投入産出分析의 호킨스-사이몬條件
—그 再解釋과 새로운 展開

鄭 基 俊

필자는 이미 Jeong(1982, 1984)에서 投入產出分析의 기존이론에서의 몇 가지 문제점을 지적하고 수정하는 등의 작업을 한 바 있으나 本論文에서는 필자의 기존연구와 Fujita (1991) 등의 후속연구를 종합하여, 호킨스-사이몬條件과 관련된 몇 가지 槪念에 대한 새로운 展開와 再解釋을 시도한다.

1. 序 論

경제학의 역사에서 많은 經濟理論이 등장하였지만 實證的으로 가장 중요하고 가장 널리 응용되는 이론은 投入產出分析으로 대표되는 產業聯關論이다. 투입산출분석은 현재 자본주의체제나 사회주의체제나를 막론하고 일국 경제의 구조를 분석하고 평가하고 정책을 수립하는 데 가장 중요한 수단으로 이용되고 있다. 우리나라에서도 1960년 이래 3년 내지 5년의 간격을 두고 產業聯關表가 작성되고 있으며, 이는 한국경제의 分析, 評價, 政策樹立에 매우 유용하게 이용되고 있다.

投入產出分析의 이론적 골격은 1940년대에 레온티에프에 의하여 세워졌고, 그 이론적 精緻化는 1950년대에 활발히 진행되었다. 1960년대 이후에 들어와서도 투입산출분석이 理論的 發展은 계속되었지만, 그 응용적 발전에 비하면 매우 뒤진다고 볼 수 있다.

필자는 이미 公刊된 논문〔Jeong(1982, 1984)〕에서 投入產出分析의 기존이론에서 몇 가지 문제점을 지적하고 수정하는 등, 투입산출분석의 몇 가지 개념에 대하여 구체적인 문제의식을 가지고 나름대로의 전개와 재해석을 모색하고 있는 바, 本稿는 필자의 과거의 연구와 Fujita(1991) 등의 후속연구를 종합·정리하여 호킨스-사이몬條件과 관련된 몇 가지 개념에 대한 새로운 展開와 再解釋을 시도하려는 것이다.

2. 1部門 投入產出模型

투입산출모형은 기본적으로 多部門模型이다. 그러나 그 본질을 이해하는 데는 1部門模型

의 설명이 보다 有用한 측면이 있다. 그러므로 먼저 1부문모형으로부터 설명을 시작하고자 한다.

이제 어떤 경제가 '産出'이라는 單一의 生産物만을 생산하고, 그 생산물의 크기, 즉 總産出의 크기가 x라고 하자. 그리고 그 경제에서는 이를 생산하는 데 中間投入으로서는 그 총산출 자체가 소요되고, 원초투입으로서는 勞動이 소요되며 그 각각의 投入所要量은 총산출의 크기 x에 비례한다고 하자. 그리고 그 때의 비례상수를 각각 a와 l이라고 하자. 그러면 그 경제가 需要와 供給의 均衡을 이루면서 생산이 이루어지기 위한 條件은 무엇일까?

그 경제의 總産出의 크기는 x이고 이를 생산하기 위한 中間投入需要의 크기는 ax이다. 그러나 총산출을 생산하는 궁극의 목적은 소비, 투자와 같은 最終需要를 충족하기 위한 것일 수밖에 없을 것이다. 그러므로 총산출은 中間需要와 最終需要를 모두 충족할 만한 크기여야 한다. 따라서 총산출에 대한 最終需要의 크기를 f라 하면 중간수요와 최종수요를 합친 總需要는 $ax+f$로 될 것이며, 균형상태에서 이는 總供給 x와 일치하여야 할 것이다. 그러므로 우리는 우선 다음과 같은 '均衡條件'을 얻는다.

(2.1) $$ax+f=x.$$

그리고 이 때 소요되는 노동력의 크기 L은

(2.2) $$L=lx$$

로 주어진다. 이 관계에서 볼 때 노동력의 크기 L은 x가 주어지면 自動的으로 결정된다. 이처럼 總産出의 크기 x를 알면 勞動力의 소요량을 쉽게 알 수 있으므로 우리는 總産出의 크기를 어떻게 결정할 수 있을까에 관심을 집중시키기로 한다.

2.1. 投入係數와 乘數

식 (2.1)을 보면, 最終需要의 크기 f가 주어지는 경우, 미지수는 x 하나뿐이다. 이 식을 x에 관하여 풀면 다음과 같다.

(2.3) $$x=\{1/(1-a)\}f,$$

(2.4) 또는 $$x=cf.$$

(2.5) 단, $$c=1/(1-a)=(1-a)^{-1}.$$

로 정의된다. 식 (2.4)를 보면 x는 f에 비례하며, 그 比例常數는 c임을 알 수 있다. 즉 f가 한 단위 증가하면 x는 c단위만큼 더 생산되어야 함을 나타낸다. 그러므로 c는 일종의 乘數이다. 그리고 식 (2.5)에 의하면 우리가 잘 아는 승수인 투자승수와 c가 닮은 것을 알 수 있다. 즉 1−(한계소비성향)의 逆數인 投資乘數의 限界消費性向이 올 자리에 投入係數

a가 온 점만이 다를 뿐이다.

2.2. 投入係數와 生產可能條件

우리의 1부문모형이 경제적으로 의미있는 모형이 되려면 非陰인 最終需要 f에 대응하는 總產出量 x가 非陰으로 생산가능해야 할 것이다. 이 조건을 生產可能條件(viability condition)이라 할 때, 이 조건은 분명히 投入係數 a가 1보다 작아야 함을 요구한다. 자신을 생산하는 데 소요되는 자신의 投入所要量이 자신의 크기보다 작아야만 최종수요의 충족에 기여할 수 있기 때문이다. 그러므로 우리는 생산가능조건을

$$a<1 \tag{2.6}$$

로 나타낼 수 있다. 이는 '總產出 1단위를 생산하는 데 소요되는 總產出의 中間投入所要量이 1보다 작다'라고 표현할 수 있는 조건이다.

2.3. 最終需要의 生產을 위한 投入所要量

最終需要와 總產出間의 관계는 식 (2.4)로 주어져 있다. 이 식에 의하면 최종수요 1단위를 충족하려면 總產出은 c단위만큼 생산되어야 한다. 그런데 총산출 x 가운데 f만큼만 최종수요로 되므로, $x-f$만큼은 결국 最終需要 f를 생산하기 위한 中間投入所要量으로 사용되는 셈이다. 그리고 또,

$$x-f=(c-1)f \tag{2.7}$$

이므로 최종수요 1단위를 생산하는 데 소요되는 總產出의 中間投入所要量은 $c-1$이 되는 셈이다.

2.4. 두 가지의 中間投入所要量

우리는 위의 두 항에서 두 가지 상이한 의미의 中間投入所要量 개념을 얻었다. 즉

a : 總產出 1단위를 생산하는 데 소요되는 總產出의 중간투입소요량 r_g,

$c-1$: 最終需要 1단위를 생산하는 데 소요되는 總產出의 중간투입소요량 r_f.

이 두 개념 사이의 차이는 '總產出 1단위'냐 '最終需要 1단위'냐에 있다. 그리고 이 둘 사이에는 어떤 논리적인 설명이 가능한 관계가 있을 것이라고 생각된다.

이 둘 사이의 관계를 얻기 위해서 $c-1$을 음미해보자. 여기서 c의 정의식 (2.5)로 돌아가 보자. 그리고 生產可能條件에 의하면 a가 1보다 작다는 사실을 고려해보자. 그러면 식 (2.5)의 표현은 다음과 같이 변형될 수 있다. 즉,

$$c=1/(1-a)=1+a+a^2+a^3+a^4+\cdots \tag{2.8}$$

를 얻는다. 그리고 이로부터,

$$c-1=a+a^2+a^3+a^4+\cdots \tag{2.9}$$

$$=(1+a+a^2+a^3+a^4+\cdots)a$$
$$=ca$$

를 얻는다. 즉 두 投入所要量係數 r_f와 r_g 사이에는 다음과 같은 간단한 관계가 성립한다.

$$r_f=c\,r_g. \tag{2.10}$$

$$\text{단,}\quad r_f=c-1,\ \ r_g=a. \tag{2.11}$$

2.5. 두 投入所要量係數間의 乘數關係

식 (2.10)이 보여주고 있는 것은 두 投入所要量係數, 즉 總産出 1단위를 생산하는 데 소요되는 總産出의 중간투입소요량계수 r_g와, 최종수요 1단위를 생산하는 데 소요되는 總産出의 중간투입소요량계수 r_f간에는 일종의 승수관계가 있고, 이 때 그 승수는 최종수요를 총산출로 변환할 때의 乘數 c와 같다는 것이다.

3. 호킨스-사이몬(HS)條件

3.1. 多部門投入産出模型

투입산출모형은 기본적으로 다부문모형이라고 하였다. 이제 n개의 부문으로 구성된 多部門投入産出模型을 고려해보자. n개의 부문 각각에서 總産出의 크기가 X_j $(j=1,2,\cdots,n)$이고, 最終需要의 크기가 F_i $(i=1,2,\cdots,n)$라 하자. 그리고 일정하다고 가정되는 非陰의 投入係數가 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$라고 하자. 그러면 각 부문의 총산출에 대한 中間需要와 最終需要의 합이 總産出의 크기와 같다는 조건을 다음과 같이 표현할 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned}
&a_{11}X_1+a_{12}X_2+\cdots+a_{1n}X_n+F_1=X_1\\
&a_{21}X_1+a_{22}X_2+\cdots+a_{2n}X_n+F_2=X_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n1}X_1+a_{n2}X_2+\cdots+a_{nn}X_n+F_n=X_n.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

그리고 이를 행렬과 벡터를 써서 나타내면

$$Ax+f=x \tag{3.2}$$

로 표현할 수 있다. 여기서 A는 非陰의 투입계수로 이루어지는 $n\times n$ 행렬로서

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix} \tag{3.3}$$

로 정의되며, x는 n개 부분의 總産出로 구성되는 $n\times 1$벡터이며, f는 n개 부문의 總産出에 대한 最終需要로 구성되는 $n\times 1$벡터이다.

식 (3.2)는

$$(I-A)x=f \tag{3.4}$$

로 고쳐쓸 수 있는데, 행렬 $I-A$의 逆行列이 존재하면 식 (3.4)에서 다음과 같이 x를 f의 함수로 고쳐쓸 수 있다.

$$x=(I-A)^{-1}f=Cf. \tag{3.5}$$

단, C는 $I-A$의 역행렬인 $n\times n$ 행렬이다.

3.2. HS條件

Hawkins and Simon(1949)은 레온티에프형의 투입산출모형식 (3.4)의 解가 식 (3.5)처럼 주어질 수 있을 뿐만 아니라 이것이 經濟的인 의미를 가질 수 있는 조건 즉, '生產的'일 조건을 제시하였다. 여기서 $n\times n$의 투입계수행렬 A의 順次的 주소행렬을

$$A_i=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix};\ i=1, 2, \cdots, n \tag{3.6}$$

라 하면 HS條件은 다음과 같이 주어진다. 즉,

$$|I_i-A_i|>0;\ i=1, 2, \cdots, n. \tag{3.7}$$

여기서 I_i는 $i\times i$의 항등행렬이다. 이 조건의 의미는 여러 가지로 해석할 수 있으나, 經濟的 意味를 가장 풍부하게 가지고 있는 해석은, '어떤 한 部門의 財貨를 한 단위 생산하는데 소요되는 그 부문으로부터의 直接 및 間接投入所要量의 합계가 1보다 작아야 한다'는 것을 의미한다는 해석이다. 즉 1부문모형에서 말한 生產可能條件을 확장한 개념으로 해석하는 것이다. 그리고 여기서 말하는 '直接 및 間接投入所要量'이 구체적으로 무엇을 의미하는가를 구체적으로 밝히고자 한 것이 DOSSO(Dorfman, Samuelson and Solow, 1958)였다.

3.3. 2部門模型에서의 HS條件

설명을 단순화하기 위하여 2부문모형을 써서 HS條件을 설명해보자. 2부문모형에서 投入係數行列 A는 2×2 행렬이며 HS條件은 다음과 같이 표현할 수 있다. 즉

$$1-a_{11}>0, \tag{3.8a}$$

$$(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{21}a_{12}>0. \tag{3.8b}$$

부등식 (3.8a)가 가지는 經濟的 의미는 자명하다. 그러나 부등식 (3.8b)가 가지는 의미는 그리 자명한 것이 아니다. DOSSO는 그 의미를 다음과 같이 표현하고 있다.

Equation (3.8b) assures us··· that if we add up the direct and indirect inputs of coal that go into a ton of output (the coal to make coal, the coal to make coal to make coal, the coal to make steel to make coal, the coal to make steel to make coal to make coal, the coal to make steel to make steel to make coal to make coal, etc., *ad infinitum*), that all this will be less than one ton [DOSSO(1958, p.215)].

이 글에서 steel=1, coal=2로 놓으면 이 글의 내용은 다음의 부등식으로 표현됨을 쉽게 확인할 수 있다.

(3.9) $$a_{22}+aa_{22}^2+a_{21}a_{12}+a_{21}a_{12}a_{22}+a_{21}a_{11}a_{12}+\cdots<1.$$

따라서 이 부등식의 좌변은 DOSSO(1958)가 解釋하는 中間投入所要量係數라고 말할 수 있다. 이 DOSSO(1958)의 해석은 20여년 동안 경제문헌에서 그대로 定說로 받아들여졌다. 그러나 Jeong(1982)은 이 해석에 대해서 이의를 제기하였다. 이의를 제기하게 된 동기를 살펴보자.

3.4. 中間投入所要量에 대한 두 가지 解釋

HS條件의 첫째 조건 (3.8a)에 의하면 $1-a_{11}$은 0보다 크다. 따라서 이것으로 둘째 조건 (3.8b)의 양변을 나누어도 부등호의 방향은 변하지 않는다. 즉

(3.10) $$(1-a_{22})-a_{21}a_{12}/(1-a_{11})>0$$

로 된다. 그리고 이를 변형하면

(3.11) $$a_{22}+a_{21}a_{12}/(1-a_{11})<1$$

로 되는데, 이를 전개하여 나타내면,

(3.12) $$a_{22}+a_{21}a_{12}+a_{21}a_{11}a_{12}+a_{21}a_{11}^2a_{12}+\cdots<1$$

로 된다. 왜냐 하면

(3.13) $$1/(1-a_{11})=1+a_{11}+a_{11}^2+a_{11}^3+\cdots$$

로 쓸 수 있기 때문이다. 이 부등식의 좌변은 HS條件이 함축하는 中間投入所要量係數라고 해석할 수 있다. 그러나 이는 식 (3.9)에서 DOSSO가 설명하는 中間投入所要量係數와 분명히 다르다. 왜 그럴까?

3.5. DOSSO의 誤解

우리는 위에서 HS條件이 함축하는 中間投入所要量係數와 DOSSO가 설명하는 중간투입소요량계수는 다르다는 것을 알았다. 그리고 논증과정에서 알 수 있는 바와 같이 잘못은 DOSSO의 解釋에 있음도 분명하다. 그러면 DOSSO의 해석은 아무런 근거도 없는 엉뚱한 것이라는 말인가? 그들이 경제학에서 차지하는 권위에 비추어 볼 때 그들의 해석에도 어떤 근거가 있을 것으로 보는 것이 옳지 않을까? 그들의 해석의 근거를 추적해보자.

흔히 레온티에프 행렬이라고 부르는 $I-A$의 逆行列을 C라고 하고 이 행렬의 (n, n)번째 원소를 c_{nn}이라고 하면, 식 (3.5)에서 알 수 있는 바와 같이 이는 n번째 최종수요 F_n이 한 단위 증가할 때, n번째 總產出 X_n이 몇 單位 증가되어야 하는가를 나타내는 일종의 乘數이다. 그러므로 X_n-F_n이 中間投入所要量으로 되고 $1-c_{nn}$은 中間投入所要量係數라고 해석할 수 있다. 2부문모형에서 c_{22}를 직접 평가해보면 다음과 같다.

(3.14) $$c_{22}=1+a_{22}+(a_{22}^2+a_{21}a_{12})+(a_{22}^3+a_{21}a_{12}a_{22}+a_{22}a_{21}a_{12}+a_{21}a_{11}a_{12})+\cdots.$$

그리고 식 (3.9)의 우변을

(3.15) $$r_f=a_{22}+a_{22}^2+a_{21}a_{12}+a_{21}a_{12}a_{22}+a_{21}a_{11}a_{12}+\cdots$$

라 정의하고 이를 식 (3.14)와 비교해보면 우리는 이 식을 다음과 같이 변형할 수 있음을 알 수 있다. 즉

(3.16) $$c_{22}=1+r_f.$$

그러므로 DOSSO가 해석한 中間投入所要量係數 r_f는 바로 $c_{22}-1$의 의미의 계수이었음이 확인되는 것이다. 그러나 그들의 解釋이 잘못이었음이 번복되는 것은 아니다. 그들은 두 가지의 投入所要量의 개념이 있고 그 둘이 서로 다르다는 사실을 인식하지 못하였던 것이다. HS條件의 해석과 관련된 투입소요량의 개념은 위의 r_f가 아니라 식 (3.12)의 좌변으로 정의되는 r_g 즉,

(3.17) $$r_g=a_{22}+a_{21}a_{12}+a_{21}a_{11}a_{12}+a_{21}a_{11}^2a_{12}+\cdots$$

인 것이다. 우리는 r_g를 總產出 1單位를 생산하는 데 소요되는 (직간접)中間投入係數, r_f를 最終需要 1단위를 생산하는 데 소요되는 (직간접)中間投入係數라고 부를 수 있다.

1부문모형에서 우리는 두 투입소요량계수, 즉 總產出 1단위를 생산하는 데 소요되는 총산출의 중간투입소요량계수 r_g와, 最終需要 1단위를 생산하는 데 소요되는 總產出의 중간투입소요량계수 r_f 간에는 일종의 乘數關係가 있고, 이 때 그 승수는 최종수요를 총산출로 변환할 때의 乘數와 같다는 것을 확인한 바 있다. 2부문모형에서의 대응개념 사이에도 그와 유사한 관계가 존재하지 않을까라고 추측하는 것은 당연하겠지만, 이 문제는 아래에서 보다 일반적인 경우를 다룰 때 다루기로 한다.

4. 一般模型에서의 解釋

4.1. HS條件의 解釋

우리는 일반적인 투입계수행렬이

$$(4.1)\qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

로 주어지고 그 주소행렬들이

$$(4.2)\qquad A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix};\ i=1, 2, \cdots, n$$

로 정의될 때, HS條件은,

$$(4.3)\qquad |I_i - A_i| > 0;\ i=1, 2, \cdots, n$$

로 표현될 수 있음을 보았다. 그리고 2부문모형에서 이 조건이 가지는 여러 가지 意味를 해석하였다. 여기서는 一般的인 경우에 이 조건을 어떻게 해석할 수 있는가를 보기로 한다.

행렬 A를 다음과 같이 분할하여 표현해보자.

$$(4.4)\qquad A = A_n = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1m} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & a_{mn} \\ \hline a_{n1} & \cdots & a_{nm} & a_{nn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_m & a_{mn} \\ \hline a_{nm}' & a_{nn} \end{array}\right]$$

단, $m=n-1$이고, 마지막 행렬의 a_{mn}, a_{nm}'는 각각 $m\times 1, 1\times m$의 벡터이다. 그러면 $i=m, n$일 때의 HS條件은

$$(4.5)\qquad |I_m - A_m| > 0,$$

$$(4.6)\qquad |I_n - A_n| > 0$$

로 쓸 수 있다. 그리고 특히 식 (4.6)은

$$(4.7)\qquad \left|\begin{array}{c|c} I_m - A_m & -a_{mn} \\ \hline -a_{nm}' & 1-a_{nn} \end{array}\right| > 0$$

와 같이 분할해서 표현할 수 있으며, 행렬에 관한 한 定理에 의하면 이는 다음과 같이 변형하는 것이 가능하다. 즉

$$(4.8)\qquad |I_n - A_n| = |I_m - A_m|\{1 - a_{nn} - a_{nm}'(I_m - A_m)^{-1}a_{mn}\}$$

라는 관계가 항등적으로 성립한다. 따라서 HS條件이 $i=1, 2, \cdots, m$에 관하여 성립한다면, 특히 $|I_m - A_m| > 0$이 성립한다면, 식 (4.8)의 마지막 표현 즉, $1 - a_{nn} - a_{nm}'(I_m - A_m)^{-1}a_{mn}$의 부호는 항등적으로 $|I_n - A_n|$의 부호와 같다. 따라서 HS條件의 마지막 관계가 성립할 때

(4.9) $$1-a_{nn}-a_{nm}'(I_m-A_m)^{-1}a_{mn}>0$$

의 관계가 항상 성립한다. 즉

(4.10) $$a_{nn}+a_{nm}'(I_m-A_m)^{-1}a_{mn}<1$$

이다.

命題 (4.10)은 HS條件중 m번째까지의 조건이 성립한다는 전제하에서 그 n번째 條件과 동치인 命題이다. 그러므로 명제 (4.10)이 가지는 의미는 HS條件이 가지는 의미와 같다. 그러면 命題 (4.10)은 어떤 의미를 가지는 것으로 해석할 수 있을까? 결론부터 말한다면, 이 명제는 n번째 부문의 總產出 1단위를 생산할 때 자기 부문으로부터의 直間接中間投入所要量이 1보다 작아야 한다는 것을 나타낸다. 그 이유를 설명해보자.

우선 a_{nn}은 直接投入所要量을 나타내는 것이 자명하다. 그리고 좌변의 마지막 표현인 a_{mn}은 $m\times1$벡터로서 n번째 부문을 제외한 나머지 m개 부문으로부터의 投入所要量들을 그 원소로 한다. 그런데 이 투입소요량들을 공급받기 위해서는 m개의 부문들에서 얼마 만큼씩의 總生產增加가 있어야 할 것인가? 이것은 마치 m개 부문에 대한 최종수요벡터가 a_{mn}로 주어졌을 때 그에 대응하는 총산출벡터를 구하는 것과 같으므로 그 크기는 식 (4.10)의 좌변의 후반부에 있는 표현$(I_m-A_m)^{-1}a_{mn}$과 같은 것이 된다. 그리고 이 총산출벡터를 1단위씩 생산하기 위한 n번째 부문으로부터의 투입소요량을 나타내는 벡터가 a_{nm}'라는 $1\times m$벡터이므로, 이것에 소요되는 總生產增加를 곱한 $a_{nm}'(I_m-A_m)^{-1}a_{mn}$이 결국 n번째 부문으로부터의 간접소요량이 된다. 그러므로 식 (4.10)의 좌변은 'n번째 부문의 총생산이 1단위 증가하는 데 소요되는 n번째 부문으로부터의 直接投入所要量과 間接投入所要量의 합'이라고 해석된다. 그리하여 이 총산출 1단위당 直間接投入所要量係數를 r_g라고 하면 이는

(4.11) $$r_g=a_{nn}+a_{nm}'(I_m-A_m)^{-1}a_{mn}$$

로 정의되며, HS條件은

(4.12) $$r_g<1$$

로 표현할 수 있다.

이상의 논의를 바탕으로 HS條件과 同値인 命題를 표현하기 위하여 다음과 같이 記號를 定義하자. 즉,

(4.13) $$\begin{aligned}&r_g(1)=a_{11},\\&r_g(i)=a_{ii}+a_{ij}'(I_j-A_j)^{-1}a_{ji};\ i=1,2,\cdots,n,\ \ j=i-1.\end{aligned}$$

그러면 HS條件과 동치인 명제는 다음과 같이 표현된다.

(4.14) $$r_g(i)<1;\ i=1,2,\cdots,n.$$

4.2. 두 直間接投入所要量係數의 關係

우리는 식 (3.5) 즉

(4.15) $$x=(I-A)^{-1}f=Cf$$

에서

(4.16) $$(I-A)^{-1}=C$$

를 다음과 같이 분할해서 표현하고자 한다.

(4.17) $$\begin{bmatrix} I_m-A_m & -a_{mn} \\ -a_{nm}' & 1-a_{nn} \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} C_m & c_{mn} \\ c_{nm}' & c_{nn} \end{bmatrix}$$

이 식에서 특히 c_{nn}은 n번째 부문의 최종수요 1단위를 충족하기 위한 n번째 부문의 總產出의 產出所要量을 나타낸다. 그러므로

(4.18) $$r_f=c_{nn}-1$$

로 정의하면 r_f는 최종수요 1단위당 直間接中間投入所要量係數로 된다. 또, 이렇게 분할된 행렬에 관한 수학의 한 定理에 의하면, c_{nn}은 다음과 같이 표현된다.

(4.19) $$c_{nn}=[1-a_{nn}-a_{nm}'(I_m-A_m)^{-1}a_{mn}]^{-1}.$$

여기서 식 (4.11)로 정의되는 總產出 1단위당 직간접투입소요량계수 r_g 즉,

(4.20) $$r_g=a_{nn}+a_{nm}'(I_m-A_m)^{-1}a_{mn}$$

을 고려하면 식 (4.19)는 다음과 같이 고쳐 쓰여질 수 있다. 즉

(4.21) $$c_{nn}(1-r_g)=1,\ \text{또는}\ c_{nn}-1=c_{nn}r_g.$$

그리고 (4.18)의 관계를 고려하면, 이는

(4.22) $$r_f=c_{nn}r_g$$

로 된다. 이는 1부문모형에서의 대응개념들 사이의 관계와 정확히 일치한다.

5. 새로운 展開

5.1. Fujita(1991)의 雙對的 接近

Fujita(1991)는 Jeong(1982)의 接近에 대하여 雙對的인 接近方法을 써서 호킨스-사이몬條件과 동치인 명제를 도출하고 있다. 그의 접근은 다음과 같다. 투입계수행렬 A_n의 j번째 열 $[a_{1j}\ a_{2j}\ \cdots\ a_{nj}]'$는 j번째 財貨를 1단위 생산할 때의 각종 재화의 投入所要量이다. 그리고 j번째 재화 속에 n번째 財貨가 직간접으로 투입된 양을 q_j라 하면, 이는

(5.1) $$q_j=q_1a_{1j}+q_2a_{2j}+\cdots+q_ma_{mj}+a_{nj};\ j=1,2,\cdots,n$$

로 쓸 수 있다. 단, $m=n-1$이다. 그리고 이를 벡터로 나타내기 위하여 기호를 다음과 같이 정의하자.

(5.2) $$q'=[q_m'\cdots q_n],\quad q_m'=[q_1\ q_2\ \cdots\ q_m],$$

(5.3) $$A_n=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & a_{mn} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_m & a_{mn} \\ a_{nm}' & a_{nn} \end{bmatrix}$$

그러면 식 (5.1)은 다음과 같이 간단히 표현할 수 있다. 즉

(5.4) $$q'=[q_m'\cdots q_n]=q_m'[A_m \vdots a_{mn}]+[a_{nm}'\cdots a_{nn}].$$

이 식에서 q_m'과 q_n은 非對稱的으로 등장한다. 그러므로 이를 갈라서 써보기로 하면

(5.5) $$q_m'=q_m'A_m+a_{nm}',$$

(5.6) $$q_n=q_m'a_{mn}+a_{nn}$$

로 된다. 그리고 식 (5.5)를 q_m'에 관하여 풀기 위하여 이 식을 변형하면,

(5.7) $$q_m'(I_m-A_m)=a_{nm}'$$

로 된다. 여기서 행렬 I_m-A_m는 행렬 I_n-A_n의 부분행렬이다. 우선 우리가 필요로 하는 행렬의 역행렬이 존재한다면 식 (5.5)를 풀어서,

(5.8) $$q_m'=a_{nm}'(I_m-A_m)^{-1}$$

을 얻는다. 그리고 이 표현들의 의미를 구명하기 전에 행렬 I_n-A_n의 행렬식의 값을 그 부분행렬로 표현해보자. 먼저 이를 분할하여

(5.9) $$I_n-A_n=\begin{bmatrix} I_m-A_m & -a_{mn} \\ -a_{nm}' & 1-a_{nn} \end{bmatrix}$$

로 나타내고 그 앞에 특정의 비특이행렬을 곱하여 정리하면 다음과 같은 결과를 얻는다. 즉

(5.10) $$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ q_m' & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m-A_m & -a_{mn} \\ -a_{nm}' & 1-a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_m-A_m & -a_{mn} \\ 0 & 1-q_n \end{bmatrix}$$

이 등식이 성립하는 것은 식 (5.6)과 (5.7)에 의한다. 이 양변의 행렬식을 각각 취하면 좌변은 $|I_n-A_n|$이고, 우변은 $|I_m-A_m|(1-q_n)$인데 이 둘은 항등이므로

(5.11) $$\frac{|I_n-A_n|}{|I_m-A_m|}=1-q_n$$

이다.

여기서 식 (3.7)로 주어진 HS條件이 $i=1,2,\cdots,m$에 관해서 충족되고 있다고 가정하면, $i=n$일 때의 HS條件은

(5.12) $$|I_n-A_n|>0$$

이다. 그런데 식 (5.11)은 항등식이므로, 이 가정하에서 다음 命題가 성립한다. 즉,

(5.13) $$|I_n - A_n| > 0 \text{ iff } 1 - q_n > 0.$$

이는 이 가정하에서 n번째의 재화의 그 자체로 표시한 가치 q_n이 1보다 작다는 조건이 HS 條件과 동치임을 의미하며 이는 Jeong(1982)에서 얻은 結論과 같다.

그러면 q만으로써 HS條件 전체와 동치인 명제를 나타낼 수는 없을까? 이 명제는 다음과 같이 표현할 수 있다.

命題: 식 (3.7)로 주어지는 HS條件이 성립할 必要充分條件은 식 (5.1)의 解로서의 q가

(5.14) $$q \leq 0 \text{이며 동시에 } q_n < 1$$

인 것이다.

5.2. 호킨스-사이몬-니카이도定理의 새로운 證明

호킨스-사이몬-니카이도 定理란 다음 세 命題가 同値임을 말하는 定理이다. 즉,

命題WS(Weak Solvability): 이 명제는 식 (3.4)에서 적어도 하나의 $f>0$에 대해서 $x>0$인 해가 존재한다는 것이다.

命題SS(Strong Solvability): 이 명제는 식 (3.4)에서 어떤 $f \geq 0$에 대해서도 $x \geq 0$인 해가 존재한다는 것이다.

命題HS(Hawkins-Simon Conditions): 이 명제는 식 (3.7)로 주어지는 호킨스-사이몬 조건을 말한다.

이 定理의 증명은 Nikaido(1970)에 잘 나와 있다. 命題WS는 현실적으로 實證的인 자료에 기초한 투입계수행렬에 관해서는 당연히 성립한다. 命題SS는 만일 그것이 성립한다면 경제적으로 유의미한 임의의 최종수요벡터에 반드시 유의미한 산출벡터가 대응한다는 것이 된다. 그러므로 命題WS와 命題SS가 동치라는 것은 경제적으로 중요한 의미를 가지는 것이 된다. Nikaido(1970)는 이를 HS조건을 매개로 하여 증명하고 있다.

Jeong(1985)은 호킨스-사이몬조건과 동치인 명제 (4.13)을 유도한 셈이므로, 이 同値命題를 써서 호킨스-사이몬-니카이도定理를 증명하는 것은 논리적으로 가능한 일이다. 그리고 그렇게 함으로써 그 증명의 全過程에 경제적으로 의미를 부여할 수 있을 것이다. Dasgupta (1991)는 실제로 이것이 가능함을 보여주고 있다.

서울大學校 經濟學科 敎授
151-742 서울 관악구 신림동
전화: (02)880-6370
팩시: (02)888-4454

參 考 文 獻

姜光夏(1983)：『產業聯關論』, 法文社.

金俊輔(1975)：『產業聯關分析論』, 法文社.

邊衡尹(1963)：『近代經濟學』.

韓國銀行(各年版)：『產業聯關表作成報告書』.

Dasgupta, D. (1991): "Using the Correct Economic Interpretation to Prove the Hawkins-Simon-Nikaido Theorem: One More Note," *Journal of Macroeconomics.*

Dorfman, R., P.A. Samuelson, and R. Solow (1958): *Linear Programming and Economic Analysis*, New York, McGraw-Hill.

Fujita, Yukihiko (1991): "A Further Note on a Correct Economic Interpretation of the Hawkins-Simon Conditions," *Journal of Macroeconomics*, **13**, 381～384.

Hawkins, D., and H. Simon (1949): "Note: Some Conditions of Macroeconomic Stability," *Econometrica*, **17**, 245～248.

Jeong, Ki-Jun (1982): "Direct and Indirect Requirements: A Correct Economic Interpretation of the Hawkins-Simon Conditions," *Journal of Macroeconomics*, **4**, 349～356.

________ (1984): "The Relation between Two Different Notions of Direct and Indirect Input Requirements," *Journal of Macroeconomics*, **6**, 473～476.

Leontief, W. (1951): *The Structure of American Economy, 1919～39*, 2nd ed., New York, Oxford University Press.

Leontief, W., *et al.* (1953): *Studies in the Structure of the American Economy*, New York, Oxford University Press.

Nikaido, Hukukane (1970): *Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics*, Amsterdam, North-Holland.

Takayama, A. (1985): *Mathematical Economics*, 2nd ed., New York, Cambridge University Press.