中核을 利用한 費用配分의 公平性(1)

金 昊 中·錢 英 燮

이 논문에서는 이전적 효용 연합형 게임의 해 중에서 코아(core)와 中核(nucleolus)에 초점을 맞추어 그 특징을 개관하여 본다. 1969년에 소개된 중핵은 코아가 존재하는 경우 코아에 속할 뿐만 아니라 항상 유일한 배분을 대응시킨다는 특징을 지니고 있어, 여러 측면에서 비용배분문제를 해결하는 바람직한 방법 중의 하나로 간주되고 있다. 중핵이 비용배분문제에 실제로 적용되고 있는 사례에 대한 설명과 아울러, 중핵의 공리적 특성들에 대해서도 살펴본다.

1. 머 리 말

協調的 게임(cooperative game) 또는 聯合形 게임(coalitional form game)은 경기자의 집합과 그 경기자들의 부분집합인 聯合(coalition)의 효용가능집합으로 구성된다. 즉 각 연합에서 실현가능한 효용가능집합이 주어졌을 때 어떠한 배분이 공평성과 효율성의 관점에서 바람직한 지를 연구대상으로 하고 있다. 만약 각 연합의 효용가능집합이 어떤 경기자가 1단위의 효용을 포기했을 때 다른 경기자의 효용이 (또는 다른 경기자들의 효용의 합이) 1단위 증가하도록 나타나면 移轉的 效用(transferable utility) 연합형 게임이라고 하고, 그렇지 않으면 非移轉的 效用(non-transferable utility) 연합형 게임이라고 한다.(2) 이 논문에서는 이전적 효용 연합형 게임에 국한하여 논의를 전개하도록 한다.

이전적 효용 연합형 게임에서 가장 먼저 생각해 볼 수 있는 解(solution)가 바로 '코아(core)'이다. 코아는 전체 경기자의 합의로 이루어진 배분이 각 연합의 위협에 영향받지 않고 안정적일 것을 요구한다. 따라서 코아는 비용배분문제의 바람직한 해로 생각될 수 있으나, 게임에 따라서는 존재하지 않거나 큰 집합으로 나타나는 단점을 지닌다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 1969년에 Schmeidler가 도입한 개념이 바로 '中核(nucleolus)'이다. 이 논문에서는 코아와 중핵이 어떠한 해의 개념인지를 소개하기 위해 기존의 연구들을 개관하고 있다.

---

(1) 이 연구는 서울대학교 두뇌한국 21사업 대학교육개혁지원비의 지원에 의해 수행되었음.

(2) 즉 이전적 효용 연합형 게임에서 효용가능집합은 지지벡터가 단위벡터인 초평면으로 나타난다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 이전적 효용 연합형 게임을 소개하고 그 해의 개념인 코아와 중핵을 정의한 다음, 코아의 존재를 보장하는 조건들을 살펴본다. 3장에서는 중핵을 특정한 게임에 적용하여 그 보수가 어떻게 계산될 수 있는가를 설명하고, 4장에서는 유산상속문제, 공항 활주로건설 비용배분문제, 그리고 생산물 배분문제 등 실제의 비용배분문제에 중핵을 적용하여 보도록 한다. 5장에서는 공리적 접근법을 통해 중핵의 특성을 살펴보며, 마지막으로 6장에서는 중핵과 單調性(monotonicity)의 관계를 간단히 살펴봄으로써 맺음말을 대신한다.

2. 移轉的 效用 聯合形 게임에서의 코아와 中核

2.1. 移轉的 效用 聯合形 게임

경기자의 집합 $N = \{1, ..., n\}$이 주어졌을 때, N의 부분집합 S를 聯合(coalition)이라고 부른다. 이전적 효용 연합형 게임, 또는 줄여서 게임은 모든 연합 $S \subseteq N$에 정의되는 實價函數(real-valued function) v로 정의된다.(3) 이 때 $v(S)$를 연합 S의 '값어치(worth)'로 부르며, $v(\phi) = 0$이라고 가정한다. 경기자의 집합이 N으로 주어졌을 때 모든 게임의 집합을 Γ로 나타내도록 한다. 또한 표기의 편의상 $\{i\}$는 i로 표시하기로 한다.

2.2. 코아

報酬벡터(payoff vector) $x = (x_1, ..., x_n)$는 각 경기자가 받게 되는 보수를 나타내는 벡터로, x_i는 경기자 i가 받는 보수를 나타낸다. 게임의 '해(solution)' 또는 '밸류(value)' ϕ는 각 게임 $v \in \Gamma$에 보수벡터 $\phi(v) \subseteq \boldsymbol{R}^N$를 대응시키는 다가함수(correspondence)인데, 한 게임에 여러 보수벡터를 대응시키는 해도 있고, 반면에 유일한 보수벡터를 대응시키는 해도 있다. 전자의 대표적인 예가 '코아(core)'라고 볼 수 있다:

定義 1: 각 게임 $v \in \Gamma$에 대하여 $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$을 만족하는 보수벡터 $x = (x_1, ..., x_n)$가 모든 연합 $S \subseteq N$에 대하여 다음을 만족한다고 하자:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S).$$

(3) 앞으로 집합의 포함관계 $\subset$과 $\subseteq$를 구분하여 나타내도록 한다. 포함관계 $\subset$은 '眞部分集合(proper subset)'을 나타내는 것으로, 두 집합 S와 T가 주어졌을 때 $S \subset T$는 $S \subseteq T$와 $S \neq T$을 동시에 의미한다.

이러한 보수벡터 x로 이루어진 집합을 게임 v의 코아(core)라고 하고, $C(v)$라고 나타낸다.

게임에 따라 코아에 속하는 보수벡터는 무수히 많을 수도 있는 반면에 공집합으로 나타나기도 한다.

2.3. 中核

게임의 '유일한' 결과를 얻기 위해 해의 개념을 좀더 강화시킬 수도 있다. 즉 어떤 게임에 대해 항상 유일한 보수벡터를 대응시키도록 요구할 수도 있으며, 이와 관련된 대표적 해의 개념으로는 '샤플리밸류(Shapley value)'와 '중핵(nucleolus)'을 들 수 있다.

샤플리밸류는 각 경기자의 보수를 그가 각각의 연합에 기여하는 한계공헌의 가중평균으로 정하며, 그 가중치로 연합의 크기를 이용한다〔Shapley(1953)〕.(4) 이러한 샤플리밸류는 전체연합의 값어치를 분배하는 공평한 방식으로 생각될 수도 있지만, 게임에 따라서는 샤플리밸류가 코아에 속하지 않을 수도 있다는 단점을 지니고 있다.(5) 코아는 보수벡터의 安定性(stability)과 관계 있으므로 게임의 해가 항상 코아에 속하는 것이 바람직하다고 생각할 수도 있으며, 이러한 해로 대표적인 것이 중핵이다〔Schmeidler(1969)〕.

定義 2: 각 게임 $v \in \Gamma$에 대하여 $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$을 만족하는 보수벡터 $x = (x_1, \ldots, x_n)$의 집합을 $B(v)$라고 하자. 각 보수벡터 $x \in B(v)$가 주어졌을 때 모든 연합 $S \subset N$에 대하여 $e(x; S)$를 다음과 같이 정의하자:

$$e(x; S) = \sum_{i \in S} x_i - v(S).$$

이로부터 '超過벡터(excess vector)' $e(x) = \{e(x; S)\}_{S \subset N} \in \boldsymbol{R}^{2^N \setminus N}$을 정의할 수 있다. 초과벡터 $e(x)$를 구성하는 각 $e(x; S)$ 값들을 가장 작은 것부터 차례로 재배열한 후 $\hat{e}(x)$로 나타내도록 한다.

한편 모든 벡터 $x, y \in \boldsymbol{R}^{2^N \setminus N}$에 대해 ① $x_1 > y_1$이거나, ② $k(\geq 2)$가 존재하여 $x_k \geq y_k$과 모든 $m \leq k-1$에 대해서 $x_m = y_m$이 성립하면, 벡터 x가 '辭典編纂式 順序

(4) 샤플리밸류에 대한 논의는 전영섭(1991)을 참조.

(5) 모든 경기자 $i \in N$와 모든 $S, T \subseteq N \setminus i$에 대해, 만약 $S \subseteq T$일 때,

$$v(S \cup i) - v(S) \leq v(T \cup i) - v(T)$$

를 만족한다면 v를 볼록게임(convex game)이라고 한다. 볼록게임에서는 샤플리밸류가 항상 코아에 속하게 된다〔Shapley(1971)〕.

(lexicographic ordering)' 에 의해 벡터 y보다 선호된다고 하며 $x >_{lex} y$라고 나타낸다. 이 때 모든 $x \in B(v)$에 대해 보수벡터 $\gamma(v) \in B(v)$가 $\hat{e}(\gamma(v)) >_{lex} \hat{e}(x)$를 만족하면 $\gamma(v)$는 게임 v의 '중핵(nucleolus)' 이 된다.

보수벡터 x가 코아에 속한다면 모든 $S \subset N$에 대해 $e(x; S) \geq 0$일 것이므로, 코아가 공집합이 아닌 게임에서 중핵은 반드시 코아에 속하게 됨을 쉽게 알 수 있다.

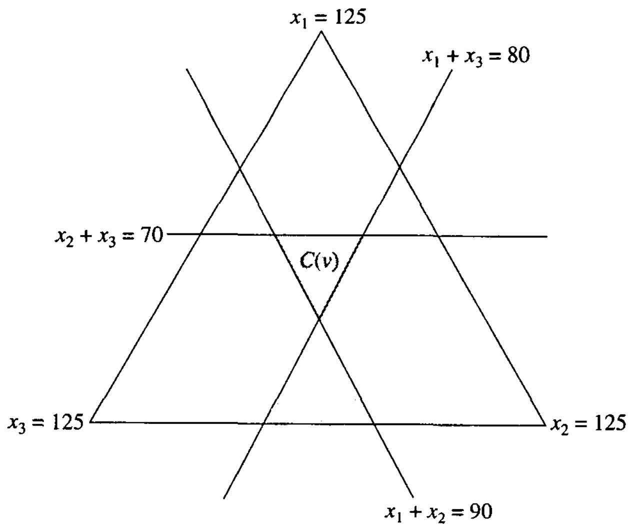
2.4. 均衡게임과 코어의 存在

간단한 예로서, $N = \{1, 2, 3\}$, $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(12) = 90$, $v(23) = 70$, $v(13) = 80$, $v(N) = 125$인 게임을 생각해 보자. 이 경우에 보수벡터 $x = (x_1, x_2, x_3)$가 코아에 속하기 위해서는 다음 부등식들을 모두 만족해야 한다:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 125, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0,$$
$$x_1 + x_2 \geq 90, \quad x_2 + x_3 \geq 70, \quad x_1 + x_3 \geq 80.$$

〈그림 1〉에서는 $x_i \geq 0$와 $x_1 + x_2 + x_3 = 125$에 의해 형성되는 심플렉스(simplex)에 위 부등식들을 만족하는 영역을 나타내고 있다. 이 영역이 바로 코아이며, 일반적으로 코아에 속하는 보수벡터가 유일하지 않음을 알 수 있다.

코아가 지닌 단점으로는 게임에 따라서는 코아가 존재하지 않을 수도 있다는 점을 들



〈그림 1〉

수 있다. 예를 들어, 위 게임에서 $v(N)$만 125에서 115로 바꾸면 코아가 존재하지 않게 된다. 보수벡터 y가 코아에 속하기 위해서는 부등식 $y_1 + y_2 \geq 90$, $y_2 + y_3 \geq 70$, $y_1 + y_3 \geq 80$을 모두 만족해야 하는데, 세 부등식을 결합하면 $y_1 + y_2 + y_3 \geq 120$이므로 $y_1 + y_2 + y_3 = 115$라는 조건과 모순된다. 이 결과를 직관적으로 해석하자면, 비록 게임이 '超加算的(superadditive)' 일지라도 경기자간 안정적인 협조적 결과를 이끌어 내기에는 전체연합의 값어치가 너무 작다고 볼 수 있다.(6)

그러나 '均衡게임(balanced game)'의 경우에는 코아가 항상 존재한다. 각 경기자 $i \in N$에 대해서, i가 속한 모든 연합 $S \subset N$을 찾아 $\sum_{S \ni i} \delta_S = 1$이 되도록 하는 $\delta = \{\delta_S\}_{S \subset N} \in R^{2^N \backslash \emptyset}$(단, 모든 δ_S에 대해 $0 \leq \delta_S \leq 1$)를 찾을 수 있다면 이 벡터 δ를 均衡加重値(balanced weights)라고 한다. 만약 게임 v에 대해 모든 균형가중치 δ가

$$\sum_{S \subset N} \delta_S \cdot v(S) \leq v(N)$$

을 만족하면 v를 균형게임이라고 부르는데, 균형게임에는 반드시 코아가 존재하며 역으로 코아가 존재하기 위해서는 게임 v가 균형게임이 되어야 한다[Bondavera(1962)].(7)

$N = \{1, 2, 3\}$인 게임에서 균형가중치를 찾아보면, 각 경기자들을 중복없이 分割(partition)하여 (1, 2, 3), (12, 3), (1, 23), (2, 13)의 각 분할에는 각 연합 S에 $\delta_S = 1$을 부여하고 나머지는 0을 부여하면 벡터 δ^1, δ^2, δ^3, δ^4를 찾을 수 있다. 또다른 균형가중치로는 $|S| = 2$인 연합 S에 $\delta_S = 1/2$을 부여하고 나머지는 0으로 하는 벡터 δ^5를 찾을 수 있다(〈表 1〉 참조).

위와 같은 균형가중치 벡터 $\delta^1, \ldots, \delta^5$가 주어졌을 때 균형게임이 되기 위해서는 다음 부등식을 만족해야 한다:

---

(6) '초가산적(superaddeltaive)' 게임이란, 전체연합 N을 중복없이 $S_1, \ldots, S_K$로 分割(partition)했을 때, 모든 분할 방식에 대해

$$\sum_{k=1}^{K} v(S_k) \leq v(N)$$

을 만족하는 게임이다. 위에서 예로 제시된 게임은 $v(N) > \sum_{i \in N} v(i)$, $v(N) > v(1) + v(23)$, $v(N) > v(2) + v(13)$, $v(N) > v(3) + v(12)$를 모두 만족하기 때문에 초가산적 게임이다.

(7) 이 결과를 직관적으로 해석하자면, 균형게임이 되기 위해 위 조건을 만족한다는 것은 모든 연합 $S \subset N$ 에 대해 $v(S)$가 $v(N)$에 비해 지나치게 크지 않다는 것을 의미한다. 코아라는 개념이 보수벡터의 안정성을 요구한다는 점을 생각해 보면, 위 조건이 코아의 존재를 보장한다는 것을 알 수 있다.

〈表 1〉 均衡加重値

연합	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{2, 3}	{1, 3}
δ^1	(1,	1,	1,	0,	0,	0)
δ^2	(0,	0,	1,	1,	0,	0)
δ^3	(1,	0,	0,	0,	1,	0)
δ^4	(0,	1,	0,	0,	0,	1)
δ^5	(0,	0,	0,	1/2,	1/2,	1/2)

$$v(1) + v(2) + v(3) \le v(N)$$
$$v(1) + v(23), \quad v(2) + v(13), \quad v(3) + v(12) \le v(N)$$
$$\frac{1}{2}[v(12) + v(23) + v(13)] \le v(N).$$

따라서 앞서 살펴본 3인 게임의 예에서 $v(N)$이 120보다 커야 코아가 존재하게 됨을 알 수 있다.

3. 中核에 의한 報酬計算法

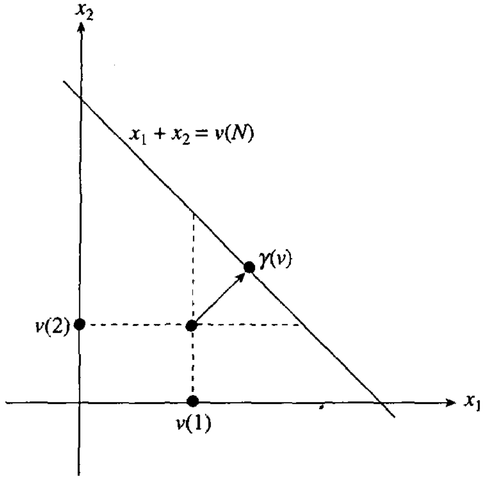
이 장에서는 어떤 게임에 중핵의 개념을 적용할 때 각 경기자의 보수가 어떻게 계산되는 지를 살펴보도록 한다. 우선 가장 간단한 형태로 2인 게임을 살펴본 후, 3인 게임의 경우로 확장하도록 하겠다.(8)

3.1. 2人 게임의 境遇

이제 $N = \{1, 2\}$인 게임에 대해 중핵을 구해 보도록 한다. 이 게임에서는 초과벡터가 $(x_1 - v(1), x_2 - v(2))$이므로, 보수벡터 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$가 중핵이 되기 위해서는 최소극대화 문제 $\max_{x \in B(v)} \min[x_1 - v(1), x_2 - v(2)]$의 해가 되어야 한다. 그런데 $x \in B(v)$라는 효율성 조건에 의해 $x_1 + x_2 = v(N)$이므로 $(x_1 - v(1)) + (x_2 - v(2))$는 상수값이다. 합이 일정한 변수들에 최소극대화 문제를 적용하면 $\gamma_1 - v(1) = \gamma_2 - v(2)$가 성립하므로, 중핵 γ는 다음과 같다.

$$\gamma_1 = v(1) + \frac{1}{2}[v(N) - v(1) - v(2)],$$
$$\gamma_2 = v(2) + \frac{1}{2}[v(N) - v(1) - v(2)].$$

(8) n명으로 이루어진 일반적인 게임에서 중핵을 계산하는 것은 쉽지 않다. 3인 게임의 경우라 하더라도 게임의 일반성을 유지한 채 중핵을 구하는 것은 쉽지 않다.



〈그림 2〉

〈그림 2〉에서 보여주듯이, 중핵 γ는 샤플리밸류와 일치하고 코아가 존재하는 게임에서는 언제나 코아에 속하게 된다는 것을 확인할 수 있다.

3.2. 3人 게임의 境遇

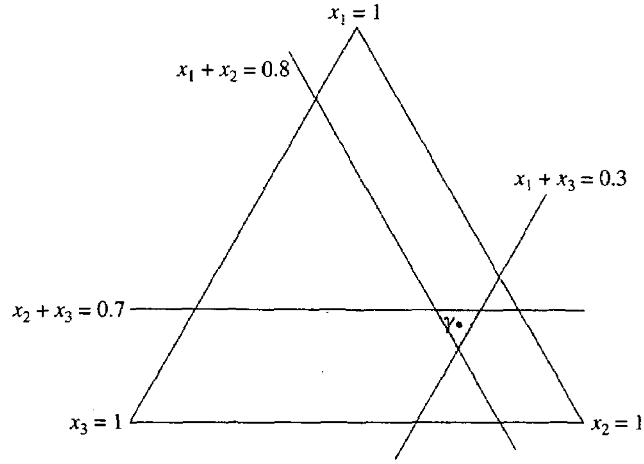
경기자가 3명 이상인 일반적인 게임에 대해서 중핵을 구하는 것은 쉬운 일이 아니다. 여기서는 $N = \{1, 2, 3\}$이고 $v(i) = 0 (i = 1, 2, 3)$, $v(N) = 1$, $0 \leq v(ij) \leq 1 (i \neq j)$로 단순화된 게임에 대해서 중핵을 계산해 보도록 한다.

(a) 2人 聯合이 强한 境遇

모든 2인 연합에 대해 $v(ij) + v(jk) \geq 1$이 성립한다고 하자. 이처럼 2인 연합의 값어치가 충분히 큰 경우에는 전체 연합에 대한 보수벡터의 안정성이 낮아지므로, 코아가 매우 작거나 존재하지 않게 된다. 예를 들어, $v(12) = 0.8$, $v(13) = 0.3$, $v(23) = 0.7$인 경우를 생각해 보자. 이 때는 $\frac{1}{2}(v(12) + v(13) + v(23)) \leq 1$이므로 (비교적 작은 영역의) 코아가 존재하며, 〈그림 3〉에서는 이를 심플렉스의 삼각형 영역으로 나타내고 있다.

2인 연합이 강한 게임에서는 중핵을 구하기 위한 최소극대화 문제를 풀 때 2인 연합에 대한 초과벡터만 고려하면 된다.(9) 즉 다음의 문제를 풀면 된다:

(9) 2인 연합의 값어치가 크면, 1인 연합의 초과벡터값인 $e(x, 1)$, $e(x, 2)$, $e(x, 3)$들은 최소값이 될 수 없다. 각 1인 연합의 초과벡터값보다 작은 2인 연합의 초과벡터값이 반드시 존재하기 때문에, 실제로 최소극대화 문제를 풀기 위해서는 2인 연합의 초과벡터값들만 고려하면 되는 것이다.



〈그림 3〉

$$\max_{x \in B(v)} \min[e(x, 12), e(x, 13), e(x, 23)].$$

효율성 조건 $x \in B(v)$에 의해 $e(x, 12) + e(x, 13) + e(x, 23)$의 값은 일정하므로, 중핵 γ는 $e(\gamma, 12) = e(\gamma, 13) = e(\gamma, 23)$로부터 쉽게 구할 수 있다:

$$\gamma = (\frac{0.7}{3}, \frac{1.9}{3}, \frac{0.4}{3}) \approx (0.23, 0.63, 0.13).$$

〈그림 3〉에서 중핵 γ는 코아를 이루는 삼각형 영역의 무게중심이 된다는 것을 알 수 있다.(10)

한편 2인 연합의 값어치가 더욱 커지면 코아가 존재하지 않게 된다. 예를 들어, 각 값어치가 0.1씩 증가하여 $v(12) = 0.9$, $v(13) = 0.4$, $v(23) = 0.8$이 되면 코아가 존재하지 않는다. 이러한 경우에도 중핵 γ는 그대로 (0.7/3, 1.9/3, 0.4/3)이 되는데, 〈그림 4〉를 보면 γ는 새로운 삼각형 영역의 무게중심이 된다는 것을 알 수 있다. 물론 이 삼각형은 〈그림 3〉의 경우와는 달리 코아를 나타내지는 않는다.(11)

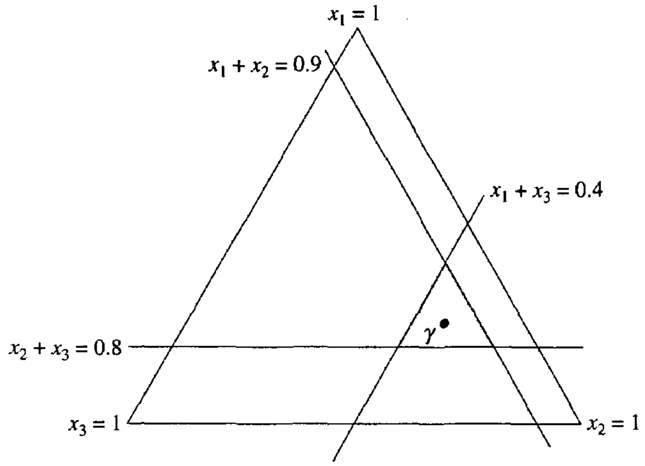
(b) 2人 聯合이 弱한 境遇

이번에는 모든 2인 연합에 대해 $v(ij) \le \frac{1}{3}$이 성립한다고 하자. 이처럼 2인 연합의 값

---

(10) 이것은 삼각형의 세 꼭지점을 이루는 벡터들의 평균을 구하면 정확히 γ가 된다는 것으로 확인해볼 수 있다.

(11) 이 삼각형 영역을 '그림자 코아(shadow core)'라고 부르기도 한다.



〈그림 4〉

어치가 1/3보다 작아지면, 중핵을 구하기 위한 최소극대화 문제에서는 1인 연합에 대한 초과벡터만 고려하면 된다. 즉 다음의 문제를 풀면 된다:

$$\max_{x \in B(v)} \min[e(x, 1), e(x, 2), e(x, 3)].$$

(a)와 마찬가지로 효율성 조건에 의해 $e(x, 1) + e(x, 2) + e(x, 3)$의 값은 일정하므로, 중핵 γ는 $e(\gamma, 1) = e(\gamma, 2) = e(\gamma, 3)$로부터 $\gamma = (1/3, 1/3, 1/3)$이 된다.(12)

(c) 2人 聯合이 强하지도 弱하지도 않은 境遇

이번에는 $v(12) = 0.4$, $v(23) = 0.2$, $v(13) = 0.9$인 3인 게임을 생각해 보자. 이 때는 코아가 너무 크지도 않고 너무 작지도 않아서 (a)와 (b)의 중간 정도에 해당한다. 이 게임에서 중핵을 구하기 위해서는 값어치가 가장 큰 2인 연합인 $\{1, 3\}$과 그에 대응되는 1인 연합인 $\{2\}$의 초과벡터만 고려하면 된다:

$$\max_{x \in B(v)} \min[e(x, 2), e(x, 13)].$$

효율성 조건에 의해 $e(x, 2) + e(x, 13)$은 0.1이라는 상수값이므로 $\gamma_2 = 0.05$, $\gamma_1 + \gamma_3 =$

(12) 2인 연합의 값어치가 충분히 작으면 전체 연합에 대한 보수벡터의 안정성이 커지므로 코아의 영역이 넓어진다. 이 때는 심플렉스 상에서 코아를 나타내는 삼각형 영역이 심플렉스를 벗어날 정도로 커지며, 심플렉스의 무게중심 (1/3, 1/3, 1/3)이 중핵이 된다.

0.95임을 쉽게 알 수 있다. 또한 초과벡터 값들의 최소값이 0.05라는 사실로부터 $\gamma_1 \geq 0.4$, $\gamma_3 \geq 0.2$도 역시 알 수 있다.

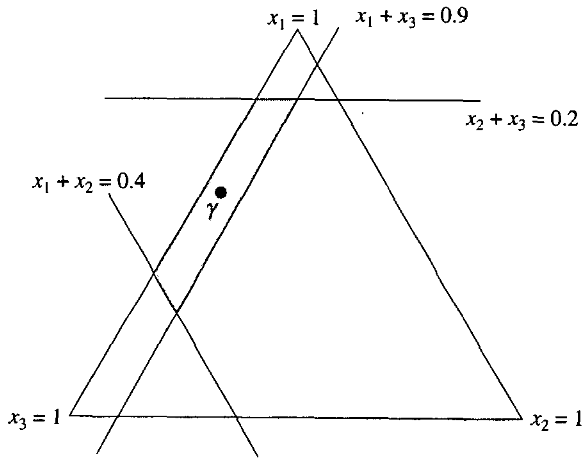
그러나 위의 부등식만으로는 중핵을 유일하게 결정할 수 없으므로, 유일한 보수벡터를 구할 때까지 최소극대화 문제를 계속 풀어야 한다. 초과벡터 값들 중에서 두 번째로 작은 값을 극대화해야 하며, 이번에는 $e(x, 12)$와 $e(x, 23)$만 고려하면 된다:

$$\max_{x \in B(v)} \min[e(x, 12), e(x, 23)].$$

효율성 조건과 $\gamma_2 = 0.05$로부터 $e(x, 12) + e(x, 23)$이 0.45라는 상수값이 된다는 것을 알 수 있고, 이로부터 $\gamma_1 = 0.575$, $\gamma_3 = 0.375$임을 알 수 있다. 결국 이 게임의 중핵은

$$\gamma = (0.575, 0.05, 0.375)$$

가 되며, 〈그림 5〉에서는 이를 나타내고 있다.(13)



〈그림 5〉

(13) 〈그림 5〉에서 코아는 사각형으로 나타난다. 일반적으로 심플렉스 상에서 코아는 삼각형으로 나타나지만, 이 게임에서는 코아 영역의 일부가 심플렉스를 벗어나므로 사각형으로 나타나게 된 것이다. 이 게임의 중핵 γ는 사각형의 네 꼭지점을 이루는 벡터들의 평균이라는 점에서 이 사각형의 중심이라고 볼 수 있다.

4. 中核을 應用한 配分問題들

앞에서는 일반적인 이전적 효용 연합형 게임에서 중핵에 의한 보수벡터가 어떻게 계산될 수 있는 지를 살펴보았다. 중핵에 의한 배분방식은 실제로 여러 다양한 配分問題(allocation problem)들에 적용될 수 있는데, 이 장에서는 유산상속문제, 공항 활주로 건설비용배분문제, 그리고 생산경제의 생산물 배분문제에 중핵을 적용했을 때 어떠한 결과를 얻을 수 있는 지 살펴보도록 한다.(14)

4.1. 遺産相續問題

이전적 효용 연합형 게임의 분석틀을 적용하여 자원배분문제를 해결할 수 있는 흥미로운 예가 바로 유산상속문제이다. 전형적인 유산상속문제는 어떤 사람이 죽었을 때 남은 유산이 상속인들에게 약속한 금액보다 적을 때 발생한다.(15) Aumann and Maschler(1985)는 바빌로니안 탈무드(Babylonian Talmud)의 Mishna에 기록된 유산상속문제를 소개하고 있는데, 그 내용은 다음과 같다:

옛날 유태인의 관행에 따르면 결혼 시에는 결혼계약을 의무적으로 작성하고, 이 결혼계약은 추후에 이혼하거나 유산상속을 할 때 그 근거자료로 사용하게 되어 있다. 세 여자와 결혼한 남자가 있는데, 이 남자는 처음 결혼에서는 100을, 두 번째 결혼에서는 200을, 그리고 세 번째 결혼에서는 300을 주기로 약속하였다. 이 남자가 죽었을 때 그가 남긴 총유산이 요구액의 총합인 600보다 적을 때에는 적절한 배분이 필요한데, 총유산이 각각 100, 200, 300일 때 탈무드에 제시된 배분방식은 〈表 2〉와 같다

탈무드의 예에 따르면, 총유산이 100일 때는 세 아내에게 똑같이 $33\frac{1}{3}$씩 배분하고, 총

〈表 2〉 탈무드의 例

요구액 / 총유산	100	200	300
100	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$
200	50	75	75
300	50	100	150

(14) 비용배분문제에 대한 자세한 논의는 김호중 · 전영섭(2001)을 참조.

(15) 이와 비슷한 상황으로서, 파산한 기업의 남은 자산이 상환하기로 약속한 부채보다 적은 경우를 생각해 볼 수 있다. 즉 부도기업의 자산정리 문제에 이전적 효용 연합형 게임의 분석틀을 적용할 수 있을 것이다. 자세한 논의는 O'Neill(1982)을 참조.

유산이 300일 때는 각자가 주장하는 몫에 비례하여 50, 100, 150으로 배분하도록 한 반면, 총유산이 200일 때는 50, 75, 75로 배분하도록 하고 있다. 이러한 탈무드의 배분방식을 일반화하기 위해 오랫동안 연구가 이루어졌는데, Aumann and Maschler(1985)는 유산상속문제를 적절한 이전적 효용 연합형 게임으로 바꾸면 탈무드의 예가 그 게임의 중핵과 일치함을 보였다.

유산상속문제를 이전적 효용 연합형 게임으로 바꾸는 방법은 각 연합에 어떠한 값어치를 부여하는가가 중요하다. 예시된 상속문제는 $N = \{1, 2, 3\}$이고 총유산이 E, 세 아내의 요구액이 $c = (c_1, c_2, c_3)$인 게임 (E, c)로 생각할 수 있는데, 각 연합 $S \subseteq N$의 값어치는 다음과 같이 정의할 수 있다:

$$v(S) \equiv \max[0, E - \sum_{j \in N \setminus S} c_j].$$

즉 각 연합의 값어치는 총유산에서 그 연합에 속하지 않은 경기자들의 총 요구액을 뺀 나머지로 정의된다. 물론 그 값이 음수이면 유산상속을 포기할 것이므로 연합의 값어치 $v(S)$가 음수가 될 수는 없다. 따라서 앞의 게임은 〈表 3〉과 같이 바꾸어 쓸 수 있다.

〈表 3〉을 살펴보면, 이 게임은 앞 장에서 분석한 3인 게임과 유사함을 알 수 있다. 즉 총유산 E가 100일 때는 2인 연합의 값어치가 모두 0이 되어 2인 연합의 약한 경우 (b)에 해당하고, E가 200이나 300일 때는 2인 연합이 강하지도 약하지도 않은 경우 (c)에 해당한다. 따라서 $E = 100$일 때 앞 장의 결과를 그대로 적용하면 이 게임의 중핵은 $(33\frac{1}{3}, 33\frac{1}{3}, 33\frac{1}{3})$이 되어 탈무드의 예와 일치한다.

이제 $E = 200$일 때 이 게임의 중핵 γ을 구해 보자. 앞서 (c)에서 보았듯이, 중핵을 구하기 위해서 초과벡터의 모든 값을 고려할 필요 없이 값어치가 가장 큰 2인 연합의 초과벡터값 $e(x, 23)$과 그에 대응되는 $e(x, 1)$만 고려하면 된다:

$$\max_{x \in B(v)} \min[e(x, 1), e(x, 23)].$$

〈表 3〉 遺產相續問題를 協調的 게임으로 바꾼 結果

총유산 \ 값어치	$v(1)$	$v(2)$	$v(3)$	$v(12)$	$v(13)$	$v(23)$	$v(N)$
100	0	0	0	0	0	0	100
200	0	0	0	0	0	100	200
300	0	0	0	0	100	200	300

효율성 조건에 의해 $e(x, 1) + e(x, 23)$은 100으로 일정하므로 γ_1은 50이 된다. 한편 γ_2와 γ_3를 결정하기 위해 다시 다음과 같은 문제를 푼다:

$$\max_{x \in B(v)} \min[e(x, 2), e(x, 3), e(x, 12), e(x, 13)].$$

그런데 $e(x, 12) = e(x, 2) + 50$과 $e(x, 13) = e(x, 3) + 50$이라는 사실로부터 $e(x, 2)$와 $e(x, 3)$만 고려하면 되고, 두 값의 합이 일정하므로 최종 결과는 $\gamma_2 = \gamma_3 = 75$가 된다. 즉 이 게임의 중핵은 $\gamma = (50, 75, 75)$가 되고, 이 결과는 탈무드의 예와 일치한다.

$E = 300$일 때에도 마찬가지 방법으로 중핵을 구할 수 있다. 다음의 문제

$$\max_{x \in B(v)} \min[e(x, 1), e(x, 23)]$$

에서, 효율성 조건에 의해 $e(x, 1) + e(x, 23)$은 100으로 일정하므로 γ_1은 50이 된다. 또한 γ_2와 γ_3를 결정하기 위해 다시 다음의 문제를 푼다:

$$\max_{x \in B(v)} \min[e(x, 2), e(x, 13)].$$

역시 두 값의 합이 일정하므로 $\gamma_2 = \gamma_3 - 50$이 된다. 즉 이 게임의 중핵은 (50, 100, 150)이 되어 탈무드의 예와 일치한다.

한편 이 결과를 샤플리밸류와 비교하면, E가 100이나 300일 때는 샤플리밸류와 중핵의 결과가 일치하지만 E가 200일 때는 서로 달라진다. $E = 200$일 때 샤플리밸류에 의한 배분은 $(33\frac{1}{3}, 83\frac{1}{3}, 83\frac{1}{3})$이 되는데, 중핵에 의한 배분이 좀더 '平等主義的(egalitarian)'임을 알 수 있다.

4.2. 空港 滑走路 建設費用配分問題

어떠한 지역에서 새로운 공항 활주로를 건설하기로 결정했다고 하자. 이 경우 각 항공기의 기종에 따라 필요한 활주로의 길이가 달라지는데, 모든 항공기가 이착륙할 수 있도록 하기 위해서는 가장 긴 활주로가 필요한 항공기가 이착륙할 수 있도록 건설하여야 한다. 이제 이 활주로 건설비용을 배분하는 문제에 중핵을 적용하여 보도록 한다.(16)

먼저 이 문제를 정형화하면 다음과 같다:

(16) 공항 활주로 건설비용배분문제에 대한 자세한 논의는 이상원 · 이종철 · 전영섭(1997)을 참조.

1. 공항 활주로를 이용하는 항공사들의 집합은 $N = \{1, ..., n\}$이고, 각 항공사 $i \in N$의 항공기마다 필요한 활주로의 길이가 다르다고 하자. 각 항공사 $i \in N$의 항공기에 필요한 활주로를 건설하기 위해서는 c_i만큼 비용이 소요되는데, 일반성을 잃지 않고서 $c_1 \geq c_2 \geq ... \geq c_n$이라고 가정한다.

2. 실제로 공항에 건설될 활주로는 c_1이 소요되는 활주로 한 개면 된다. 여기서 $\delta_i = c_i - c_{i+1}$이라고 정의하면 $c_1 = \delta_1 + \delta_2 + ... + \delta_n$이 된다.(17) 문제는 c_1을 n개의 각 항공사에 어떻게 배분하는가 하는 것이다.

이 비용배분문제에 대해 추가적으로 $\delta_1 \geq \delta_2 \geq ... \geq \delta_n$로 가정한다면 중핵에 의한 비용배분은 다음과 같다:

우선 전체 활주로의 각 구간 δ_i는 그 구간에 '책임있는(responsible)' 항공사들이 비용을 분담해야 한다. δ_i에 책임있는 항공사는 $1, 2, ..., i$가 되는데, 분배방식은 항공사 i가 가장 큰 부분을 분담하고 다음 항공사들의 분담부분은 기하급수적으로 감소한다. 즉 항공사 i는 δ_i의 1/2을 분담하고 항공사 $(i-1)$는 1/4을 분담하며, 이러한 방식으로 계속 나아가면 항공사 2는 $1/2^{i-1}$을 분담하고 항공사 1은 나머지 부분인 $1/2^{i-1}$을 분담한다. 이와 같은 방식으로 모든 구간에 대해 각 항공사가 부담해야 할 비용을 분담하면 최종 결과는 다음과 같다:

$$\gamma_1 = \delta_1 + \frac{\delta_2}{2} + \frac{\delta_3}{4} + ... + \frac{\delta_{n-1}}{2^{n-2}} + \frac{\delta_n}{2^{n-1}},$$

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_j}{2^{j-1+1}}, \quad 2 \leq i \leq n.$$

위의 결과를 3인 게임에 적용해 보면,

$$\gamma_1 = \delta_1 + \frac{\delta_2}{2} + \frac{\delta_3}{4},$$

$$\gamma_2 = \frac{\delta_2}{2} + \frac{\delta_3}{4},$$

$$\gamma_3 = \frac{\delta_3}{2}$$

이 된다. 이 결과를 샤플리밸류 σ와 비교해 보면, 샤플리밸류에서도 역시 각 구간에서 '책임있는' 항공사들이 비용을 분담하게 되는데 δ_i에 책임있는 항공사 $1, 2, ..., i$가 그 비용

(17) 물론 δ_{n+1}은 0이라고 가정한다.

을 고르게 δ_i/i 만큼 분담하게 된다.[18] 따라서 샤플리밸류에 의한 항공사 1, 2, 3의 부담비용을 살펴보면

$$\sigma_1 = \delta_1 + \frac{\delta_2}{2} + \frac{\delta_3}{3},$$
$$\sigma_2 = \frac{\delta_2}{2} + \frac{\delta_3}{3},$$
$$\sigma_3 = \frac{\delta_3}{3}$$

이 된다. 따라서 항공사 1이나 항공사 2처럼 많은 비용을 분담하는 항공사의 경우에는 중핵의 분담액이 샤플리밸류의 그것보다 작은 반면, 항공사 3처럼 적은 비용을 분담하는 항공사의 경우에는 중핵의 분담액이 더 크다. 이 결과 역시, 앞서 유산상속문제에서 살펴본 것처럼 중핵의 평등주의적 특징을 보여준다고 해석할 수 있다.

4.3. 生産經濟와 中核

이번에는 $n+1$명으로 이루어진 생산경제에 이전적 효용 연합형 게임의 분석틀을 적용해 보자.[19] 동질적인 n명의 노동자들은 자신의 노동력을 생산요소로 보유하고 있는데, 지주가 보유하고 있는 토지라는 생산요소와 i명의 노동력이 결합되면 $f(i)$만큼 옥수수를 생산할 수 있다. 물론 토지가 결합되지 않으면 아무런 옥수수도 생산할 수 없게 된다. 분석의 편의상 생산함수 $f(\cdot)$는 '限界生産遞減의 法則'이 적용된다고 하자. 즉 모든 $i = 1, \ldots, n-1$에 대해

$$f(i) - f(i-1) \geq f(i+1) - f(i)$$

가 성립하며 $f(0) = 0$으로 가정한다.

다음 장에서 자세하게 논의하겠지만, 중핵은 效率性(efficiency)과 對稱性(symmetry)을 만족한다. 따라서 노동자 n명이 받는 몫은 모두 동일하고 지주가 받는 몫은 총생산량 중 노동자들이 받는 몫을 뺀 나머지가 된다. 즉 지주를 아래첨자 0으로 표시하면 중핵 $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$에서는

(18) 각 항공사 $i \in N$ 의 샤플리밸류에 따른 비용분담액 x_i는 다음과 같다:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_j}{j}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

(19) 이 절의 내용은 Moulin(1988)에서 인용함.

$$\gamma_1 = \dots = \gamma_n = a, \quad \gamma_0 = f(n) - na$$

가 된다. 따라서 a만 결정되면 중핵을 구할 수 있게 된다. 여기서 주목할 점은 γ가 코아에 속하기 위해서는 $0 \le a \le f(n) - f(n-1)$을 만족해야 한다는 것이다.

이제 k명의 노동자가 (지주를 포함하거나 또는 지주 없이) S라는 연합을 형성한다고 하자. 그러면 중핵을 구하는 문제는 다음과 같은 최소극대화 문제를 푸는 것과 같다:

$$\max_{0 \le a \le f(n)-f(n-1)} \min_{k=0,\dots,n-1}[(ka + f(n) - na) - f(k), a].$$

여기서 $(ka + f(n) - na) - f(k)$는 지주와 k명의 노동자로 이루어진 연합의 초과벡터이며, a는 노동자로만 이루어진 연합의 초과벡터 중에서 가장 작은 값으로 볼 수 있다. 그런데 한계생산체감의 법칙과 코아의 정의로부터

$$f(n) - f(n-1) \le \frac{f(n-1) - f(k)}{(n-1) - k},$$
$$a \le f(n) - f(n-1)$$

이므로, 둘을 결합하면

$$a \le \frac{f(n-1) - f(k)}{(n-1) - k}$$

가 된다. 이 식을 다시 정리하면, 모든 $k = 0, \dots, n-1$에 대해

$$(ka + f(n) - na) - f(k) \ge f(n) - f(n-1) - a$$

가 된다. 따라서 중핵을 구하기 위한 최소극대화 문제는 $\max \min[f(n) - f(n-1) - a, a]$로 단순화되어 $a = (f(n) - f(n-1))/2$라는 결과를 얻는다. 결국 한계생산체감의 법칙이 적용되는 생산경제에서 중핵은

$$\gamma_1 = \dots = \gamma_n = \frac{1}{2}(f(n) - f(n-1)), \quad \gamma_0 = f(n) - \frac{n}{2}(f(n) - f(n-1))$$

이 되는 것이다. 한편 이 문제에서 샤플리밸류 σ는

$$\sigma_1 = \ldots = \sigma_n = \frac{1}{n}\,(f(n) - \sigma_0),\ \sigma_0 = \frac{1}{n}(f(n) - \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} f(i))$$

이다. 따라서 한계생산체감의 법칙이 성립할 때 지주는 샤플리밸류를 적용할 때 보다 중핵을 적용할 때 더 큰 몫을 분배받게 됨을 알 수 있다.

5. 中核에 대한 公理的 接近法

협조적 게임에서 해의 개념을 합리화하는 방법 중 하나는 '公理的 接近法(axiomatic approach)'을 적용하는 것이다. 공리적 접근법에서는 (i) 일반적으로 바람직하다고 생각되는 몇 가지 공리를 제시한 후, (ii) 어떠한 해의 개념이 이 공리들을 만족하는지 살펴보고, 나아가서 (iii) 이 공리들을 충족시키는 모든 해들을 파악하고자 한다.

일련의 공리가 주어졌을 때, 그 공리들을 만족하는 해가 모두 파악되면 그 정리를 '特性化定理(characterization axiom)'라고 하며 그 때 파악된 해들은 '公理化(axiomatized)' 되었다고 한다. 이 장에서는 중핵에 대한 특성화정리를 살펴보도록 한다. 우선 각 게임의 해 또는 밸류 $\phi: \Gamma \rightarrow \boldsymbol{R}^N$가 만족시켜야 할 공리들을 제시하면 다음과 같다: 먼저 효율성은 보수벡터가 파레토 효율적일 것을 요구한다.

效率性(efficiency): 모든 게임 $v \in \Gamma$에 대해 $\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$이다.

한편 N의 '順列'을 $\pi: N \rightarrow N$로 나타냈을 때 모든 연합 $S \subseteq N$에 대해 $\pi v(S) = v(\pi(S))$로 정의한다. 대칭성은 모든 경기자를 대칭적으로 취급하여 게임의 결과가 각 경기자의 이름에 의해 영향받지 않을 것을 요구한다.

對稱性(symmetry): 모든 게임 $v \in \Gamma$, 모든 경기자 $i \in N$, 그리고 N의 모든 순열 π에 대해 $\phi_{\pi(i)}(\pi v) = \phi_i(v)$이다.

그리고 0-독립성은 게임의 결과가 원점의 위치에 영향받지 않을 것을 요구한다.

0-獨立性(zero independence): 모든 게임 $v, w \in \Gamma$, 모든 벡터 $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, 그리고 모든 연합 $S \subseteq N$에 대해 $w(S) = v(S) + \sum_{i \in S} \beta_i$이면 $\phi(w) = \phi(v) + \beta$이다.

이제 중핵을 특성화하는 데 가장 중요한 역할을 하는 '一致性'을 살펴보자. 일치성은, 어떤 게임의 해를 구할 때 (i) 전체 경기자들을 상대로 보수벡터를 구하든지, (ii) 일부 경기자들의 집합이 자신의 보수를 가지고 간 후, 남은 경기자들로 이루어진 축약게임에 대해 남은 경기자들의 보수벡터를 구하든지 동일한 결과가 얻어질 것을 요구한다. 경기자 집합 N과 연합의 값어치들 v로 이루어지는 게임 (N, v)가 주어졌을 때, 모든 효율적 보수 벡터 x와 모든 연합 $S \subset N$에 대해 'x에서 평가한 S에 대한 縮約게임(reduced game on S at x)'인 (S, v_x^S)는 다음과 같이 정의된다: 각 $S \subset N$와 모든 $T \subseteq S$에 대하여

$$v_x^S(S) = \sum_{i \in S} x_i,$$
$$v_x^S(T) = \max_{R \subseteq N \setminus S}[v(T \cup R) - \sum_{i \in R} x_i].$$

一致性(consistency): 모든 게임 $v \in \Gamma$과 모든 연합 $S \subset N$에 대해 $\phi(N, v) = x$이면, $\phi(S, v_x^S) = x_S$이다.(19)

중핵에 대한 특성화정리는 다음과 같게 된다:

定理〔Sobolev(1975)〕: 중핵은 효율성, 대칭성, 0-독립성 및 일치성을 만족하는 유일한 해이다.

위에서 살펴본 축약게임의 정의는 Sobolev(1975)를 따른 것으로서, S에 속한 경기자들이 S에 속하지 않은 연합 R과 협조하여 얻을 수 있는 이익 중 최대값을 이용하여 자신들의 보수벡터를 계산하고 있다. 이 정의에서 연합 S는 언제든지 외부연합 R을 'x에 해당하는 가격'으로 사들여 이익을 얻을 수 있으므로 S에게 가장 유리한 외부연합과 얻을 수 있는 이익을 S의 새로운 값어치로 생각할 수 있다는 점을 반영하고 있다.

한편 Hart and Mas-Colell(1989)에서는 축약게임을 다음과 같이 정의하고 있다: 각 $S \subset N$과 모든 $T \subseteq S$에 대해

$$v_x^S(S) = \sum_{i \in S} x_i,$$
$$v_x^S(T) = v(T \cup (N \setminus S)) - \sum_{i \in N \setminus S} x_i.$$

(19) $x_S \in \boldsymbol{R}^S$는 x을 $\boldsymbol{R}^S$ 공간에 '사영(projection)'한 벡터이다.

이에 따르면, S에 속한 경기자들이 외부의 '모든' 경기자들과 협조했을 때 얻게되는 이익을 S의 새로운 값어치로 간주한다는 점에서 Sobolev의 축약게임과 다르다. 즉 자신에게 가장 유리한 외부연합만 고려하는 게 아니라 외부의 모든 경기자들과 협조해야 하는 것이다. 축약게임을 이처럼 바꾸어 정의하면, 효율성, 대칭성, 0-독립성 및 일치성을 만족하는 유일한 해는 샤플리밸류가 된다[Hart and Mas-Colell(1989)].

6. 맺음말

지금까지 살펴본 것처럼, 중핵은 샤플리밸류와 달리 항상 코아에 속한다는 장점을 지니고 있다. 이처럼 모든 게임에 대해 항상 코아에 속하는 보수벡터를 그 게임의 해로 대응시킬 경우 이를 '코아 選擇(core selection)'이라고 부르는데, 중핵은 코아 선택 중 대표적인 개념이라고 할 수 있다. 코아 선택은 해의 안정성 측면에서 바람직한 특성을 지니고 있는 반면에, 어떤 연합의 값어치가 증가했을 때 해당되는 경기자들이 손해를 보지 않아야 한다는 單調性(monotonicity) 공리를 만족시키지 못한다는 단점도 지니고 있다.

먼저 Megiddo(1974)는 전체연합의 값어치가 커졌을 때 어떤 경기자도 손해를 보아서는 안된다는 '全體 單調性(aggregate monotonicity)'이라는 공리를 제시하고, 경기자가 9명 이상이면 중핵이 이 공리를 만족하지 못함을 보였다.

전체 단조성(aggregate monotonicity): 모든 게임 $v, w \in \Gamma$에 대해 $v(N) > w(N)$이고 모든 $S \neq N$에 대해 $v(S) = w(S)$이면, 모든 경기자 $i \in N$에 대해 $\phi_i(v) \geq \phi_i(w)$이다.

한편 Young(1985)은 어떤 연합의 값어치가 커지고 다른 연합들이 그대로이면 값어치가 커진 연합에 속한 모든 경기자들이 손해를 보아서는 안된다는 '聯合 單調性(coalitional monotonicity)'이라는 공리를 제시하고, 경기자가 5명 이상일 때 중핵뿐만 아니라 어떠한 코아 선택도 이 공리를 만족하지 못함을 보였다.

연합 단조성(coalition monotonicity): 모든 게임 $v,w \in \Gamma$과 모든 연합 $S \subseteq N$에 대해, $v(S) > W(S)$이고 모든 $T \neq S$에 대해서는 $v(T) = w(T)$이라면, 모든 경기자 $i \in S$에 대해 $\phi_i(v) \geq \phi_i(w)$이다.(21)

(21) 전체 단조성은 연합 단조성이 $S = N$에 대해 성립하는 특수한 경우이므로, 연합 단조성이 전

따라서 코아 선택과 단조성 사이에는 상충관계가 존재한다고 볼 수 있다. 만약 볼록게임만 고려한다면 샤플리밸류도 코아 선택이 되므로 양자가 양립 가능하다. 그러나 Hokari (2000)는 볼록게임이라고 하더라도 경기자의 숫자가 4명 이상이면 중핵이 전체 단조성을 만족하지 못함을 보였다.

서울大學校 經濟學部 博士過程
151-742 서울특별시 관악구 신림동 산56-1
E-mail: hojkim@snu.ac.kr

서울大學校 經濟學部 敎授
151-742 서울특별시 관악구 신림동 산56-1
전화: (02)880-6382
팩시: (02)888-4454
E-mail: ychun@plaza.snu.ac.kr

參考文獻

김호중 · 전영섭(2001): 게임이론적 접근법에 의한 비용배분문제, 『경제논집』 **40**. **1**, 서울대학교 경제연구소, 1-15.

이상원 · 이종철 · 전영섭(1997): 게임이론적 접근법에 의한 공항이착륙시설의 비용배분, 『경제논집』 **36**. **1**, 서울대학교 경제연구소, 79-105.

전영섭(1991): 샤플리 밸류를 이용한 비용배분의 공평성, 『경제논집』 **30**. **2**, 서울대학교 경제연구소, 231-244.

Aumman, R.J., and M. Maschler(1985): "Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud," *Journal of Economic Theory*, **36**, 195-213.

Bondavera, O.N.(1962): "Teoriia iadra v igre n lits," *Vestnik Leningrad University, Mathematics, Mechanics, Astronomy*, **13**, 141-142.

Hart, S., and A. Mas-Colell(1989): "Potential, Value and Consistency," *Econometrica*, **57**, 589-614.

체 단조성보다 더 강한 공리이다.

Hokari, T.(2000): "The Nucleolus is not Aggregate-Monotonic on the Domain of Convex Games," *International Journal of Game Theory*, **29**, 133-137

Megiddo, N.(1974): "On the Monotonicity of the Bargaining Set, the Kernel and the Nucleolus of a Game," *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **27**, 355-358.

Moulin, H.(1988): *Axioms of Cooperative Decision Making*, Cambridge, Cambridge University Press.

O'Neill, B.(1982): "A Problem of Rights Arbitration in the Talmud," *Mathematical Social Science*, **2**, 345-371.

Schmeidler, D.(1969): "The Nucleolus of a Characteristic Function Game," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **17**, 1163-1170.

Shapley, L.S.(1953): "A Value for N-Person Games," in H.W. Kuhn and A.W. Tucker(eds.), *Contributions to the Theory of Games II, Annals of Mathematics Studies*, **28**, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 307-317.

_____ (1971): "Core of Convex Games," *International Journal of Game Theory*, **1**, 11-26.

Sobolev, A.I.(1975): "Characterization of the Principle of Optimality for Cooperative Games through Functional Equations," in N.N. Vorby'ev(ed.), *Mathematical Methods in the Social Science*, Vipusk 6, USSR, Vilnius, 92-151.

Young, H.P.(1985): "Monotonic Solutions of Cooperative Game," *International Journal of Game Theory*, **14**, 65-72.