確率的 支拂過程과 貨幣需要에 대한 小考

金 永 植

본 논문은 화폐보유에 대한 規模의 經濟(economies of scale)를 허용하는 確率的 支拂過程(stochastic payment process)으로부터 거래비용 또는 쇼핑시간함수(shopping time technology)를 정의한 뒤, 총거래비용을 최소화하는 화폐수요를 도출한다. 그리고 화폐수요의 대표적 모형인 화폐선불제약(cash-in-advance constraint) 모형과 보몰-토빈 모형에 내재된 확률적 지불과정과 화폐보유에 있어서 규모의 경제 특성을 분석한다. 나아가서 경제주체들의 지불과정에 대한 學習(learning)이 존재하는 경우, 보다 일반적인 화폐수요관계식을 도출하고, 이 때 화폐유통속도는 학습의 증가함수임을 보인다. 또한 쇼핑을 통해 지불과정에 대한 現場學習(learning-by-shopping)이 가능한 경우, 현재의 거래비용이 과거 화폐잔고와 음의 관계에 있음을 고려하여 현재 화폐수요를 거래규모와 명목이자율, 그리고 과거 화폐잔고의 함수로 도출한다.

1. 序 論

Baumol(1952)의 연구로부터 Tobin(1956), Whalen(1966), Miller and Orr(1966), Patinkin (1989), 그리고 Dvoretzky(1989) 등 화폐수요에 대한 在庫理論的 接近(inventory-theoretic approach)은 화폐보유에 있어서 規模의 經濟(economies of scale) 특성을 논하는 데 유용하다.

이 논문은 Patinkin(1989)과 Dvoretzky(1989)가 소개한 確率的 支拂過程(stochastic payment process)을 기초로 하여 거래비용 또는 "쇼핑시간"을 정의한 뒤, 총거래비용을 최소화하는 화폐수요관계식을 도출한다. 그리고 대표적 화폐수요모형인 貨幣先拂制約(cash-in-advance constraint) 모형과 보몰-토빈 모형에 내재된 확률적 지불과정과 화폐보유에 대한 규모의 경제 특성을 분석한다. 나아가서 Patinkin(1989)과 Dvoretzky(1989)의 확률적 지불과정에 경제주체들의 學習(learning)을 도입한 뒤, 좀 더 일반적인 거래비용과 화폐수요를 도출한다. 이 때 학습은 시간의 흐름에 따라 화폐보유에 대한 규모의 경제와 화폐유통속도를 증가시키는 역할을 한다. 마지막으로 쇼핑을 통해 지불과정에 대한 現場學習(learning-by-shopping)이 가능한 경우, 현재의 거래비용이 과거 화폐잔고와 음의 관계에 있음을 고려하여 현재 화폐수요를 거래규모와 명목이자율, 그리고 과거 화폐잔고의 함수로 도출한다.

2. 確率的 支拂過程(Stochastic Payment Process)

본 장에서는 Patinkin(1989)을 참고하여 일정한 기간, 예를 들어 한 주일 동안 주어진 所得受取(receipts)와 支拂(payments) 간 시간적 불일치에서 발생하는 純支拂金(net payment due)의 確率過程(random process)과 이를 묘사하는 근사적 확률분포함수를 가정한다.

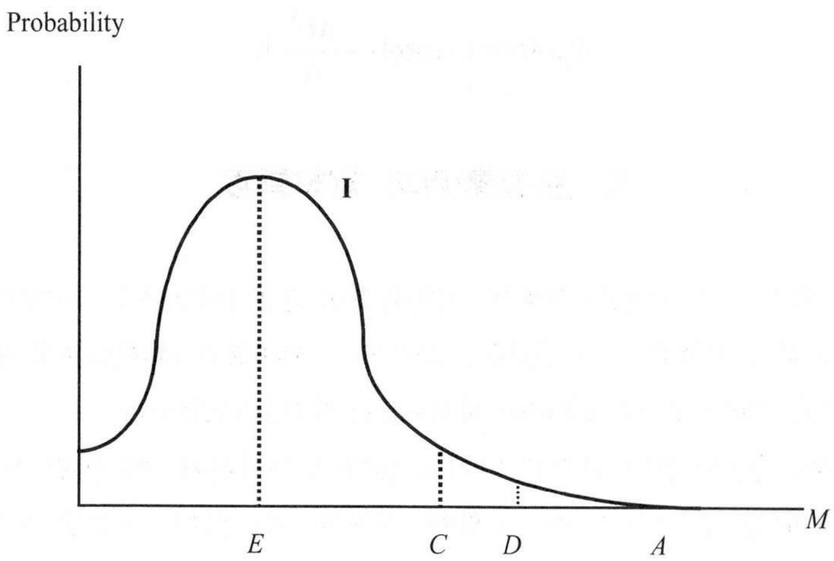
먼저 몇 가지 용어를 정의하면 다음과 같다. 어느 일정한 시점에서 超過支拂金(excess payment due)은 주어진 소득수취와 지불 간 차이를 의미한다. 또한 이전 시점에 지급하지 못한 초과지불금도 현재 지불해야 할 의무가 있다고 가정한다. 어느 일정한 시간에 純支拂金(net payment due)은 그 시점의 초과지불금과 이전에 지급하지 못한 모든 초과지불금을 합한 값으로 정의한다. 어느 일정한 시간에 초과지불금과 순지불금이 음(-)이 되는 상황은 소득수취가 지불을 초과한 것을 의미한다. 또한 한 주일의 마지막 시간에 순지불금은 한 주일 동안 총지불에서 소득수취 금액을 뺀 값으로 결정된다.

구체적으로 한 주일 동안 m번의 支拂時點(payment hours)이 있고, 이 중 i번째 시간의 초과지불금을 y_i(i = 1, 2, …, m), 순지불금을 M_i라고 하면 이 두 가지 확률변수 간의 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&M_1 = y_1 \\
&M_2 = y_1 + y_2 = M_1 + y_2 \\
&M_3 = y_1 + y_2 + y_3 = M_2 + y_3 \\
&\qquad \cdots\cdots \\
&M_m = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_m = M_{m-1} + y_m.
\end{aligned}
$$

이 때 M_i의 최대값을 M이라고 하면 M도 확률변수이다. 단순함을 위해 경제주체들은 한 주일의 시작과 끝에 화폐잔고를 0으로 한다고 가정하자. 한 주일간 확률적 지불과정에 상관없이 매주 시작과 끝의 화폐잔고에 대한 이러한 가정은 한 주일의 마지막 시간에 순지불금을 0으로 만든다. 따라서 이러한 가정 하에서 확률변수 M의 최소값은 0이 된다. 이 최소값은 지불과 소득수취가 시간적으로 완전히 일치할 때 또는 주 초반에 축적된 음(-)의 초과지불금이 주 후반에 정(+)의 초과지불금과 일치하는 경우 실현될 수 있다. 이 두 가지 경우에서도 일정 시점의 純支拂金(net payment due)은 음(-)이거나 0이 된다.

한편 M의 최대값은 경제주체가 소득수취 이전에 모든 소비지출에 대해 먼저 지불해야



〈그림 1〉

하는 경우에 실현된다. 이러한 모든 소비지출의 합 또는 총거래규모는 〈그림 1〉의 M에 대한 확률분포곡선 **I**에서 A로 나타내자. 이는 또한 소비지출에 대한 Clower(1967)식 貨幣先拂制約(cash-in-advance constraint)이 작동하는(binding) 경우로 해석될 수 있다. 〈그림 1〉의 확률분포곡선 **I**는 M의 최소값인 0과 최대값인 A가 모두 일어날 가능성이 없음을 나타낸다.

이 확률분포곡선을 경제적으로 설명하면 다음과 같다. 예를 들어 C에서 A까지 확률분포곡선 **I**의 면적이 1/10이라고 하면 이는 90%의 확률로 지불시간마다 純支拂金(net payments due)이 C를 초과하지 않음을 의미한다. 즉 경제주체가 C만큼의 화폐잔고를 가지고 있다면, 確率的 支拂過程(random payment process)에 의해 야기될 수 있는 소득수취와 지불 간 시간적 불일치에서 발생하는 초과지불금을 90%의 확률로 지불할 수 있음을 의미한다. 이와 유사하게 화폐잔고가 D로 증가했다면, 그 확률은 95%로 증가할 것이다. 또한 위의 확률분포곡선이 상대적으로 높은 순지불금 수준에서 길고 얇은 형태를 갖는 것은 이 영역에서 주어진 거래에 대해 상대적으로 작은 화폐보유비율로도 지급불능에 대비한 큰 수준의 안전성을 얻을 수 있다는 일종의 規模의 經濟(economies of scale)로 해석할 수 있다. 마지막으로, Dvoretzky(1989)는 〈그림 1〉과 같은 확률분포곡선을 가지는 확률적 지불과정이 거래량 A가 커짐에 따라 다음과 같은 근사적 확률분포함수에 근접함을 보였다:

$$F_A(M) = 1 - \exp(-\frac{M^2}{A}). \tag{2.1}$$

3. 去來費用과 貨幣需要

본 장에서는 제2장에서 살펴본 확률적 지불과정의 분포함수로부터 거래비용 또는 쇼핑시간을 화폐잔고의 감소함수로 도출한다. 그리고 거래비용과 화폐보유로 인한 기회비용의 합으로 정의된 총비용을 극소화하는 화폐수요관계식을 도출한다.

개별 경제주체는 한 단위의 시간을 가지고 있다고 가정하자. 이 단위 시간은 여가 또는 非效用(disutility)을 가져오는 쇼핑에 사용될 수 있다. 〈그림 1〉의 去來過程(transactions process) 확률분포 하에서 t기 화폐잔고 M_t를 가지고 쇼핑을 하는 경제주체의 쇼핑시간 n_t는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

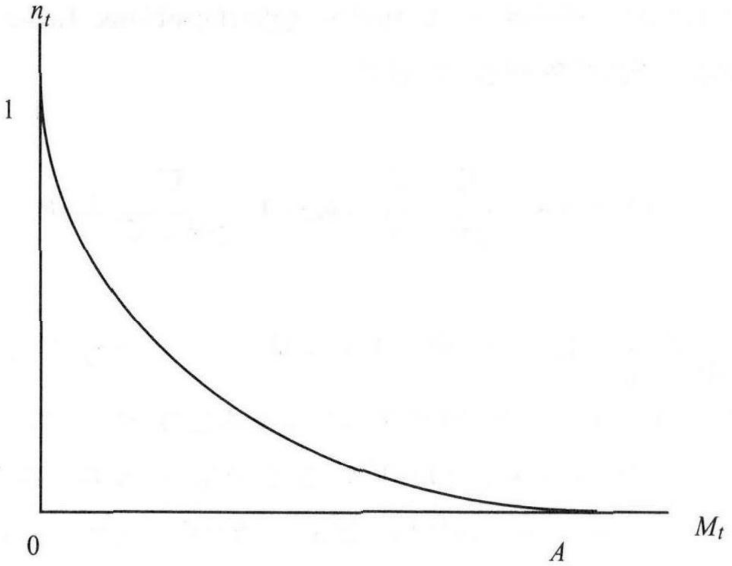
$$n_t = 1 - F_A(M_t) = \exp(-\frac{M_t^2}{A}). \tag{3.1}$$

위 식에서 쇼핑시간은 총 거래량 A의 증가함수이고, t기 화폐잔고 M_t의 감소함수이다. 한편 위 식의 양변에 자연대수(natural logarithm)를 취하면 다음과 같다:

$$\ln n_t = -\frac{M_t^2}{A} \tag{3.2}$$

식 (3.2)에 의하면 주어진 쇼핑시간 $\bar{n}$을 유지하기 위해서는 화폐잔고가 $\sqrt{A}$의 비율로 증가해야 한다. 즉 거래량이 증가할 때, 주어진 순지불금을 확보하기 위해 필요한 화폐보유의 증가는 거래량의 증가보다 작다. 이러한 특성은 화폐유통속도가 1보다 크다는 사실을 의미하기도 한다. 이러한 화폐잔고의 상대적 크기에 따른 規模의 經濟(large-scale economies)는 〈그림 1〉의 확률분포곡선에서 오른쪽으로 길고 얇은 꼬리(long right-hand tail)와 일치하는 특성이다. 거래규모 A가 커짐에 따라 식 (3.1)에 의해서 결정되는 쇼핑타입은 〈그림 2〉와 같이 묘사될 수 있다:

이제 t기 초에 개별 경제주체들이 주어진 총거래 A를 위해 다음과 같은 총거래비용 C_t를 최소화하기 위해 화폐잔고 M_t를 선택한다고 하자.



〈그림 2〉

$$C_t = \exp(-\frac{M_t^2}{A}) + RM_t \tag{3.3}$$

여기서 R은 명목이자율로서 화폐보유의 단위기회비용을 나타낸다. 위 식 (3.3)으로부터 화폐잔고 M_t에 대한 일계조건(first-order condition)을 도출하면 다음과 같다:

$$\frac{2M_t}{A}\exp(-\frac{M_t^2}{A}) = R \tag{3.4}$$

식 (3.4)는 추가적인 화폐잔고의 한계편익과 이자기회비용이 일치하는 수준에서 최소비용이 달성됨을 의미한다. 식 (3.4)는 또한 앞 장에서 살펴본 확률적 지불과정으로부터 유도된 화폐수요관계를 나타낸다.

命題 1: 식 (3.4)에 함축된 화폐수요는 거래규모 A의 증가함수이다. 그리고 기회비용인 명목이자율 R이 너무 크지 않는 한, 화폐수요는 R의 감소함수이고 유통속도는 R의 증가함수이다.

證明: 〈附錄〉을 참조하라.

식 (3.4)를 선형화하기 위하여 로그 테일러 展開(logarithmic Taylor expansion)를 하면 다음과 같은 화폐수요관계식을 얻을 수 있다:

$$\ln M_t = K + \left(\frac{\overline{M} - \overline{V}}{2\overline{M} - \overline{V}}\right)\ln A - \left(\frac{\overline{V}}{2\overline{M} - \overline{V}}\right)\ln R \tag{3.5}$$

여기서 $K = \left(\frac{\overline{A}}{2\overline{M}^2 - \overline{A}}\right)\ln 2$ 이고 $\overline{M}$과 $\overline{V} \equiv \overline{A}/\overline{M}$는 각각 테일러 近似(Taylor approximation)를 실행한 수준에서 평가된 화폐수요와 유통속도를 나타낸다. 이 때 명목이자율 R이 너무 크지 않으면 $\overline{M}^2 > \overline{A}$ 또는 $\overline{M} > \overline{V}$을 쉽게 보일 수 있다. 화폐수요에 대한 위의 선형근사식 (3.5)는 다음과 같은 기본적인 성질을 가진다. 첫째, 화폐수요 M_t는 거래량 변수인 A의 증가함수이고, 기회비용변수인 R의 감소함수이다. 둘째, 유통속도($\overline{V}$)가 증가하는 경우, 화폐수요는 명목이자율에 대해서는 보다 彈力的(sensitive)이 되고, 거래량에 대해서는 덜 탄력적이 된다. 한편 앞 장에서 가정한 確率的 支拂過程(stochastic payment process)은 화폐경제학에서 널리 알려진 貨幣先拂制約(cash-in-advance constraint) 모형과 보몰-토빈 모형에 내재된 확률적 지불과정을 각각 특수한 경우로서 설명할 수 있을 뿐만 아니라, 이들 모형에 내재된 거래비용함수에 대한 새로운 해석을 가능케 한다.

3.1. 貨幣先拂制約(cash-in-advance constraint) 模型

앞 장에서도 언급했듯이 화폐선불제약은 〈그림 1〉의 확률분포에서 순지불이 항상 A가 되는 경우에 해당된다. 즉 화폐선불제약에 의하면 M의 최대값 A가 1의 확률로 항상 실현된다. 이러한 특성은 다음과 같은 극단적 형태의 거래비용 또는 쇼핑시간으로 나타낼 수 있다:

$$n_t = \begin{cases} 1 \text{ if } M_t < A \\ 0 \text{ if } M_t \geq A \end{cases} \tag{3.6}$$

왜냐하면 화폐선불제약하에서 $M_t < A$이면 $F_A(M_t) = 0$이고, $F_A(A) = 1$이기 때문이다.

표준적 화폐선불제약 모형에서는 화폐잔고가 거래규모보다 큰 경우는 거래비용이 0이고 거래규모보다 작은 경우는 무한대의 거래비용이 발생하는 반면에, 여기에서 고려한 확률적 지불과정으로부터 정의되는 거래비용 또는 쇼핑시간은 단위구간 [0, 1]에서 결정된다. 그리고 화폐선불제약하에서는 if $M_t = A$이므로, 화폐유통속도가 명목이자율과는 독립적으로 항상 1이 됨을 쉽게 확인할 수 있다:

$$V_t \equiv \frac{A}{M_t} = 1.$$

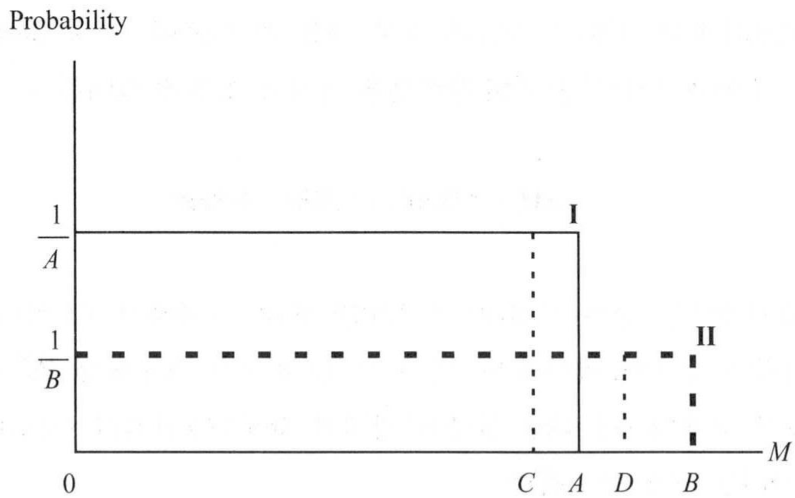
3.2. 보몰-토빈 模型

화폐수요에 대한 在庫理論的 接近(inventory theoretic approach)의 대표적 모형인 보몰-토빈 모형에 의하면 $M_t \in [0, A]$에서 추가적 화폐잔고의 증가는 화폐보유수준에 관계 없이 동일한 비율로 거래비용을 감소시킨다. 이러한 특성은 앞 장에서 살펴본 확률적 지불과정의 특수한 경우로서 〈그림 3〉과 같은 一樣分布(uniform distribution)로 나타낼 수 있다.

또한 〈그림 3〉에서 분포함수 **I**는 다음의 거래비용 또는 쇼핑시간을 의미한다:

$$\begin{aligned} n_t &= 1 - F_A(M_t) \\ &= 1 - \frac{M_t}{A} \equiv 1 - \frac{1}{V_t} \end{aligned} \tag{3.7}$$

식 (3.7)은 화폐잔고 M_t와 총거래규모 A 사이에 0차동차성(homogeneous of degree zero)의 관계를 나타낸다. 즉 주어진 수준의 거래비용 또는 쇼핑시간에 대해 화폐잔고는 거래규모에 비례하여 증가한다. 이는 〈그림 3〉에서 확률분포곡선 **I**의 C와 확률분포곡선 **II**의 D가 각각 (누적)확률분포의 90%에 대응되는 상황에서 C/D와 A/B가 같음을 의미한다. 이와 같은 사실은 보몰(1952)-토빈(1956)의 원래 모형과 Barro(1976)에 의해 일반화된 모형에 내재된 거래비용이 소비지출의 증가함수이고, 화폐잔고의 감소함수이며, 0차동차성



〈그림 3〉

을 갖는다는 Feenstra(1986)의 연구결과와 일치한다.

보몰-토빈 모형에서 거래비용 또는 쇼핑시간은 현금인출을 위한 은행방문에서 발생하므로 주어진 단위시간에 대한 여가의 손실로 나타난다. 주어진 t기의 현금인출이 균일하게 분포되어 있다고 가정하면, 개별 경제주체들은 주어진 총거래 A를 위해 다음의 총비용을 최소화하기 위하여 화폐잔고를 선택한다:

$$\frac{A}{M_t}\left(1-\frac{M_t}{A}\right)+\frac{M_t}{2}R \tag{3.8}$$

여기서 A/M_t는 인출의 빈도를 나타낸다. 이 때 화폐잔고 M_t에 대한 일계조건(first-order condition)을 구한 뒤 화폐수요관계식을 도출하면 다음과 같다:

$$M_t=\sqrt{\frac{2A}{R}} \tag{3.9}$$

이는 보몰-토빈 모형에서 현금인출 시 單位費用(unit cost)이 소요되는 경우의 화폐수요관계식과 동일하다. 이 경우 화폐유통속도는 다음과 같고, 명목이자율 R과는 양(+)의 관계에 있다.

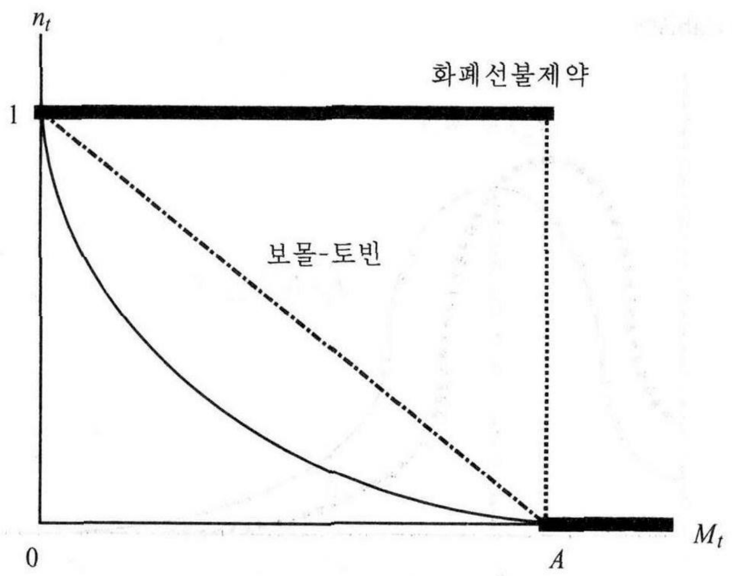
$$V_t=\frac{A}{M_t}=\sqrt{\frac{RA}{2}} \tag{3.10}$$

한편 화폐수요관계식 (3.9)는 다음과 같이 적을 수 있는데, 이는 화폐수요가 거래량과 명목이자율의 변화에 대하여 동일한 탄력성을 가지고 있음을 말해준다:

$$\ln M_t = 0.5\ln(2) + 0.5\ln A - 0.5\ln R$$

이 화폐수요관계식은 앞서 도출한 선형화된 화폐수요관계식 (3.5)에서 $\overline{M}=2\overline{V}$ 또는 $\overline{M}^2=2\overline{A}$인 특별한 경우에 얻어진다. 이는 식 (3.5)에서 요구되는 $\overline{M}^2>\overline{A}$보다 더 제약적인 조건으로서 화폐보유에 대한 규모의 경제가 화폐수요관계식 (3.5)에 내재된 규모의 경제보다 더 작다는 것을 의미한다

끝으로 확률적 지불과정을 나타내는 분포함수 (2.1)과 화폐선불제약 모형, 그리고 보



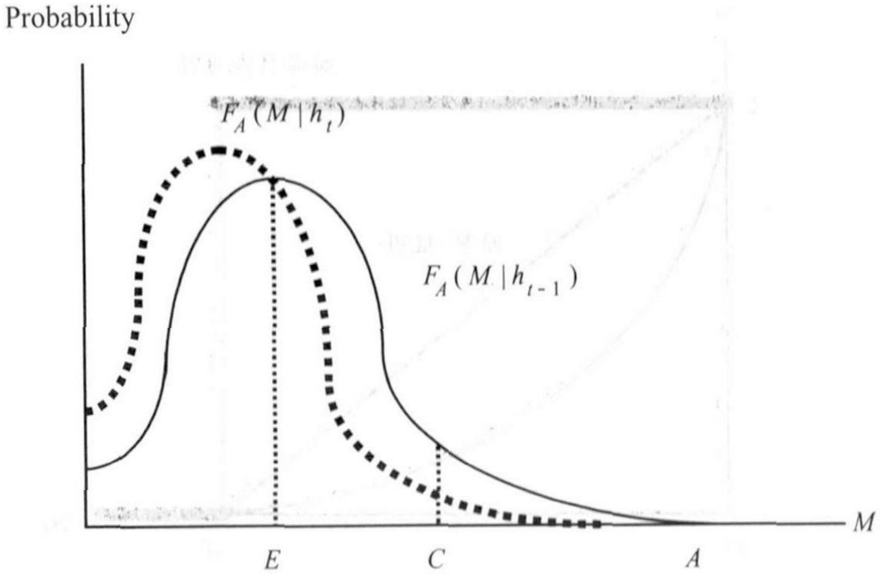
〈그림 4〉

몰-토빈 모형에 내재된 거래비용 또는 쇼핑시간을 각각 그림으로 나타내면 〈그림 4〉와 같다. 이러한 거래비용의 차이는 화폐잔고에 대한 규모의 경제에 있음을 주목할 필요가 있다.

4. 支拂過程에 대한 學習效果와 貨幣需要

경제주체들이 t기에 소득수취와 지불 사이의 시간적 불일치에 기인한 확률적 지불과정에 대해 가지고 있는 지식을 h_t라 하고, 매기간 $\alpha(>1)$의 성장률로 축적된다고 가정하자(단 초기에 경제주체들의 지불과정에 대한 지식은 h_0로 주어져 있다고 가정한다). 그리고 지불과정에 대한 t기의 지식 h_t로 인해 절감되는 순지불금을 $\mu(h_t)$라고 하자. 그러면 t기에 i번째 지불시간의 순지불금은 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$
\begin{aligned}
M_{1t} &= y_{1t} - \mu(h_t) \\
M_{2t} &= y_{1t} + y_{2t} - \mu(h_t) = M_{1t} + y_{2t} \\
M_{3t} &= y_{1t} + y_{2t} + y_{3t} - \mu(h_t) = M_{2t} + y_{3t} \\
&\cdots\cdots \\
M_{mt} &= y_{1t} + y_{2t} + y_{3t} + \ + y_{mt} - \mu(h_t) = M_{(m-1)t} + y_{mt}.
\end{aligned}
$$



〈그림 5〉

이 때 M_{it}의 최대값을 M_t라고 하자. 지불과정에 대한 學習(learning)이 없는 경우와 같이 M_t의 최소값은 0이지만, 지불과정에 대한 지식의 축적 때문에 최소값은 학습(learning)이 없을 때보다 상대적으로 높은 확률 값을 가진다. 즉 소득수취와 지불시점 간 시간적 불일치하에서 지불과정에 대한 지식의 축적은 지출계획 조정을 통하여 학습이 없는 경우보다 비교적 적은 화폐잔고로 순지불금을 확보할 수 있다.

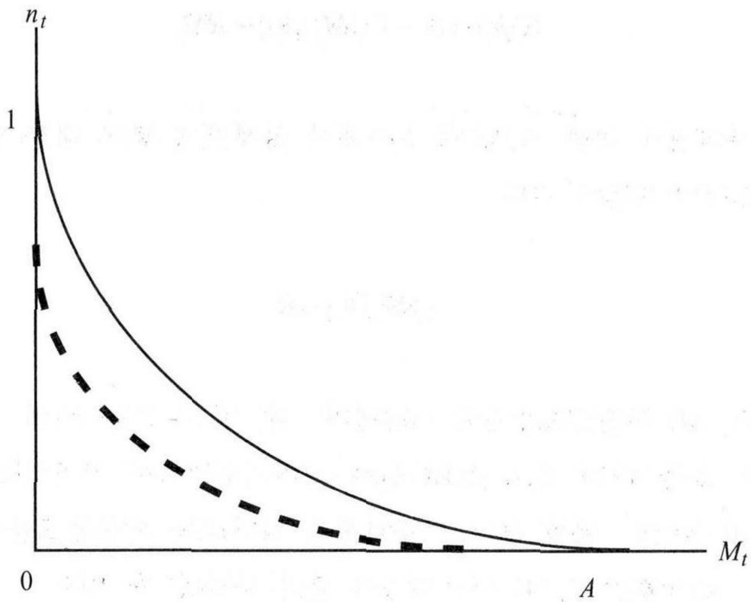
이제 식 (2.1)의 확률분포함수와 주어진 단위시간하에서 t기의 거래비용 또는 쇼핑시간은 다음과 같이 수정된다:

$$n_t = 1 - F_A(M_t \mid h_t) \tag{4.1}$$

여기서 주어진 화폐잔고 M에 대하여 $F_A(M \mid h_{t-1}) \leq F_A(M \mid h_t)$를 가정한다. 즉 〈그림 5〉에서와 같이 $F_A(M \mid h_{t-1})$는 $F_A(M \mid h_t)$를 first-order stochastic dominance 의미로 지배한다고 가정한다.

예를 들어, 확률적 지불과정에 대한 학습을 고려하는 경우 Dvoretzky(1989)의 근사적 확률분포함수식 (2.1)은 다음과 같이 수정된다:

$$F_A(M_t \mid h_t) = F_A(M_t + h_t) = 1 - \exp\left[-\frac{(M_t + h_t)^2}{A} \right] \tag{4.2}$$



〈그림 6〉

식 (4.2)로부터 도출되는 t기의 거래비용 또는 쇼핑시간은 다음과 같이 t기의 지불과정에 대한 지식 h_t의 감소함수가 되며, 〈그림 6〉의 점선과 같이 나타낼 수 있다.

$$(4.3) \qquad n_t(h_t) = 1 - F_A(M_t + h_t) = -\exp\left[-\frac{(M_t + h_t)^2}{A}\right]$$

한편 식 (4.3)의 양변에 자연대수를 취하면 다음 식을 얻을 수 있다. 이 식에 의하면 주어진 쇼핑시간을 유지하기 위해서는 화폐잔고가 $\sqrt{A} - h_t$의 비율로 증가해야 함을 의미한다.

$$\ln n_t(h_t) = -\frac{(M_t + h_t)^2}{A}$$

즉 거래규모가 증가할 때, 주어진 순지불금을 확보하기 위해 필요한 화폐보유의 증가는 지불과정에 대한 학습이 없을 때보다 작게 된다. 이러한 특성은 지불과정에 대한 지식이 화폐보유에 있어서 규모의 경제를 더 증가시키고 화폐유통속도를 증가시키는 것으로 해석할 수 있다.

이제 t기 초 화폐잔고 M_t는 다음의 총거래비용을 최소화하는 값으로 선택된다:

$$C_t(h_t) = [1 - F_A(M_t \mid h_t)] + RM_t \tag{4.4}$$

위 식에서 지불과정에 대한 지식수준 h_t하에서 화폐잔고 M_t에 대한 일계조건(first-order condition)을 도출하면 다음과 같다:

$$f_A(M_t \mid h_t) = R \tag{4.5}$$

여기서 $f_A(.)$은 $F_A(.)$의 확률밀도함수를 나타낸다. 위 식 (4.5)는 t기에 추가적인 화폐잔고의 한계편익, 즉 쇼핑시간의 감소 $f_A(M_t \mid h_t)$와 이자기회비용이 일치하는 수준에서 최소비용이 달성됨을 의미한다. 예를 들어 지불과정을 나타내는 확률분포함수가 (4.2)인 경우 최적 화폐잔고를 결정하는 식 (4.5)는 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$\frac{2(M_t + h_t)}{A} \exp\left[- \frac{(M_t + h_t)^2}{A} \right] = R \tag{4.6}$$

命題 2: 식 (4.6)에 내재된 화폐수요는 거래규모 A의 증가함수이다. 그리고 기회비용인 R이 너무 크지 않는 한, 화폐수요는 R의 감소함수이며 지불과정에 대한 지식수준 h_t의 감소함수이다. 또한 화폐유통속도는 R의 증가함수이다.

證明: 〈附錄〉을 참조하라.

식 (4.6)을 선형화하기 위하여 로그 테일러 전개(logarithmic Taylor expansion)를 하면 다음과 같은 화폐수요관계식을 얻을 수 있다:

$$\ln M_t = \varphi_1 \ln A - \varphi_2 \ln \frac{R}{2} - \varphi_3 \ln h_t \tag{4.7}$$

여기서 $\varphi_1 = \frac{\overline{M} + \overline{h}}{\overline{M}} \left[\frac{(\overline{M} + \overline{h})^2 - \overline{A}}{2(\overline{M} + \overline{h})^2 - \overline{A}} \right]$, $\varphi_2 = \overline{V} \left[\frac{\overline{M} + \overline{h}}{2(\overline{M} + \overline{h})^2 - \overline{A}} \right]$, $\varphi_3 = \frac{\overline{h}}{\overline{M}}$ 이고 명목이자율 R이 너무 크지 않는 이상 $(\overline{M} + \overline{h})^2 > \overline{A}$ 임을 쉽게 보일 수 있다. 지불과정에 대한 학습에 의해 지식이 축적되는 경우 위의 선형근사식에 의하면 화폐수요는 거래규모 A의 증가함수이고, 명목이자율 R과 지식 h_t의 감소함수로 결정된다. 또한 유통속도 V가 증가

함에 따라 화폐수요는 R의 변화에 보다 민감(sensitive)해짐을 쉽게 확인할 수 있다.

지불과정에 대한 학습이 있는 경우와 없는 경우의 화폐수요관계식 (4.7)과 (3.5)에서 화폐수요의 거래규모에 대한 탄력성과 이자율 탄력성의 크기를 비교하면 다음과 같다:

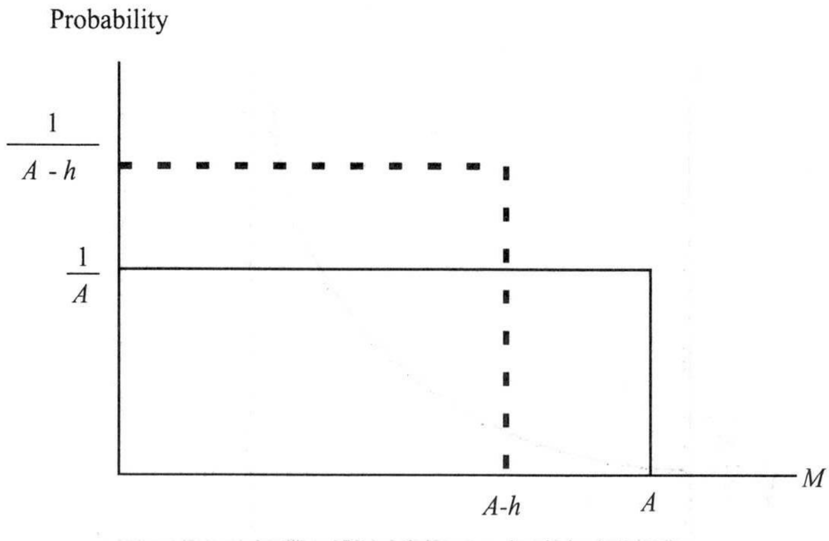
$$\varphi_1 > \frac{\overline{M} - \overline{V}}{2\overline{M} - \overline{V}}, \quad \varphi_2 < \frac{\overline{V}}{2\overline{M} - \overline{V}}.$$

즉 지불과정에 대한 학습이 존재하는 경우 화폐수요는 거래량에 보다 민감해지고, 명목이자율 변화에 대해서는 덜 민감해진다. 직관적으로 화폐수요의 이자율탄력성이 더 작아진 이유는 학습이 규모의 경제를 증가시키는 효과를 가져오기 때문이다. 반면에 거래규모의 증가는 〈그림 5〉에서 A의 증가를 의미하므로 지급과정에 대한 현재 지식은 화폐잔고를 줄이는 데 많은 도움이 되지 않는다. 따라서 지급불능(insolvency)에 대비하기 위하여 더 많은 예비적 화폐잔고가 필요할 것이다.

4.1. 보몰-토빈 模型과 學習效果

보몰-토빈 모형에 내재된 확률적 지불과정에 위에서 가정한 학습효과를 도입하면 〈그림 7〉에서 확률분포곡선은 점선으로 이동하게 된다.

위 그림의 분포는 다음의 거래비용 또는 쇼핑시간을 의미한다:



〈그림 7〉

(4.8)
$$n_t(h_t) = 1 - \frac{M_t + h_t}{A}.$$

또한 거래과정에 대한 학습(learning)으로 인해 원래 보몰-토빈 모형의 화폐수요관계식 (3.9)는 다음과 같이 수정된다:

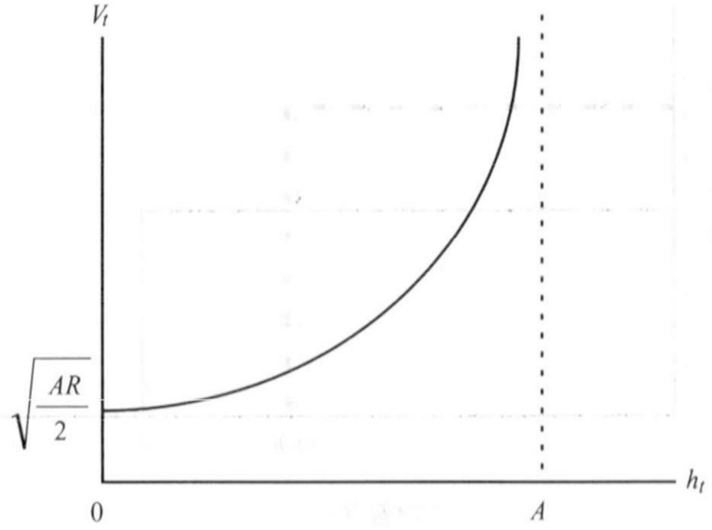
(4.9)
$$M_t(h_t) = \sqrt{\frac{2(A - h_t)}{R}}$$

그리고 화폐유통속도는 다음과 같으며 〈그림 8〉과 같이 나타낼 수 있다:

(4.10)
$$V_t(h_t) \equiv \frac{A}{M_t(h_t)} = A\sqrt{\frac{R}{2(A - h_t)}}$$

여기서 주목할 점은 화폐유통속도가 학습의 증가함수이며, 〈그림 8〉에서 下限點(lower bound)은 지불과정에 대한 학습이 없는 경우의 유통속도를 나타낸다.

$$V_t(h_t) = A\sqrt{\frac{R}{2(A - h_t)}} \geq \sqrt{\frac{AR}{2}} = V_t.$$



〈그림 8〉

4.2. 쇼핑을 통한 現場學習(Learning-by-shopping)과 貨幣需要

Arrow(1962)를 포함하여 많은 경제학자들은 생산활동에 있어서 現場學習(learning-by-doing)이 인적자본 형성에 중요하다는 사실을 관찰해왔다. 이와 유사한 개념으로서 경제주체들이 소득수취와 지불시점 간 시간적 불일치를 경험함으로써 쇼핑을 통한 현장학습(learning-by-shopping)을 통해 지불과정에 대한 지식이 축적된다고 가정한다. 구체적으로 t기 초의 지식 h_t는 다음과 같이 축적된다:

$$h_t = g(n_{t-1} \mid h_{t-1}) \tag{4.11}$$

여기서 g는 t기 초에 주어진 h_{t-1} 수준에서 n에 대한 단조 증가함수이다. 예를 들어 h_t가 다음과 같이 축적된다고 가정한다:

$$h_t = n_{t-1} + (1-\delta)h_{t-1} \tag{4.12}$$

여기서 $\delta \in (0,1)$은 지식의 감가상각률이다. 이 때 화폐보유에 대한 규모의 경제는 식 (4.12)에 의해 현장학습으로 축적되는 지식에 의해 증가한다.

식 (4.1)과 (4.12)에 의해 h_t는 다음과 같이 과거의 화폐잔고에 의존한다.

$$\begin{aligned} h_t &= n_{t-1} + \sum_{j=1}^{t-1}(1-\delta)^j n_{t-j-1} \\ &= [1 - F_A(M_{t-1} \mid h_{t-1})] + \sum_{j=1}^{t-1}(1-\delta)^j[1 - F_A(M_{t-j-1} \mid h_{t-j-1})] \end{aligned} \tag{4.13}$$

만약 t기 초 지식이 동기간 말에 쓸모 없게 된다고 가정하면(즉 $\delta = 1$), 위 식 (4.13)에서 h_t는 다음과 같이 단순화된다:

$$h_t = 1 - F_A(M_{t-1}) = \exp\left(-\frac{M_{t-1}^2}{A}\right) \tag{4.14}$$

이는 t기 쇼핑을 통한 現場學習(learning-by-shopping)으로 축적된 지식과 이로 인한 규모의 경제가 $t-1$기 화폐잔고와 음의 관계를 가지고 있음을 의미한다. 따라서 t기의 쇼핑

시간은 t-1기 화폐잔고의 증가함수임을 나타낸다.

예를 들어 보몰-토빈 모형에서 식 (4.14)는 아래의 형태로 단순화되는데, 현장학습으로 축적된 지식 h_t와 전기의 화폐잔고 M_{t-1} 사이에 음의 관계가 있음을 나타낸다.

$$h_t = 1 - \frac{M_{t-1}}{A} \tag{4.15}$$

또한 t기의 거래비용 또는 쇼핑시간은 다음과 같다:

$$n_t = 1 - \frac{M_t + h_t}{A} = 1 - \frac{1}{A}(1 + M_t - \frac{M_{t-1}}{A}) \tag{4.16}$$

여기에서도 t기의 쇼핑시간은 t-1기의 화폐잔고의 증가함수임을 알 수 있다. 이러한 거래비용과 이자기회비용 등 총비용을 최소화하는 화폐잔고는 전기의 화폐잔고뿐만 아니라 이자기회비용과 거래량의 함수로 결정될 것이다.

서울大學校 經濟學部 副敎授
151-742 서울특별시 관악구 신림동 산 56-1
전화: (02)880-6387
팩스: (02)886-4231
E-mail: kimy@snu.ac.kr

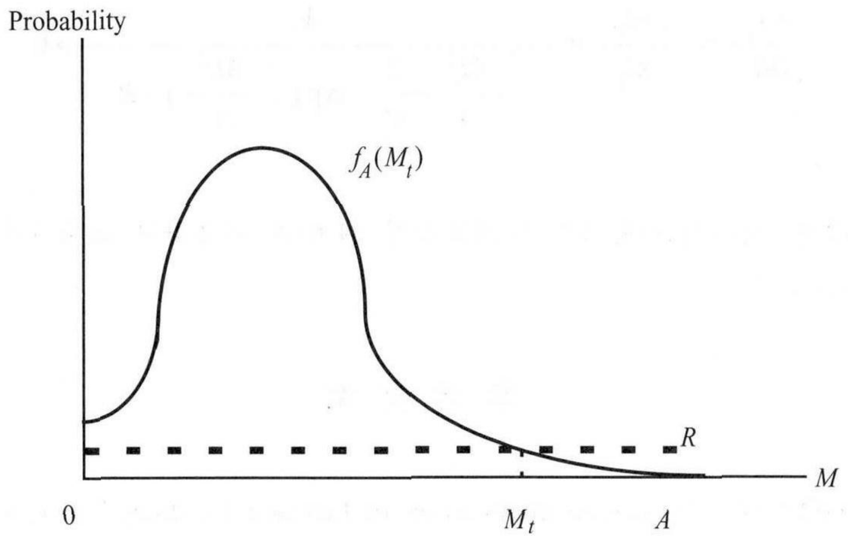
〈附 錄〉

命題 1의 證明:

다음과 같이 G를 정의하자.

$$G \equiv \frac{2M_t}{A} \exp(-\frac{M_t^2}{A}) - R = 0 \tag{A.1}$$

위 식에 陰函數定理(implicit function theorem)를 적용하면 다음 식을 얻을 수 있다:



〈그림 9〉

$$\text{(A.2)} \qquad \frac{\partial M_t}{\partial A} = -\frac{G_A}{G_M} = -\frac{M_t}{A}\left(\frac{M_t^2 - A}{A - 2M_t^2}\right) > 0$$

$$\text{(A.3)} \qquad \frac{\partial M_t}{\partial R} = -\frac{G_R}{G_M} = -\frac{-1}{\frac{2}{A}\exp\left(-\frac{M_t^2}{A}\right)\frac{A - 2M_t^2}{A}}) < 0$$

위 식 (A.2)와 (A.3)에서 부등호가 성립한 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\text{(A.4)} \qquad M_t^2 > A$$

한편 화폐잔고 M_t에 대한 일계조건(first-order condition) 식 (3.4)는 다음과 같이 묘사될 수 있다.:

〈그림 9〉에서 R이 너무 크지 않는 한 식 (A.4)가 성립함을 확인할 수 있다. 끝으로 식 (A.1)은 다음과 같이 화폐유통속도 V_t의 함수로 다시 쓸 수 있다.:

$$\text{(A.5)} \qquad G \equiv \frac{2}{V_t}\exp\left(-\frac{M_t}{V_t}\right) - R = 0$$

위 식에 음함수정리를 적용하면, 식 (A.4)와 (A.5)에 의해 다음이 성립한다.

$$\text{(A.6)} \qquad \frac{\partial V_t}{\partial R} = -\frac{G_R}{G_V} = -\frac{-V_t}{\frac{M_t^2}{A}\frac{2}{V_t}\exp\left(-\frac{M_t^2}{A}\right) - R} > 0$$

命題 2의 證明: 화폐잔고에 대한 일계조건식 (4.6)을 이용하여 命題 1과 유사한 방식으로 증명할 수 있다.

參考文獻

Arrow, K.J.(1962): "The Economic Implications of Learning-by-doing," *Review of Economic Studies*, **29**, 155-173.

Barro, R.(1976): "Integral Constraints and Aggregation in an Inventory Model of Money Demand," *Journal of Finance*, **31**, 77-87.

Baumol, W.J.(1952): "The Transactions Demand for Cash: An Inventory Theoretic Approach," *Quarterly Journal of Economics*, **66**, 545-556.

Clower, R.W.(1967): "A Reconsideration of the Microfoundations of Monetary Theory," *Western Economic Journal*, **6**, 1-8.

Dvoretzky, A.(1989): "The Probability Distribution Generated by the Random Payment Process," Special Appendix to Chapter V in D. Patinkin(1989): *Money, Interest, and Prices*, 3rd ed., MIT Press, 450-456.

Feenstra, R.(1986): "Functional Equivalence between Liquidity Costs and the Utility of Money," *Journal of Monetary Economics*, **17**, 271-291.

Miller, M.H., and D. Orr(1966): "A Model of the Demand for Money by Firms," *Quarterly Journal of Economics*, **80**, 413-435.

Patinkin, D.(1989): *Money, Interest, and Prices*, 3rd ed., MIT Press, Chapter V.

Tobin, J.(1956): "The Interest Elasticity of Transactions Demand for Cash," *Review of Economics and Statistics*, **38**, 241-247.

Whalen, E.L.(1966): "A Rationalization of the Precautionary Demand for Cash," *Quarterly Journal of Economics*, **80**, 314-324.