{5}{6}\left(30\times\frac{1}{4}+10\times\frac{1}{3}+20\times\frac{1}{2}\right)$이고, 첫번째 아들의 몫은 $80\frac{5}{6}\left(30\times\frac{1}{4}+10\times\frac{1}{3}+20\times\frac{1}{2}+60\times1\right)$이다.



〈그림 2〉 샤플리 밸류에 의한 遺產配分

이러한 탈무드의 解決方法은 앞에서 본 샤플리 밸류에 의한 費用配分方法과 유사함을 알 수 있다. 가장 적은 요구를 하는 사람이 요구하는 액수를 놓고 모든 사람이 균등하게 配分한다. 그 다음으로 적은 요구를 하는 사람이 요구하는 額數에서 가장 적은 요구를 하는 사람이 요구하는 額數를 뺀 나머지를 놓고 가장 적은 요구를 한 사람을 제외한 나머지 사람들끼리 균등하게 나누어 가진다. 따라서 각자가 요구하는 액수를 활주로 건설에 있어서의 비용으로 생각하면 두 방법은 동일함을 알 수 있다(즉 모든 聯合 S에 대해 $v(S)$는 S에 속한 경기자들이 요구하는 額數中 그 최고액이 된다). 물론 이런 식으로 게임을 定義하는 것

이 부자연스러운 경우도 있을 것이다〔遺産相續問題를 게임으로 정의한 다른 방법의 예는 Aumann and Maschler(1985)에서 찾아질 수 있다〕. 하지만 오래 전에 기술된 탈무드의 예와 最近에 開發된 게임이론간에 관계를 지울 수 있다는 것은 놀라운 일이라 할 수 있을 것이다.

5. 샤플리 밸류에 대한 公理的 接近法

協助的 게임에 있어 그 解의 개념을 合理化시키는 한 가지 方法은 公理的 接近法(axiomatic approach)을 이용하는 것이다. 즉 바람직한 解가 만족시켜야만 하는 解의 성질들을 公理로서 열거해 놓고, 어떤 解가 그러한 公理들을 만족하는지를 살펴보는 것이다. 물론 너무 많은 公理를 부과하면, 그 많은 공리들을 충족하는 해가 존재하지 않는다는 不能定理(impossibility theorem)가 얻어질 것이며, 너무 적은 공리들을 요구하면, 그러한 解들을 만족하는 解가 너무 많아질 것이다. 일련의 公理가 주어졌을 때, 그 공리들을 만족하는 解가 모두 파악되었을 때, 그러한 정리를 特性化定理(characterization theorem)라고 하며, 그 定理에서 파악된 해들은 公理化(axiomatized)되었다고 한다. 이러한 공리적 접근법이 가장 유용할 때는 特性化定理에서 파악된 解가 유일하게 나타나는 경우이다. 이 경우 비록 경기자들이 어떤 解를 사용할 것인지에 대해서는 합의점을 찾지 못하더라도, 일련의 公理에 관해서 合意를 볼 수 있으면, 그 解의 선택이 명확하게 될 수 있으며, 이러한 공리들은 公平性의 基準으로 간주될 수 있기 때문이다.

여기서는 샤플리 밸류가 어떤 공리들을 이용하여 特性化(characterize)될 수 있는지를 살펴보도록 하겠다. 먼저 이러한 문헌에서 일반적으로 사용되는 公理들부터 기술하겠다.

效率性(efficiency) : 모든 게임 $v \in \Gamma$에 대해, $\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$이다.

함수 $\pi: N \to N$은 N의 '순열'을 나타낸다. 모든 聯合 $S \subseteq N$에 대하여, $\pi(S) \equiv \{\pi(i) \mid i \in S\}$이며 $\pi v(S) \equiv v(\pi(S))$이다.

對稱性(symmetry) : 모든 게임 $v \in \Gamma$, 모든 경기자 $i \in N$, 그리고 N의 모든 순열 π에 대해, $\phi_{\pi_i}(\pi v) = \phi_i(v)$이다.

虛像性(dummy) : 모든 게임 $v \in \Gamma$와 모든 경기자 $i \in N$에 대해, 만약 i를 포함하는 모든 聯合 S에서 $v(S) - v(S \backslash i) = 0$이면, $\phi_i(v) = 0$이다.

效率性은 경기자들에 대한 보수가 全體聯合(grand coalition)을 形成함으로써 발생한 모든

혜택을 소진하기를 요구한다. 對稱性이 요구하는 바는, 경기자들의 보수를 결정하는 데 적절한 모든 요인들이 v에 집약되어 있으므로, 만약 두 경기자가 v에 對稱的으로 入力되어 있으면, 두 사람은 v에 의해 對稱的으로 다루어져야 한다는 것이다. 虛像性은 만약 어떤 경기자의 한계공헌이 모든 연합에 대해 없을 경우 그의 보수도 없어야 한다는 것이다.

더 나아가서 Shapley(1953b)는 다음의 公理를 부과함으로써 샤플리 밸류의 特性化定理를 얻었다. 두 게임들 $v, w \in \Gamma$가 주어졌을 때, $v+w$는 모든 $S \subseteq N$에 대해 $(v+w)(S) \equiv v(S) + w(S)$로 정의된다. $v+w$가 Γ의 원소임은 쉽게 보일 수 있다.

加算性(additivity) : 모든 게임 v와 w에 대해, $\phi(v+w) = \phi(v) + \phi(w)$이다.

加算性이 요구하는 바는 밸류가 게임들의 加算函數(additive function)가 되어야 한다는 것이다.

定理1 〔Shapley(1953b)〕: 샤플리 밸류는 效率性, 對稱性, 虛像性 및 加算性을 만족하는 유일한 밸류이다.

반면에 Young(1985)은 다음의 公理를 이용하여 샤플리 밸류에 대한 特性化定理를 얻었다. 먼저 $\triangle_i v(S)$를 정의하자.

$$\triangle_i v(S) \equiv \begin{cases} v(S) - v(S \backslash i) & \text{만약 } i \in S\text{이면,} \\ v(S \cup i) - v(S) & \text{만약 } i \notin S\text{이면.} \end{cases}$$

$\triangle_i v(S)$는 경기자 i가 聯合 S에 대해 기여하는 限界貢獻이며, $\triangle_i v$를 경기자 i의 '限界貢獻벡터'라고 부른다.

限界性(marginality) : 모든 게임 $v, w \in \Gamma$와 모든 경기자 $i \in N$에 대해, 만약 $\triangle_i v = \triangle_i w$이면, $\phi_i(v) = \phi_i(w)$이다.

限界性이 요구하는 바는 만약 경기자 i의 限界貢獻벡터가 두 게임에서 일치하면, 그의 보수도 두 게임에서 같아야 한다는 것이다. 즉 경기자 i에 대한 報酬가 限界貢獻벡터만의 函數가 되어야 한다는 것이다.

定理2 〔Young(1985)〕: 샤플리 밸류는 效率性, 對稱性 및 限界性을 만족하는 유일한 밸류이다.

샤플리의 경우 주된 公理는 加算性이며 영(H.P. Young)의 경우 限界性이다. 하지만 이 두 公理間의 직접적인 論理關係가 존재하지는 않는다. 이러한 어려움을 해결하기 위해 Chun(1989b)에서는 다음의 公理를 도입하였다. 非空(nonempty)인 연합 $T \subseteq N$가 주어졌을

때, u^T는 '聯合 T의 만장일치게임'을 나타낸다. 즉 만약 $T \subseteq S$이면 $u^T(S)=1$이고, 그렇지 않으면 $u^T(S)=0$이다.

聯合的 戰略同等性(coalitional strategic equivalence): 모든 게임 $v, w \in \Gamma$, 모든 聯合 $T \subseteq N$, 그리고 모든 實數 α에 대해 만약 $v=w+\alpha u^T$이면, 모든 경기자 $i \in N \backslash T$에 대해 $\phi_i(v)=\phi_i(w)$이다.

聯合的 戰略同等性이 요구하는 바는 어떤 聯合 T가 주어졌을 때, 그 聯合 T를 포함하는 모든 聯合들의 값어치가 같은 실수만큼 증가하면, 연합에 속하지 않은 다른 경기자들의 報酬에는 영향을 미치지 않아야 한다는 것이다. 이 공리는 費用配分問題를 살펴봄으로써 동기지움이 가능하다. 어떤 비용배분문제에 있어서 聯合 T가 함께 費用節減法을 개발하여, 그 결과 T를 포함하는 모든 연합들의 비용이 α만큼 감소하였다고 하자. 이 경우 비용절감의 혜택은 聯合 T에 속한 경기자들에게 돌아갈 것이고, 聯合 T에 속하지 않은 경기자들의 보수는 영향을 받지 않아야 한다고 요구할 수 있을 것이다. 이것이 즉 聯合的 戰略同等性이 요구하는 바이다.

定理3 〔Chun(1991)〕: 샤플리 밸류는 效率性, 對稱性 및 聯合的 戰略同等性을 만족하는 유일한 밸류이다.

더 나아가서 Chun(1989b)에서는 (1) 聯合的 戰略同等性은 虛像性과 加算性을 합친 것보다 약한 公理이며[(6)] (2) 聯合的 戰略 同等性은 限界性보다 약한 公理임을 보여주었다. 따라서 定理3은 定理1과 2 사이의 論理關係 규명에 있어 두 定理들을 연결시키는 역할을 한다고 할 수 있다.

샤플리 밸류에 대한 追加的인 特性化定理들은 Hart and Mas-Colell(1989)과 Chun(1989b) 등에서 찾을 수 있다. Hart and Mas-Colell(1989)에서는 일종의 一致性(consistency)을 주요 公理로 사용하고 있다. 一致性이란 어떤 게임의 타협점을 찾는 데 있어 전체경기자들을 상대로 보수벡터를 구하거나, 전체경기자들의 부분집합과 그에 따라 변형된 게임을 놓고 그 부분집합에 속한 경기자들의 보수를 구하든지 간에 동일한 결과를 낳게 하는 밸류가 바람직하다는 것이다. Chun(1989b)에서는 定理3에 사용된 公理中 對稱性을 다른 두 공리들로 대체하여 샤플리 밸류의 特性化定理를 定立하였다.[(7)]

---

(6) 바꾸어 말하면, 어떤 밸류가 虛像性과 加算性을 만족하면 연합적 전략동등성도 만족한다는 것이다.

(7) 이 이외에도 샤플리 밸류의 公理的 特性을 연구한 논문으로는 Roth(1977) 등이 있다.

6. 맺 음 말

이 논문에서는 샤플리 밸류를 소개하기 위하여 그 계산법부터 시작하여, 실제 費用配分問題에의 적용, 더 나아가서 公理的 特性 등을 고찰하여 보았다. 물론 이 샤플의 밸류의 정의를 확장하여 '非移轉的 效用聯合型게임'에의 적용도 가능하나, 여기서는 移轉的 效用聯合型게임에 국한하였다.

물론 샤플리 밸류가 이전적 효용연합형게임을 푸는 유일한 解의 개념은 아니며, 샤플리 밸류가 지니지 않은 다른 특성을 지닌 다른 해들도 존재한다. 이 중 제일 먼저 생각해 볼 수 있는 것이 코아(core)이다. 移轉的 效用聯合型게임에서 보수벡터 x가 코아에 속하기 위해서는 다음의 성질을 만족해야 한다 : 모든 聯合 $S \subseteq N$에 대해 $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$이며 $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$이다. 게임에 따라서는 코아에 속하는 보수벡터의 집합이 클 수도 있으며, 또는 공집합일 수도 있다.[8] 따라서 어떤 게임에 코아가 존재할 경우, 샤플리 밸류가 코아에 속하는지를 알아보는 것은 흥미있는 일이다. 물론 게임에 따라서는 코아가 존재하며, 샤플리 밸류가 코아에 속하지 않을 수도 있다. 하지만 게임이 다음의 特性을 만족하면 샤플리 밸류는 코아에 속하게 된다 [Shapley(1971)]. 모든 경기자 $i \in N$와 $N \backslash i$의 부분집합인 모든 聯合 S, T에 대해 만약 S가 T의 部分集合이면, $v(S \cup i) - v(S) \leq v(T \cup i) - v(T)$이다. 이러한 게임에서는 聯合의 크기가 커짐에 따라 경기자 i의 限界貢獻도 커짐으로 볼록게임(convex game)이라 부르며, 이러한 볼록게임에 속하는 게임의 집합은 크다는 것을 밝혀 둔다.

반면에 어떤 게임에 있어서는 경기자들이 모두 對稱的이라는 假定이 타당하지 않을 수도 있다. 각 경기자들이 크기가 다른 선거구를 대표할 수도 있고, 각 경기자들의 협상능력에 차이가 있을 수도 있다. 이러한 경우를 위해서 Shapley(1953a)에서는 샤플리 밸류를 一般化시킨 加重的 샤플리 밸류들(weighted Shapley values)을 소개하였으며, 그 후 Shapley(1981), Kalai and Samet(1987), Weber(1988), Hart and Mas-Colell(1989), Levy and McLean(1989) 및 Chun(1991) 등에 의해 그 公理的 特性이 연구되었다.

서울大學校 經濟學科 助敎授
151-742 서울 관악구 신림동
전화 : (02)880-6382
팩시 : (02)888-4454

(8) 이러한 문제점을 해결하기 위해 제안된 解의 개념으로는 Schmeidler(1969)의 nucleolus를 들 수 있다.

參 考 文 獻

Aumann, R.J., and M. Maschler(1985): "Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud," *Journal of Economic Theory*, **36**, 195～213.

Baker M.J., Jr.(1965): *Airport Runway Cost Impact Study*, Report submitted to the Association of Local Transport Airlines, Mississippi, Jackson.

Chun, Y.(1988): "The Proportional Solution for Rights Problems," *Mathematical Social Sciences*, **15**, 231～246.

_______(1989a): "A Noncooperative Justification for Egalitarian Surplus Sharing," *Mathematical Social Sciences*, **17**, 245～261.

_______(1989b): "A New Axiomatization of the Shapley Value," *Games and Economic Behavior*, **1**, 119～130.

_______(1991): "On the Symmetric and Weighted Shapley Values," *International Journal of Game Theory*, Forthcoming.

Hart, S., and A. Mas-Colell (1989): "Potential, Value, and Consistency," *Econometrica*, **57**, 589～614.

Kalai, E., and D. Samet(1987): "On Weighted Shapley Values," *International Journal of Game Theory*, **16**, 205～222.

Levy, A., and R.P. McLean(1989): "Weighted Coalition Structure Values," *Games and Economic Behavior*, **1**, 234～249.

Littlechild, S.C., and G. Owen(1973): "A Simple Expression for the Shapley Value in a Special Case," *Management Science*, **20**, 370～372.

Littlechild, S.C., and G.F. Thompson(1977): "Aircraft Landing Fees: A Game Theory Approach," *Bell Journal of Economics*, **8**, 186～204.

Maschler, M.(1982): "The Worth of a Cooperative Enterprise to Each Member," in M. Deistler, E. Fürst, and G. Schwödiawer(eds.), *Games, Economic Dynamics, and Time Series Analysis*, Wien/Würzburg, Physica-Verlag, 67～73.

Moulin, H.(1987): "Equal or Proportional Division of a Surplus, and Other Methods," *International Journal of Game Theory*, **16**, 161～186.

O'Neill, B. (1982): "A Problem of Rights Arbitration in the Talmud," *Mathematical Social Sciences*, **2**, 345～371.

Roth, A.E.(1977): "The Shapley Value as a von Neumann-Morgenstern Utility," *Econometrica*, **45**, 657～664.

_______(1988): *The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*, New York, Cambridge University Press.

Schmeidler, D.(1969): "The Nucleolus of a Characteristic Function Game," *SIAM Journal* *of Applied Mathematics*, **17**, 1163～1170.

Shapley, L.S. (1953a): *Additive and Non-Additive Set Functions*, Ph.D. Thesis, Department of Mathematics, Princeton University.

_______ (1953b): "A Value for *n*-Person Games," in H.W. Kuhn and A.W. Tucker (eds.), *Contributions to the Theory of Games II, Annals of Mathematics Studies No. 28*, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 307～317.

_______ (1971): "Cores of Convex Games," *International Journal of Game Theory*, **1**, 11～26.

_______ (1981): "Discussant's Comment," in S. Moriarity (ed.), *Joint Cost Allocation*, Tulsa, University of Oklahoma Press.

Thompson, G.F. (1971): *Airport Costs and Pricing*, Ph.D. Thesis, University of Birmingham.

Weber, R.J. (1988): "Probabilistic Values for Games," in A.E. Roth (ed.), *The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*, New York, Cambridge University Press, 101～119.

Young, H.P. (1985): "Monotonic Solutions of Cooperative Games," *International Journal of Game Theory*, **14**, 65～72.

_______ (1987): "On Dividing an Amount according to Individual Claims or Liabilities," *Mathematics of Operations Research*, **12**, 398～414.

_______ (1988): "Distributive Justice in Taxation," *Journal of Economic Theory*, **44**, 321～335.