게임理論的 接近法에 의한 費用配分問題[1]

金 昊 中·錢 英 燮

協調的 게임理論은 경기자들의 이해관계가 상충된 상황에 대해 공정하면서도 효율적인 해결방안을 제시하고 있다. 따라서 협조적 게임이론을 통해 소개된 여러 解들은 현실 세계에서 일어나는 費用配分問題에 다양하게 응용될 수 있으며, 광범위한 분야에서 이러한 사례들이 쉽게 발견된다. 본 논문에서는 파산기업의 자산 배분문제, 공항활주로 건설비용 배분문제, 그리고 다목적댐 건설비용 배분문제 등에 초점을 맞추어 협조적 게임이론을 비용배분문제에 적용한 사례들을 개관하고 있다.

1. 序 論

費用配分問題(cost allocation problem)에서는 경제주체들에게 각기 다른 편익을 제공하는 結合生産物(joint product)이나 서비스의 公同費用을 效率性과 公平性의 관점에서 각 경제주체들에게 합리적으로 배분하는 방법을 연구한다. 이러한 비용배분문제는 현실 세계에서 다양한 형태로 일어나므로, 광범위한 분야에서 그 사례들을 쉽게 찾을 수 있다. 본 논문에서는 다양한 비용배분문제 중에서도 파산기업의 자산 배분문제, 공항활주로 건설비용 배분문제, 그리고 다목적댐 건설비용 배분문제 등에 초점을 맞추어 이러한 비용들을 어떠한 방식으로 배분하는 것이 바람직한 지에 대한 논의를 하도록 하겠다. 이러한 연구는 地方自治制度가 본격적으로 실시됨에 따라 지방자치단체간의 분쟁이 증가하고 있는 우리 나라에서도 다방면에서 응용될 수 있을 것이다.

비용배분의 근거로는 便益이나 費用이 사용될 수 있다. 각 경제주체들이 공동시설로부터 받는 편익에 근거하여 비용을 배분하는 것이 보다 합리적이라고 할 수도 있지만, 便益推定은 일반적으로 매우 어려울 뿐만 아니라, 각 경제주체들의 자발적인 보고에 의존할 경우 각 경제주체들이 전략적으로 행동할 유인을 갖게되므로 편익을 비용배분의 기준으로 사용하기는 어렵다. 반면 비용은 객관적인 계산이 가능할 뿐만 아니라 그 개념이 명확하게 규정될 수 있으므로 비용배분의 근거로 사용하기가 상대적으로 용이하다고 할 수 있다. 따라서 비용배분문제에서는 비용을 근거로 비용배분을 하는 것이 보다 일반적이며, 이 論文에서도 비용에 근거한 비용배분문제에 국한하여 논의를 전개하도록 하겠다.

---

(1) 본 연구는 제원재단의 연구비 지원에 의해 수행되었다.

이러한 비용배분문제에 대해 최근의 연구 동향은 協調的 게임理論(cooperative game theory)을 응용함으로써 그 해결방안을 찾는 것이다. 협조적 게임이론에서는 경기자들의 이해관계가 상충된 상황에 대해 주어진 자료들을 기초로 하여 공평하면서도 효율적인 해결방안을 제시하고자 하므로, 경제주체들이 비용의 분담에 관하여 각기 다른 의견을 갖고 있는 비용배분문제에도 적절하게 응용될 수 있다. 특히 협조적 게임이론의 한 분과인 移轉的 效用 聯合型 게임(transferable utility coalitional form game)에서 소개된 解(solution)들로서 그 특성들이 널리 연구된 샤플리밸류(Shapley value), 中核(nucleolus), 費用隔差法(cost gap method) 등은 비용배분문제에 널리 응용되고 있으며, 다양한 분야에서 그 적용사례들이 쉽게 발견된다. 이 논문에서는 파산기업의 자산 배분문제, 공항활주로 건설비용 배분문제, 그리고 다목적댐 건설비용 배분문제 등의 해결방안으로 이러한 해들이 어떻게 적용되고 있는가를 논의하도록 하겠다.

이 論文의 構成은 다음과 같다. 제2장에서는 비용배분문제를 협조적 게임이론의 형태로 정형화한 다음 이전적 효용 연합형 게임의 주요 해들을 소개한다. 제3장에서는 파산기업의 자산배분에 대해, 제4장에서는 공항 활주로 건설비용의 배분에 대해, 그리고 제5장에서는 다목적 댐의 건설비용 배분에 대해 논의하도록 한다. 마지막으로 제6장에서는 이러한 논의를 정리하고 앞으로의 연구방향을 제시함으로써 맺음말을 대신하도록 한다.

2. 協調的 게임理論과 費用配分問題 紹介

경기자들의 집합을 $N = \{1, 2, \cdots, n\}$이라고 하자. N의 임의의 부분집합 S를 聯合(coalition)이라고 부르며, 연합 S에 속한 경기자들의 수 $|S|$는 s로 표시한다. 각 경기자는 본인이 부담하여야 하는 비용액수에 따라 시설의 사용여부를 결정하게 된다.

費用函數 c는 모든 연합에 대하여 정의되는 함수이며, 연합 S의 費用 $c(S)$는 가장 효율적인 방법으로 연합 S에 속한 경기자들에게 서비스를 제공하는데 드는 비용을 나타낸다. 어떤 경기자들에게도 서비스를 제공하지 않을 때의 비용은 0으로, 즉 $c(\emptyset) = 0$으로 가정한다. 서로 分離된(disjoint) 두 연합들에 대하여 동시에 서비스를 제공하는 것은 각 연합에게 별도의 서비스를 제공하는 가능성도 포함하게 되므로, 임의의 연합 S와 T에 대하여 $c(S \cup T) \leq c(S) + c(T)$의 관계가 성립하게 되어 비용함수 c는 下位加算性(subadditivity)을 충족시킨다. 이 때 비용함수 c를 비용게임의 特性函數(characteristic function)라고 부른다.

費用配分方法(cost allocation method)은 함수 φ로 모든 비용함수 c에 대하여 벡터 $\varphi(c)$

$= (\varphi_i(c))_{i \in N}$를 대응시킨다. 여기서 실수 $\varphi_i(c)$는 비용함수가 c일 때 경기자 i에게 배분된 비용을 나타낸다.

협조적 게임이론이 다양한 비용배분문제에 적용되면서 주목을 받은 협조적 게임이론의 해로는 샤플리밸류, 中核, 費用隔差法 등을 들 수 있다. 이제 이들을 비용배분문제에 적합하도록 정의하겠다. 이러한 비용배분방법들은 협조적 게임의 해로 널리 각광을 받아 왔으나, 실제로 n명의 경기자가 있는 일반적인 게임에서는 $2^n - 1$개 연합의 비용을 계산하여야 하므로 경기자의 수가 많아짐에 따라 그 해의 값들을 계산하기가 어렵다는 문제점을 지니고 있다. 그러나 이 논문에서 논의할 비용배분문제들에 있어서는 그 문제들의 특성에 따라 보다 쉬운 방법으로 그 해의 값들을 계산할 수 있으므로 응용을 보다 쉽게 할 수 있게 된다.

2.1. 샤플리밸류(Shapley value)

Shapley(1953)는 각 경기자가 어떠한 연합에 가입할 경우 각 연합이 추가적으로 부담하게 되는 限界費用에 근거하여 비용을 배분하는 방법을 제안하였으며, 이를 샤플리밸류라고 부른다. 샤플리밸류에서 각 경기자에게 배분되는 비용은 각 연합에 대하여 그 경기자에 의하여 추가적으로 발생하는 한계비용의 가중평균치로서 계산되며, 연합 S에 부여되는 가중치는 임의의 배열에서 경기자 i보다 앞서서 연합 S가 형성되고 그 이후에 $N\backslash(S \cup \{i\})$가 올 확률, 즉 $s!(n-s-1)!/n!$이 된다.

定義: 모든 비용함수 c와 모든 경기자 i에 대해 샤플리밸류 Sh는

$$Sh_i(c) = \sum_{0 \leq s \leq n-1} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \sum_{S \subset N\backslash i, |S|=s} \{c(S \cup \{i\}) - c(S)\}$$

로 정의된다.

샤플리밸류에 의한 비용배분은 코아(core)가 존재한다 하더라도 코아에 속하지 않을 수도 있다는 단점을 지니고 있으나, 비용함수가 오목(concave)할 경우에는 항상 코아에 속하게 된다〔Shapley(1971)〕. 그리고 샤플리밸류는 그 계산이 명확하고 투명할 뿐만 아니라, 모든 문제에 있어 항상 유일하게 존재한다는 장점을 가지고 있다.[2]

---

(2) 샤플리밸류에 대한 보다 자세한 설명은 전영섭(1991a)을 참조.

2.2. 中核(nucleolus)

어떤 비용배분이 코아에 속하는 것이 바람직할 경우에는 샤플리밸류를 사용하는 것이 적합하지 않을 것이다. 따라서 코아가 공집합이 아닌 경우 코아 내의 비용배분을 선택하는 합리적이고 일관성있는 비용배분방법에 대한 연구가 중요하게 된다. 이 문제에 대한 하나의 해답으로는 Schmeidler(1969)에 의해 처음 소개된 中核(nucleolus)을 들 수 있는데, 이는 가장 貧困한 聯合(the least-well-off coalition)을 가능한 한 富有하게 만들어주는 비용배분을 선택하는 비용배분방법이다.

이를 보다 엄밀하게 설명하면 다음과 같다. 모든 비용배분 x와 모든 연합 S와 T에 대해

$$c(S) - \sum_{i \in S} x_i > c(T) - \sum_{i \in T} x_i$$

이면, '비용배분 x에서 연합 S가 연합 T보다 더 부유하다'라고 정의한다. 여기서 $e(x, S) = c(S) - \sum_{i \in S} x_i$를 x에 대한 연합 S의 剩餘(excess)라고 부른다.

定義: 모든 비용함수 c에 대해, $x \in R^N$가 $\sum_{i \in N} x_i = c(N)$인 비용배분의 집합을 B라고 하자. B에 속한 비용배분 x에 대해 모든 연합들의 잉여 $e(x, S) \in R^{2^N \setminus N}$를 계산하여 작은 값부터 큰 값의 순으로 나열한 후, 이를 B에 속한 다른 비용배분과 辭典編纂式 順序(lexicographic ordering)로 비교한 후, 이 중 가장 선호되는 잉여벡터를 지닌 비용배분을 선택하면 이것이 바로 중핵에 의한 비용배분이다. 즉 모든 비용배분 x의 잉여벡터 $e(x, S)$와 비용배분 γ의 잉여벡터 $e(\gamma, S)$를 가장 작은 값부터 사전편찬식으로 비교하여 배분 γ의 잉여벡터가 가장 크다면 비용배분 γ가 가장 선호되며, 이 배분 γ가 바로 중핵에 의한 비용배분이다.

따라서 중핵에 의한 비용배분에서는 가장 빈곤한 연합을 가능한 한 부유하게 만들게 되며, 이는 곧 모든 연합에 대한 잉여의 최소치를 최대로 해주는 비용배분을 찾는 것과 동일하게 된다. 이는 가능한 한 코아의 경계로부터 가운데 방향으로 멀리 있는 코아의 中心點을 찾는 것으로 볼 수도 있다. 해석에 따라서는 샤플리밸류가 限界主義的 입장을 반영하고 있는 반면 중핵은 平等主義的 입장을 반영하고 있다고 볼 수도 있다.

그러나 중핵은 그 계산이 어렵다는 단점을 지니고 있어 이를 보다 쉽게 계산하기 위한 알고리즘에 대한 연구도 활발하게 이루어졌으며, Kopelowitz(1967)에서는 n명의 경기자가 있는 게임에서 최대한 $n-1$개의 선형계획의 해로서 중핵을 계산할 수 있는 알고리즘을

제시하였다.

2.3. 費用隔差法(cost gap method 혹은 τ-*value*)

Tijs and Drissen(1986)에 의해 소개된 費用隔差法(cost gap method, 혹은 τ-*value*)에서는 먼저 결합생산물의 총비용을 分離可能費用(separable cost)과 分離不可能費用(nonseparable cost)으로 나눈다. 경기자 i의 분리가능비용 m_i^c은 대연합 N에서 경기자 i의 限界費用(marginal cost), 즉 $m_i^c = c(N) - c(N\setminus\{i\})$로, 분리불가능비용 $g^c(N)$은 대연합의 총비용에서 총분리가능비용을 제한 나머지, 즉 $g^c(N) = c(N) - \sum_{i\in N} m_i^c$로 정의된다.

定義: 모든 $i \in N$에 대하여

$$w_i^c = \min_{S:i\in S}\{g^c(S)\},\quad a_i = \frac{w_i^c}{\sum_{j\in N} w_j^c}$$

로 정의하자. 이 때 모든 비용함수 c와 모든 경기자 i에 대해 비용격차법 CG는

$$CG_i(c) = m_i^c + a_i g^c(N)$$

로 정의된다.

비용격차법에 따르면 경기자 i의 비용부담액은 경기자 i가 부담하여야 하는 最低費用으로 간주할 수 있는 m_i^c와 最大費用으로 간주할 수 있는 $m_i^c + g^c(S)$의 선형결합이 된다.

3. 破産企業의 資産配分

어떤 企業이 破産하는 경우, 파산한 기업의 자산으로 그 기업의 채권을 모두 갚지는 못하는 경우가 일반적인 현상이며, 따라서 이러한 파산기업의 자산을 채권자들에게 배분하는 방식에 대한 논의가 필요하게 된다. 이 문제는 납세자들의 소득과 총세액이 주어졌을 때 세금을 납세자들에게 배분하는 課稅問題(taxation problem), 또는 상속자들에게 주기로 한 유산이 실제 유산보다 많을 경우 이를 배분하는 방식을 논의하는 遺産相續問題와도 수학적으로 동일하게 나타난다. 이 논문에서는 이러한 문제들을 총괄하여 破産問題(bankruptcy problem)라 부르기로 하겠다. 이러한 파산문제의 역사는 오래되어 이미 탈무

드(Talmud)에서도 논의되고 있으나, 협조적 게임이론을 응용한 체계적인 분석이 이루어지기는 비교적 최근의 일로 O'Neill(1982)이 처음이라고 볼 수 있으며, 이후 현재까지 많은 논문들이 출판되고 있다. 여기에서는 먼저 탈무드에 있는 사례들과 협조적 게임이론의 해간의 관계를 지움으로써, 탈무드의 예를 일반화시킬 수 있음을 보여주도록 하겠다.

3.1. 破產問題의 中核

파산문제의 중핵을 설명하기에 앞서 탈무드에 나오는 이야기를 먼저 소개하도록 하겠다. 옛날 유태인들의 관행에 따르면 결혼 시에는 結婚契約을 의무적으로 작성하고, 이 결혼계약은 추후에 離婚을 하거나 遺産相續을 할 때 그 根據資料로 사용하게 되어있다. 세 여자와 결혼한 남자가 있는데, 이 남자는 처음 결혼에서는 100을, 두 번째 결혼에서는 200을, 그리고 세 번째 결혼에서는 300을 주기로 하였다. 탈무드에 따르면, 이 남자의 사후 남긴 재산이 100인 경우 각 자에게 100/3씩 배분하고, 200인 경우 50, 75, 75를, 그리고 300인 경우에는 50, 100, 150을 배분하도록 하고 있다.

이처럼 탈무드가 제시한 숫자를 보다 일반화하는 데에 대해 오래 동안 연구가 이루어졌으나, 비교적 최근에 들어 Aumann and Maschler(1985)에 의해 어느 정도 공감할 수 있는 해가 얻어진 것으로 보인다. 이들에 따르면, 경기자 i가 제시한 금액을 c_i 그리고 사후 남긴 재산의 가치를 E라고 두고, 연합 S의 가치를 $c(S) = \min\{\sum_{i \in S} c_i, E\}$로 정의한 후 이 게임에 중핵을 적용할 때 얻어지는 배분과 탈무드의 예가 일치함을 보였다. 이는 연합의 가치를 이 연합에 속한 경기자들이 요구하는 금액의 합과 상속유산의 가치 중에서 작은 액수로 정의하였을 때, 탈무드에서 제시하는 숫자가 중핵에 의한 배분과 일치함을 보인 것이다. 오래 전에 기술된 탈무드의 예와 최근에 개발된 게임이론의 해간에 관계를 지울 수 있다는 사실만으로도 흥미로운 일이라 할 수 있을 것이다.

더 나아가서 Aumann and Maschler는 중핵에 의거하여 유산상속문제를 일반적으로 풀었을 경우, 각 자는 자신에게 약속된 액수의 반을 받을 때까지 계속 유산을 받게 되고, 일단 자신에게 약속된 액수의 반을 받게 되면 다른 사람들이 모두 반을 받게 될 때까지 기다리게 된다. 그 후에는 약속은 받았으나 받지 못하게 된 손실분을 따져서 가능한 한 그 손실분을 적게 만드는 원칙 하에 손실분이 큰 사람부터 유산을 상속받는 것이 중핵에 의한 배분임을 밝혔다.

3.2. 破產問題의 샤플리밸류

유산상속문제에 대해 탈무드가 제시하고 있는 또 하나의 예는 다음과 같다. 어떤 사람이 죽었는데, 그의 네 아들들은 동일한 날짜가 적혀있는 합법적인 유서들을 가지고 나타났다. 이 네 유서에서는 첫 번째 아들에게 유산의 전부를, 두 번째 아들에게 1/2을, 세

번째 아들에게 1/3을, 그리고 마지막 아들에게 1/4을 주겠다고 하였다. 이에 대해 Rabbi Ibn Erza가 제시한 해결책은 각자에게 97/144, 25/144, 13/144와 9/144를 주는 것이다.

이 해결책을 제시한 이유는 다음과 같다. 논의의 편의를 위해 有産 總額이 144라고 하자. 마지막 아들은 유산의 1/4, 즉 36을 요구하고 있으며, 이 부분은 다른 세 아들도 똑같이 요구하고 있으므로 36의 1/4, 즉 9를 받아야 한다. 셋째 아들은 유산의 1/3, 즉 48을 요구하고 있는데, 이미 36에서 9를 받았으므로 나머지 부분인 12의 1/3인 4를 더 받아야 한다. 따라서 셋째 아들의 몫은 13(= 9 + 4)이 된다. 마찬가지의 방법으로 둘째 아들의 몫은 25(= 12 + 9 + 4)가 되며, 첫째 아들의 몫은 97(= 72 + 12 + 9 + 4)이 되는 것이다.

이러한 배분방법은 어떤 연합에 속한 경기자들이 요구하는 액수 중에서 그 최고액을 연합의 가치로 정의하였을 때 얻어지는 샤플리밸류에 의한 배분과 동일하게 나타나게 된다. 물론 유산상속문제에서 연합의 가치를 정의하는 방식에 대해서는 異論의 여지가 있을 수도 있겠지만, 이러한 방식으로 연합의 가치를 정의하는 것은 뒤에서 논의할 공항 활주로 비용배분의 경우 비교적 자연스럽다고 할 수 있을 것이다.

3.3. 破産問題의 다른 解들

파산문제을 해결하는 방편으로 가장 많은 사람들이 동의할 수 있는 방법은 비례법일 것이다. Aristotle은 가장 공정한 배분방법은 비례적인 것이며, 비례적이지 않은 배분방법은 공정하지 않다고 하였을 뿐만 아니라, 파산법정 등의 실생활에서 가장 많이 활용되는 방법이 비례법이라고 할 수 있을 것이다. 이러한 비례법의 특성에 대해서도 다양한 측면에서 연구가 이루어졌다〔Banker(1981), O'Neill(1982), Chun(1988), Moulin(1987), 전영섭(1991b) 등〕. 그러나 본 연구에서는 협조적 게임이론에 근거한 배분방법에 초점을 맞추어 논의를 전개하므로 이에 대한 자세한 설명은 생략하도록 한다.

또한 최근에 들어서는 개인들의 효용함수가 단조적인 경우가 아니라 재화를 소비함에 따라 어느 수준까지는 효용이 증가하다가 그 이후에는 감소하는 단봉선호를 지니고 있을 경우에 재화를 배분하는 문제〔Sprumont(1991), Thomson(1994a, 1994b, 1995) 등〕, 그리고 가분적이지 못한 재화를 배분하는 문제〔Moulin(2000)〕 등에 대해 활발한 연구가 이루어지고 있다.

4. 空港 滑走路 建設費用配分

이제 공항에서 활주로를 건설하여 그 비용을 배분하는 문제, 즉 空港費用게임(airport cost game)을 살펴보도록 하겠다. 이 경우에도 게임의 특성을 이용하면 보다 쉬운 방법으

로 앞에서 소개한 해들의 값을 쉽게 계산할 수 있으므로 응용을 쉽게 할 수 있다. 이 장에서는 공항게임의 특성을 살펴본 후, 공항비용게임에서는 비용배분방법들을 어떻게 단순화시킬 수 있는지를 살펴보기로 하겠다.(3)

4.1. 空港費用게임의 特性

항공기의 이착륙에 필요한 공항 활주로의 건설비용은 단순하면서도 특이한 구조를 가지고 있다. 건설하여야 하는 공항 활주로의 규모는 그 시설이 서비스의 대상으로 삼는 항공기 중 가장 긴 활주로가 필요한 항공기에 의해 결정된다는 점이다. 이 점에 착안하면 활주로 건설비용 배분문제는 다음과 같이 단순화시킬 수 있다.

먼저 경기자들의 집합을 N이라고 하자.(4) 경기자들의 유형을 $i = 1, \cdots, m$으로 두고, i유형의 경기자들의 집합을 N_i, 그리고 그 수를 n_i로 나타내면, $\bigcup_{i=1}^{m} N_i = N$이 되고, $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$이 된다. i유형의 경기자들에게 서비스를 제공하기 위하여 필요한 최소비용을 c_i라고 하면, 일반성의 상실 없이 다음의 가정을 할 수 있다.

$$0 = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_m.$$

만약 이착륙시설이 i유형의 항공기에 서비스를 제공하기에 충분하다면 $j < i$인 j유형의 항공기에도 서비스를 제공하기에도 충분할 것이다. 따라서 이착륙시설의 비용배분문제는 최대유형의 항공기에 서비스를 제공하기 위해 필요한 비용을 각 경기자들 사이에 어떻게 배분하는가 하는 문제로 해석될 수 있다. 더 나아가서 공항비용게임의 특성함수는 다음과 같이 바꾸어 정의될 수 있다.

$$c(S) = \max\{c_i : 1 \leq i \leq m, S \cap N \neq \phi, i \in S\}.$$

이 게임에서 비용배분방법은 각 경기자에게 전체비용 $c(N)$을 배분시키는 함수 φ로

$$\varphi(c) = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \sum_{i=1}^{n} x_i = c(N)$$

이 될 것이다.

(3) 공항 활주로 건설비용배분에 대한 보다 자세한 논의는 이상원 · 이종철 · 전영섭(1997)을 참조.

(4) 이 게임에서 경기자는 각 유형의 항공기들이 한 번 착륙하는 행위가 된다.

4.2. 空港게임의 샤플리밸류

Littlechild and Owen (1973)은 공항게임의 경우에 샤플리밸류가 다음과 같이 단순화될 수 있음을 보였다. 먼저 $k = 1, \cdots, m$에 대해 $R_k = \bigcup_{i=k}^{m} N_i$, 그리고 $r_k = \sum_{i=k}^{m} n_i$로 정의하면, 샤플리밸류 Sh는 모든 유형 $i = 1, \cdots, m$과 모든 경기자 $j \in N_i$에 대해

$$Sh_j(c) = \sum_{k=1}^{i} \frac{c_k - c_{k-1}}{r_k}$$

로 계산할 수 있다.(5)

결국 공항게임의 샤플리밸류는 최소유형의 항공기에 이착륙서비스를 제공할 때 필요한 이착륙시설의 비용은 모든 유형의 항공기가 이착륙서비스를 제공받기 위하여 공통으로 필요한 부분이므로 모든 경기자들에게 동일하게 분담시키며, 그 다음부터 각 유형의 항공기에 이착륙서비스를 제공하기 위하여 추가적으로 들어가는 비용은 추가적인 규모의 시설을 필요로 하는 해당 경기자들 사이에 동등하게 배분시킨다.

4.3. 空港게임의 中核

Littlechild (1974)은 공항게임의 경우 중핵이 다음과 같이 단순화될 수 있음을 보여주고 있다. 먼저 $M_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$라고 두면, 공항게임의 중핵은 다음과 같이 주어진다.

$$x_i = r_k,\ i_{k-1} < i < i_k,\ k = 1, \cdots, k'$$

r_k와 i_k는 다음에 의하여 귀납적으로 정의된다.

$$r_k = \min\left[\min_{i_{k-1}+1, \cdots, n-1} \frac{c_i - c_{i_{k-1}} + r_{k-1}}{M_i - M_{i_{k-1}} + 1},\ \frac{c_n - c_{i_{k-1}} + r_{k-1}}{M_n - M_{i_{k-1}}}\right]$$

i_k는 위의 식이 최소치를 달성하는 i의 값 중에서 최대값를 나타낸다(즉 다음과 같은 과정을 거친다. $r_0 = i_0 = c_0 = 0$에서 시작해서 $k = 1, \cdots, k'$까지 계속하는데, 이때 $i_{k'} = n$이 된다).

그런데 위의 식에서 각 유형 경기자의 수가 많은 경우에는 분모에 있는 +1의 영향은

(5) 이 계산에서 $R_1 = N$이며, $r_1 = n$이 된다.

무시할 수 있다. 더 나아가서 $r_{k-1}/(M_i - M_{i_{k-1}})$의 값은 $1/n_i$와 c_i를 곱한 값에 의존하게 되므로, 각 유형 경기자의 수가 많아짐에 따라 그 값이 작아지게 되어 무시할 수 있다. 따라서 이 경우에는 다음과 같은 보다 단순한 방법으로 중핵의 近似値를 구할 수가 있다.

$$\tilde{x}_i = \tilde{r}_k,\ i_{k-1} < i \leq i_k,\ k = 1, \cdots, k'$$

$$\tilde{r}_k = \min_{i_{k-1}+1,\cdots,n}\left[\frac{c_i - c_{i_{k-1}}}{M_i - M_{i_{k-1}}}\right]$$

여기서, i_k는 앞에서와 같이 정의된다.

4.4. 空港게임의 費用隔差法

공항게임의 경우 경기자들의 수가 크므로 가장 큰 유형의 경기자 수 n_m이 2 이상이라고 가정하여도 무방하다. 이 경우에는 어떤 경기자 i가 N_m에 속한다 하더라도 다른 어떤 경기자가 N_m에 속해 있을 것이므로 $c(N) = c(N\backslash\{i\})$이 된다. 따라서

$$m_i^c = 0,\ g^c(S) = c(S)(\text{모든 } S \subset N),$$
$$g^c(N) = c(N) = c_m,\ w_i^c = c_j(\text{모든 } i \in N_j).$$

가 되며, 비용격차법에 의한 비용배분은 모든 $i \in N_j$에 대해

$$CG_i(c) = \left(\frac{c_j}{\sum_{k=1}^{m} n_k c_k}\right) c_m$$

로 단순화된다.

따라서 공항게임에서 비용격차법에 의한 비용배분은 총비용 $c(N)(= c_m)$을 單純 比例的으로 배분하게 된다. 일반적인 경우 비용격차법은 比例法(proportional method)과 상이하나, 공항시설과 같은 특수한 비용함수 하에서는 서로 동일한 방법의 비용배분을 낳게 된다.

5. 多目的댐 建設費用配分

다목적댐은 일단 건설되면 발전, 용수공급, 관개, 홍수방지 등의 목적으로 사용되므로 그 건설비용도 혜택을 입게 되는 해당 주체들이 분담하여야 할 것이며, 이에 따라 各國에서는 그 비용분담방법을 명시적으로 규정하고 있는 경우가 많다. 이 장에서는 美國, 日本, 그리고 韓國에서 그 비용을 어떻게 분담하고 있는지를 살펴봄으로써 협조적 게임이론이 실제 상황에서 광범위하게 적용되고 있는 예를 보여주도록 하겠다.(6)

5.1. 美國과 日本의 경우

기본적으로 다목적댐과 같은 共同施設의 건설비용의 배분문제는 각자의 代替費用(alternative cost)에 비례하도록 배분한다는 아이디어에서 출발한다. 여기서 대체비용은 각 해당 주체들이 공동시설을 대체하는 시설물을 건설할 때 드는 代替建設費로 해석할 수 있다. 따라서, 전체비용 $c(N)$은 각자의 대체비용 $c(i)$에 비례하도록 배분된다.

1930년대 미국의 TVA 계획에서 사용된 '分離費用殘餘便益支出法(SCRB: separable costs remaining benefits method)'은 이러한 비례적 배분방법을 좀 더 발전시킨 것으로서, 앞서 살펴본 비용격차법처럼 전체비용을 분리가능비용과 분리불가능비용으로 구분하여 분리불가능비용만 각 해당 주체에 비례적으로 배분하자는 아이디어에 기초한다. 즉, 전체비용 중에서 분리가능비용은 각 해당 주체의 한계비용 $m_i^c = c(N) - c(N\setminus\{i\})$이므로 해당주체가 그대로 부담하고, 남아있는 비용 $c(N) - \sum_{i\in N} m_i^c$은 적절한 기준에 의해 비례적으로 배분하게 된다. 이 경우, 남아있는 비용을 배분하는 기준으로 이른바 '殘餘便益(remaining benefits)'을 사용하게 되는데, 잔여편익이란 각 해당 주체가 최대로 지불할 수 있는 액수에서 이미 부담한 한계비용을 뺀 나머지 부분을 가리킨다.

다음은 각 해당 주체의 '支拂意思額'을 결정하는 문제이다. 초기의 TVA사업에서는 각자의 대체비용 $c(i)$를 지불의사액으로 간주했는데, 이러한 방식이 바로 '代替費用支出法(ACA: alternative cost avoided)'이다. 따라서 ACA방법에서 잔여편익은 $a_i = c(i) - m_i^c$로 나타난다.

定義: 모든 $i \in N$에 대하여 $a_i = c(i) - m_i^c$로 정의한다. 대체비용지출법에 따른 비용배분 AC는 모든 비용함수 c와 모든 경기자 i에 대해

(6) 다목적댐 건설비용배분에 대한 보다 자세한 설명은 Kim(1990)을 참조.

$$AC_i(c) = m_i^c + \frac{a_i}{\sum_{j \in N} a_j} [c(N) - \sum_{j \in N} m_j^c]$$

로 정의된다.

그러나 오늘날 미국과 일본의 수자원 프로젝트에서 일반적으로 쓰이는 것은 ACA방법이 아니라 SCRB방법이다.(7) 이 방법에서는 각 해당 주체의 支拂意思額을 단순히 $c(i)$로 간주하는 것이 아니라, 편익 $b(i)$와 대체비용 $c(i)$ 중에서 작은 값으로 간주한다. 각 해당 주체에게 $\min\{b(i), c(i)\}$보다 더 큰 값을 지불하도록 요구한다면 그는 더 이상 전체비용의 배분문제에 참여할 유인이 없기 때문이다.

定義: 모든 $i \in N$에 대하여 $r_i = \min\{b(i), c(i)\} - m_i^c$로 정의한다. 分離費用殘餘便益支出法에 따른 비용배분 SC는 모든 비용함수 c와 모든 경기자 i에 대해

$$SC_i(c) = m_i^c + \frac{r_i}{\sum_{j \in N} r_j} [c(N) - \sum_{j \in N} m_j^c]$$

로 정의된다.

만약 모든 해당 주체들에 대해 $b(i) \geq c(i)$이 성립한다면 SCRB방법과 ACA방법은 서로 같게 된다. 두 방법은 모두 효율적이지만 협조적 게임의 해로서 바람직하다고 생각되는 특성 중의 하나인 '코아'에 속하지 않을 수도 있다. 이러한 결과는 두 방법 모두 비용을 배분하는 과정에서 1인 연합과 대연합만 고려하고 다른 연합들은 고려하지 않기 때문에 발생한다.

5.2. 우리 나라의 경우

우리 나라에서는 1966년 제정되고 그 이후 수 차례 개정된 特定多目的댐法 및 그 施行令에 의거하여 다목적 댐 건설비용을 배분하고 있다. 특정다목적댐법시행령에서는 대체타당지출법을 우선적으로 사용하고, 이 방법이 부적당하다고 인정되는 경우에는 優先支出法, 優先代替妥當支出法, 分離費用殘餘便益支出法(SCRB방법), 또는 기타 건설교통부장관이 관계중앙행정기관의 장과 협의하여 정하는 방법을 기준으로 하여 그 부담률을 산정

(7) SCRB방법의 실제 적용에 대한 자세한 논의는 Young(1985)을 참조.

하되, 협의가 이루어지지 아니할 때에는 관계중앙행정기관의 장과 협의하여 선정한 전문기관으로 하여금 그 부담률을 산정하도록 하여 이에 따라 건설교통부장관이 부담률을 정하도록 하고 있다.

1970년에 제정된 특정다목적댐시행령에 따르면, 대체타당지출법은 원칙적으로 다목적댐 건설의 '전체' 비용을 각 사용자의 지불의사액인 $\min\{b(i), c(i)\}$에 비례하여 배분하기 때문에 SCRB방법과는 다르다. 대체타당지출법은 각 해당 주체의 경제적 편익을 명시적으로 고려했다는 점에서 SCRB방법의 변형으로 볼 수 있지만, 분리가능한 각자의 한계비용의 배분을 고려하지 않았기 때문에 SCRB방법보다 훨씬 간단하다.

定義: 모든 $i \in N$에 대하여 $k_i = \min\{b(i), c(i)\}$으로 정의한다. 대체타당지출법에 따른 비용배분 KP는 모든 비용함수 c와 모든 경기자 i에 대해

$$KP_i(c) = \frac{k_i}{\sum_{j \in N} k_j} c(N)$$

로 정의된다.

대체타당지출법 역시 1인 연합과 대연합의 비용만 고려하기 때문에 모든 부분집합에 대한 정보를 요구하는 배분방식에 비해 계산이 간단하다는 장점을 지닌다. 그러나 이러한 계산법은 ACA이나 SCRB방법처럼 최종 배분결과가 코아에 속하지 않을 수도 있다는 문제점을 지닌다.

6. 結 論

이 논문에서는 協調的 게임理論을 응용하여 실제로 해결하고 있는 費用配分問題들의 사례들을 살펴보았다. 우리 나라의 경우 지방자치제가 발전함에 따라 지방자치단체들의 이해관계가 상충하는 상황이 더 많이 나타나고 있으며, 이 경우 협조적 게임이론을 응용함으로써 보다 합리적인 해결방안을 찾을 수 있을 것이다.

또한 협조적 게임이론은 이러한 비용배분문제 외에도 경기자들의 이해관계가 상충되는 상황이라면 언제든지 적용될 수 있다. 고용주와 노동조합간의 勞使協商, 다른 나라와의 通商問題 등에는 協商理論(bargaining theory)의 응용이 가능할 것이며, 또한 諸般 投票制

度 등에도 그 응용이 이루어지고 있다. 지면의 제약상 이러한 문제들에 대한 분석은 다음 기회로 미루기로 한다.

서울大學校 經濟學部 博士過程
151-742 서울특별시 관악구 신림동 산56-1
E-mail: hojkim@snu.ac.kr

서울大學校 經濟學部 教授
151-742 서울특별시 관악구 신림동 산56-1
전화: (02)880-6382
팩시: (02)888-4454
E-mail: ychun@plaza.snu.ac.kr

參 考 文 獻

이상원 · 이종철 · 전영섭(1997): "게임이론적 접근법에 의한 공항이착륙시설의 비용배분," 『경제논집』, **36. 1**, 서울대학교 경제연구소, 79-105.

전영섭(1991a): "샤플리 밸류를 이용한 비용배분의 공평성," 『경제논집』, **30. 2**, 서울대학교 경제연구소, 231-244.

_____ (1991b): "비례소득세제의 공리적 특성," 『한국조세연구』, **7**, 한국조세학회, 77-95.

Aumann, R.J. and M. Maschler(1985): "Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud," *Journal of Economic Theory*, **36**, 195-213.

Banker, R.(1981): "Equity Considerations in Traditional Full-Cost Allocation Practices: An Axiomatic Perspective," in S. Moriarty(ed.), *Joint Cost Allocations*, Norman, University of Oklahoma.

Chun, Y.(1988): "The Proportional Solution for Right Problems," *Mathematical Social Sciences*, **15**, 231-246.

Kim, J.(1990): "Theory and Practice of Cost Allocation in Korea," *Essays on Tax Reform and Cost Allocation*, Part 2, Ph.D. Thesis, Vanderbilt University.

Kopelowitz, A.(1967): "Computation of the Kernels of Simple Games and the Nucleolus of

N-Person Games," Publication **RM-31**, Department of Mathematics, Jerusalem, Hebrew University.

Littlechild, S.C.(1974): "A Simple Expression for the Nucleolus in a Special Case," *International Journal of Game Theory*, **3**, 21-29.

Littlechild, S.C. and G. Owen(1973): "A Simple Expression for the Shapley Value in a Special Case," *Management Science*, **20**, 370-372.

Moulin, H.(1987): "Equal or Proportional Division of Surplus, and Other Methods," *International Journal of Game Theory*, **16**, 769-783.

_____(2000): "Priority Rules and Other Asymmetric Rationing Methods," *Econometrica*, **68**, 643-684

O'Neill, B.(1982): "A Problem of Rights Arbitration in the Talmud," *Mathematical Social Sciences*, **2**, 345-371.

Schmeidler, D.(1969): "The Nucleolus of a Characteristic Function Game," *SIAM Jouranl on Applied Mathematics*, **127**, 1163-1170.

Shapley, L.S.(1953): "A Value for N-Person Games," in H.W. Kuhn and A.W. Tucker(eds.), *Contributions to the Theory of Games II, Annals of Mathematical Studies*, **28**. 307-314, Princeton, New Jersey, Princeton University Press.

_____(1971): "Cores of Convex Games," *International Journal of Game Theory*, **1**, 11-20.

Sprumont, Y.(1991): "The Division Problem with Single-Peaked Preferences: A Characterization of the Uniform Allocation Rule," *Econometrica*, **59**, 509-519.

Thomson, W.(1994a): "Resource-Monotonic Solutions to the Problem of Fair Division when Preferences are Single-Peaked," *Social Choice and Welfare*, **11**, 205-223.

_____(1994b): "Consistent Solutions to the Problem of Fair Division when Preferences are Single-Peaked," *Journal of Economic Theory*, **63**, 219-245.

_____(1995): "Population-Monotonic Solutions to the Problem of Fair Division when Preference are Single-Peaked," *Economic Theory*, **5**, 229-246.

Tijs, S.H. and T.S.H. Drissen(1986): "Game Theory and Cost Allocation Problems," *Management Science*, **32**.

Young, H.P.(ed.)(1985): "Cost Allocation: Methods, Principles, Applications," Amsterdam/New York/Oxford, North Holland.